Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Álgebra lineal 1 (Física)
Primer semestre de 2018

Práctico 9

1. En los siguientes casos determinar si la función dada es una transformación lineal.

   a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(v) = v + w$, siendo $o \neq w \in \mathbb{R}^3$ un vector fijo (traslación de vector w).

   b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $T(v) = \|v\|$ (norma).

   c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $T(v) = v \cdot w$ (producto escalar), siendo $w \in \mathbb{R}^3$ un vector arbitrario fijo.

   d) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(v) = v \times w$ (producto vectorial), siendo $w \in \mathbb{R}^3$ un vector arbitrario fijo.

   e) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(v) = \Pi_w(v)$, siendo $\Pi_w(v)$ la proyección ortogonal de v sobre $o \neq w \in \mathbb{R}^3$ fijo.

2. Si $A = (a_{ij})$ es una matriz cuadrada $n \times n$, se define su *traza* por $\operatorname{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$. Probar que $T : M_n \to \mathbb{R}$ definida por $T(A) = \operatorname{tr}(A)$ es una transformación lineal.

3. Recordar que si $A \in M_{m\times n}$, entonces $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es la multiplicación por A.

   a) Sea $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Hallar $L_A(x, y)$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Intrepretar geométricamente.

   b) Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y, z) = (3x + 2y - 4z, x - 5y + 3z)$. Hallar $A \in M_{2\times 3}$ tal que $T = L_A$.

4. En cada uno de los casos siguientes, investigar si existe alguna transformación lineal T que verifique las condiciones dadas. En caso afirmativo hallar una tal T, y en caso negativo justificar la respuesta.

   a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, tal que $T(1, 0, 0) = (2, 1, 0),\ T(1, 1, 0) = (0, 0, 1),\ T(1, 1, 1) = (0, 0, 1)$.

   b) $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(1) = (1, 0),\ T(1 + x) = (1, 1),\ T(1 + x + x^2) = (0, 0),\ T(3 + 2x + x^2) = (2, 1)$.

   c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, tal que $T(1, 0, 0) = (2, 1, 0),\ T(0, 1, 0) = (-1, 2, 3)$.

   d) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_1[x]$ tal que $T(1, 0, 1) = x + 2,\ T(0, 1, 0) = 2x + 1,\ T(1, 1, 1) = 5x + 4$.

5. Se consideran las transformaciones lineales $S_1, S_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ y $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definidas por

   $$S_1(x, y, z) = (z - x, x), \quad S_2(x, y, z) = (z - x, z - y), \quad T(x, y) = (y, x, x + y).$$

   Probar $S_i \circ T = \operatorname{id}$ y $T \circ S_i \neq \operatorname{id}$, $i = 1, 2$.

6. Sea $R_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la rotación de centro el origen y ángulo $\theta \in \mathbb{R}$ arbitrario. Notar que R_θ es lineal.

   a) Hallar $A \in M_2$ tal que $R_\theta = L_A$.

   b) Hallar $R_\theta(x, y)$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

   c) Hallar $R_\theta \circ R_\theta$. Geométricamente, ¿qué representa esta composición?

   d) Deducir fórmulas para $\cos(2\theta)$ y $\operatorname{sen}(2\theta)$.

7. Hallar núcleo e imagen de las siguientes transformaciones lineales:

   a) $T : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}^2$ definida por $T\big(p(x)\big) = \big(p(1) + p(-1),\ p(0)\big)$,

   b) $T : M_2 \to \mathbb{R}$ definida por $T(A) = \operatorname{tr}(A)$.

   c) $\Pi_w : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (la proyección ortogonal sobre w), siendo $w \in \mathbb{R}^2$ un vector no nulo fijo.

8. Hallar una base del núcleo y una de la imagen para las siguientes transformaciones lineales:

   a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y, z) = (x + 2y + z,\ 2x + y + 2z,\ 3x + 3y + 3z)$.

   b) $T : \mathbb{R}_2[x] \to M_2$ es la transformación lineal tal que $T(1) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{smallmatrix}\right)$, $T(1+x) = \left(\begin{smallmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{smallmatrix}\right)$, $T\left(1 + x + x^2\right) = \left(\begin{smallmatrix} 10 & 5 \\ 0 & -5 \end{smallmatrix}\right)$.

9. Sea $T : M_n \to M_n$ definida por $T(A) = A + A^t$ (A^t es la traspuesta de A). Probar que el núcleo de T son las matrices antisimétricas y la imagen de T son las matrices simétricas.

10. Sean $T = L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ y $S = L_B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

    Calcular la nulidad y el rango de T, S, $S \circ T$ y $T \circ S$.

11. En los ejercicios 7 a 10 determinar si las transformaciones son inyectivas, sobreyectivas o biyectivas.