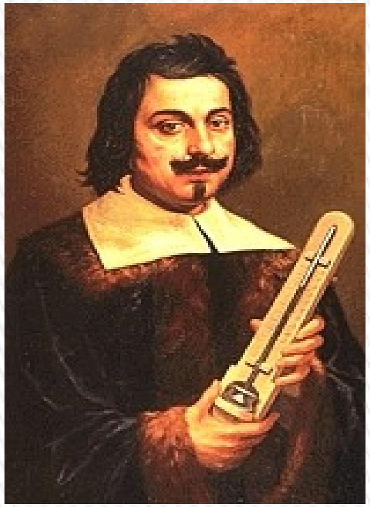
24- FLUIDOS – Hidrodinámica

Arquímedes
-288 Siracusa,
-212 muerto por un soldado romano en el sitios a Siracusa.
"Eureka, eureka! "

Blaise Pascal
19/6/1623, Francia.
Muere en 1662.
Matemático, físico, filósofo y teólogo.
Inventó una máquina para sumar, la prensa hidráulica y la jeringa.



Evangelista Torricelli
15/10/1608, Florencia. .
Muere en 1662.
Físico y matemático.
Inventó el barómetro.

Daniel Bernoulli
8/2/1700, Basilea.
Muere en 1782.
Físico , médico y matemático.

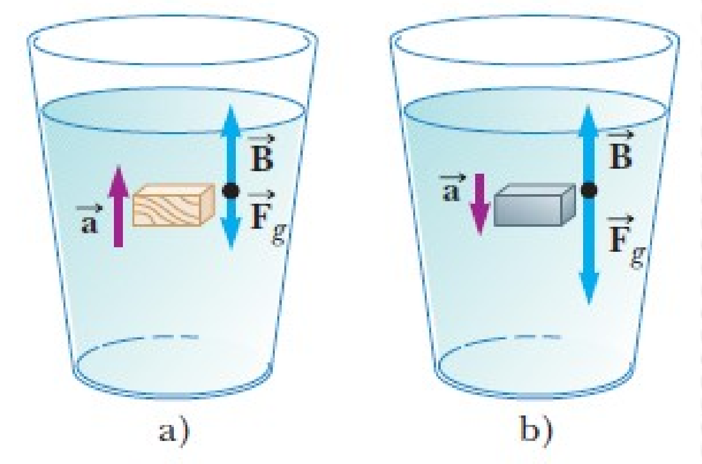
REPASO DE LA CLASE PASADA

Principio de Arquímedes: si un cuerpo está parcial o totalmente sumergido en un fluido, éste ejerce una fuerza hacia arriba (empuje B) sobre el cuerpo igual al peso del fluido desplazado por el cuerpo.

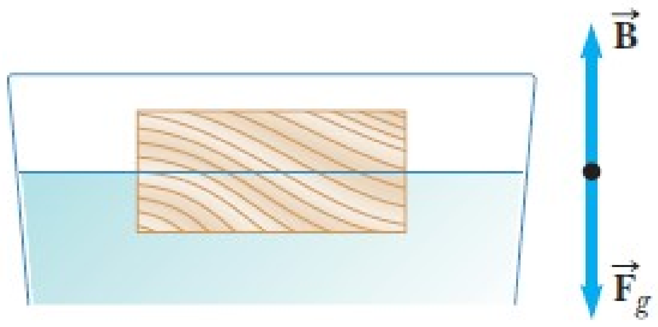
Para un cuerpo de volumen *V* totalmente sumergido en un fluido de densidad ρ_f *el empuje vale:* $\mathbf{B = \rho_f V g}$

Si el cuerpo está parcialmente sumergido un volumen V_S en un fluido de densidad ρ_f *el empuje vale:* $\mathbf{B = \rho_f V_S\, g}$

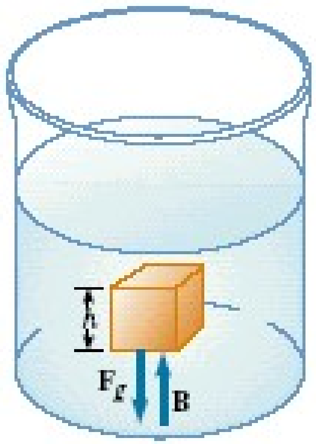
La causa física de la fuerza de empuje es la diferencia de presiones entre las partes superior e inferior del objeto, que muestra ser igual al peso del fluido desplazado.



REPASO DE LA CLASE PASADA



Un objeto que flota sobre la superficie de un fluido experimenta dos fuerzas, la fuerza gravitacional $\mathbf{F_g}$ y la fuerza de flotación **B.** Puesto que el objeto flota en equilibrio, $B = F_g$.

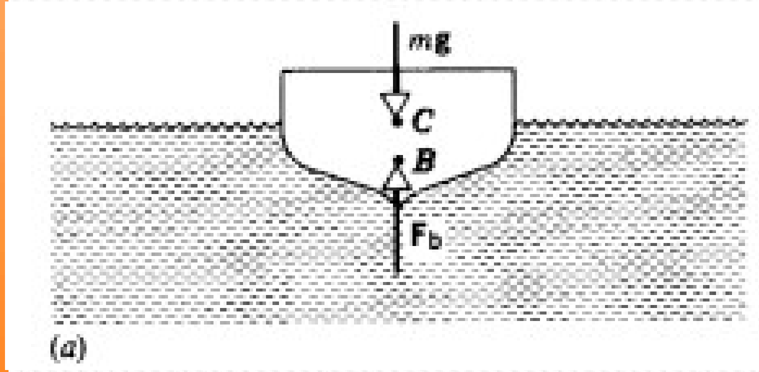


Para un cuerpo de volumen V y densidad ρ totalmente sumergido en un fluido de densidad ρ_f la fuerza neta sobre él es: $B - mg = (\rho_f - \rho)Vg$

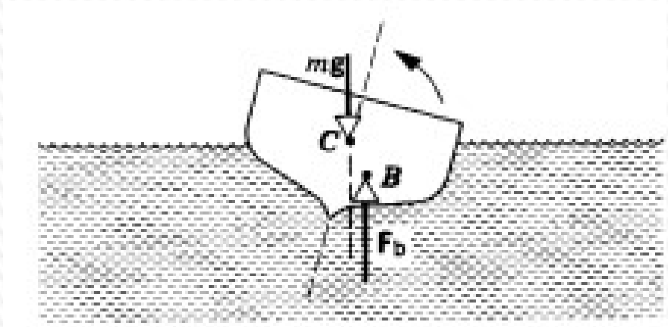
Para un cuerpo en flotación, de densidad ρ y volumen V, que tiene un volumen sumergido en el fluido V_S, se tiene

$$\frac{\rho}{\rho_f} = \frac{V_S}{V}$$

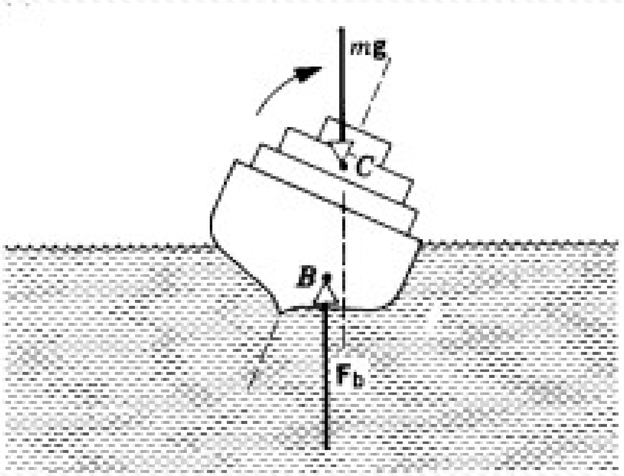
Estabilidad de las embarcaciones



Sección transversal de una embarcación que flota en su posición normal. El empuje F_B actúa en el centro de flotación B, y el peso actúa en el centro de gravedad C. La embarcación está en equilibrio bajo la acción de estas fuerzas.



Centro de gravedad bajo
Cuando la embarcación se ladea, el centro de flotación ya no puede estar situado en la misma línea vertical que el centro de gravedad, y puede actuar un torque neto sobre la embarcación. Aquí el torque respecto a C actúa para regresar a la embarcación a la posición normal.



Centro de gravedad alto
Aquí el centro de gravedad está situado más arriba, de modo que el torque respecto a C debido al empuje tiende a ladear aún más a la embarcación.

Ejemplo: ejercicio 7.2

Globos esféricos con helio, que tienen masa de 5,00 g cuando están desinflados y con radio de 20,0 cm cada uno cuando están inflados, son utilizados por un niño de 20,0 kg para levantarse a sí mismo del suelo. ¿Cuántos globos se necesitan si la densidad del helio es 0,179 kg/m^3 y la densidad del aire es 1,29 kg/m^3?

Volumen de c/ globo inflado: $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi(0{,}200)^3 = 3{,}351\times10^{-2}\ m^3$

Cada globo producirá un empuje dado por: $B = V\rho_{aire}\, g$

El peso total de cada globo inflado vale: **P** $= V\rho_{helio}\, g + m_g g$

Por lo tanto el "empuje neto" vale: $B_{neto} = B - P = V\rho_{aire}\, g - = V\rho_{helio}\, g + m_g g$

$$B = \breve{V} g(\rho_{aire} - \rho_{He}) - m_g g = 3{,}2230 \times 10^{-2}\ kg$$

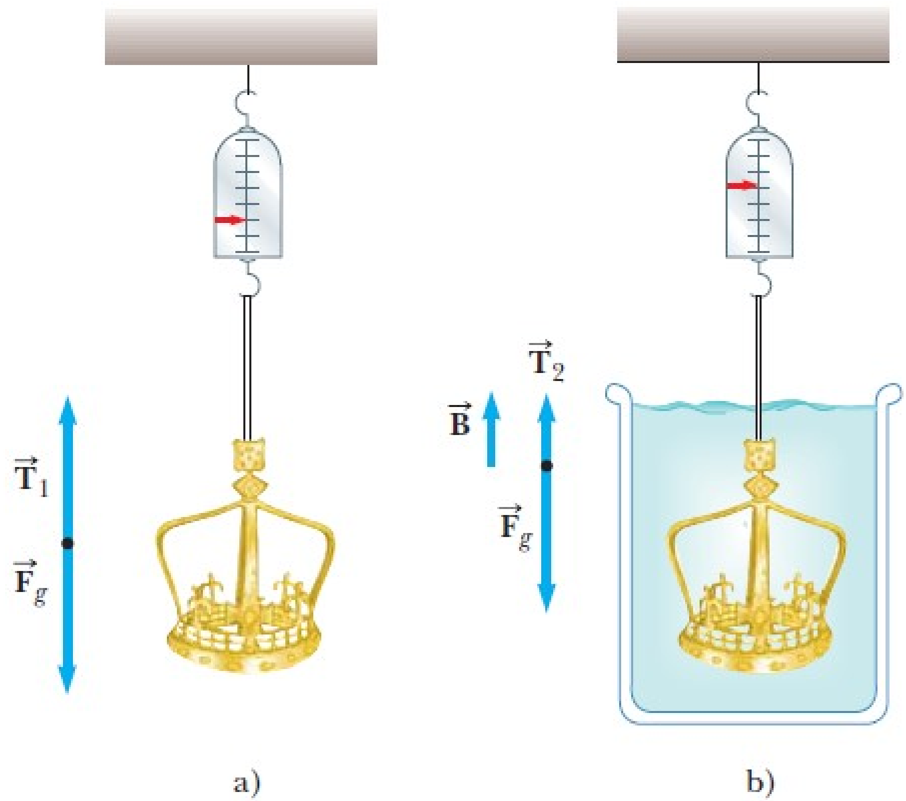
Si N es el número de globos, entonces se debe cumplir que:
$W_{niño} = N.B_{neto}$

$$N = \frac{W_{niño}}{B} = \frac{20}{3{,}2230\times10^{-2}} = 620{,}54$$

Se necesitan como mínimo 621 globos

Ejemplo: ejercicio 7.4 ¡Eureka!

Según la tradición a Arquímedes se le pidió determinar si una corona hecha para el rey consistiera de oro puro. De acuerdo con la leyenda, el resolvió este problema al pesar la corona primero en aire y luego en agua, como se muestra en la figura. Suponga que lectura en la balanza es 7,84 N cuando la corona estaba en aire y 6,84 N cuando estaba en agua. ¿Qué dijo Arquimedes al rey?



Cuando la corona está suspendida en aire, la lectura en la balanza es el peso real $T_1 = F_g$ *(se desprecia* la pequeña fuerza de flotación debida al aire circundante).
Cuando la corona se sumerge en agua, la fuerza de flotación **B** reduce la lectura de la balanza a un peso *aparente:*
$T_2 = F_g - B$.

Ejemplo: ejercicio 7.4 ¡Eureka!

$$\sum F = B + T_2 - F_g = 0 \qquad B = F_g - T_2 = 7.84\ \text{N} - 6.84\ \text{N} = 1.00\ \text{N}$$

Ya que esta fuerza de flotación es igual en magnitud al peso del agua desplazada, $\rho_a g V_a$ *= 1,00 N, donde* V_a *es el volumen del* agua desplazada y ρ_a *es su densidad.*

Además, el volumen de la corona V_c *es igual al volumen del agua desplazada porque la* corona está completamente sumergida.

$$V_c = V_a = \frac{1.00\ \text{N}}{\rho_a g} = \frac{1.00\ \text{N}}{(1\,000\ \text{kg/m}^3)(9.80\ \text{m/s}^2)} = 1.02 \times 10^{-4}\ \text{m}^3$$

La densidad de la corona vale:

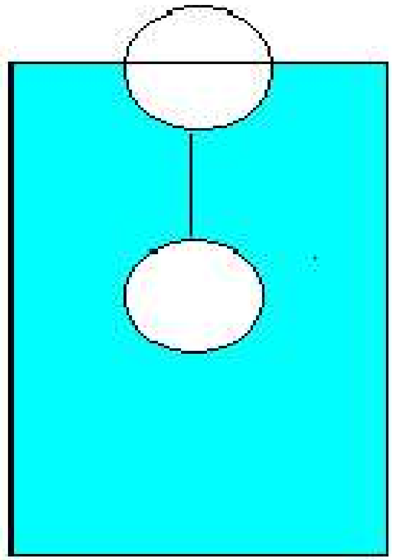
$$\rho_c = \frac{m_c}{V_c} = \frac{m_c g}{V_c g} = \frac{7.84\ \text{N}}{(1.02 \times 10^{-4}\ \text{m}^3)(9.80\ \text{m/s}^2)} = 7.84 \times 10^3\ \text{kg/m}^3$$

Como la densidad del oro es $19{,}3\times10^3$ kg/m^3.

Arquímedes debió informar al rey que lo habían engañado: o la corona estaba hueca o no estaba hecha de oro puro.

EJEMPLO: ejercicio 7.5

Dos esferas de igual volumen están sujetas mediante un hilo de masa despreciable. La esfera inferior tiene una masa tres veces mayor que la superior. El conjunto se halla sumergido en agua, de modo que en equilibrio, sólo queda por encima del nivel del agua la mitad de la esfera superior, tal como se muestra en la figura. Si el volumen de cada esfera es de 1,30 dm^3, ¿cuánto vale la tensión del hilo?



El peso de las dos esferas debe ser igual al empuje, por tanto su masa total (M+3M) debe valer lo mismo que la masa del agua desplazada: $m = 1{,}5V\rho_{H20} = 4M$ siendo

Equilibrio de esfera superior: $B_1 = Mg + T$

Equilibrio de esfera inferior: $3Mg = B_2 + T$

Pero $B_2 = 2B_1$ entonces: $Mg = B_1 - T$

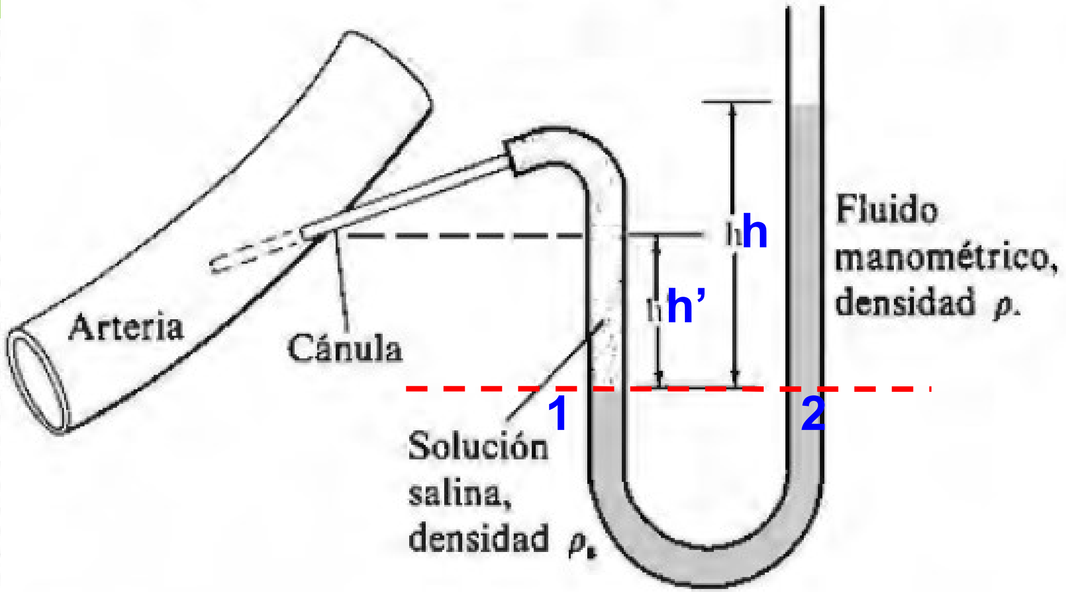
$3(B_1 - T) = 2B_1 + T$

$B_1 = 4T$

$$T = \frac{1}{4}B_1 = \frac{1}{4}\frac{1}{2}V\rho_{H_2O}g = \frac{1}{8}(1{,}30\ dm^3)\left(1{,}00\frac{kg}{dm^3}\right)(9{,}8\ m/s^2) = 1{,}5925\ \text{N}$$

T = 1,59 N

Medición de la presión sanguínea mediante canulación



Medición de presión sanguínea en arterias o venas de animales anestesiados.
Se inserta una *cánula,(pequeño tubo de vidrio* o plástico que contiene solución salina y un agente anticoagulante).
La solución salina se halla en contacto con el fluido de un manómetro (Hg para arterias, solución salina para venas).

P_s ; presión sanguínea
P_{atm} ; presión atmosférica
ρ_m : densidad fluido manométrico
ρ_{ss} : densidad solución salina

$$P_1 = P_2$$
$$P_s + \rho_{ss} g h' = P_{atm} + \rho_m g h$$

$$P_S = P_{atm} + \rho_m g h - \rho_{ss} g h'$$

Mecánica de los fluidos

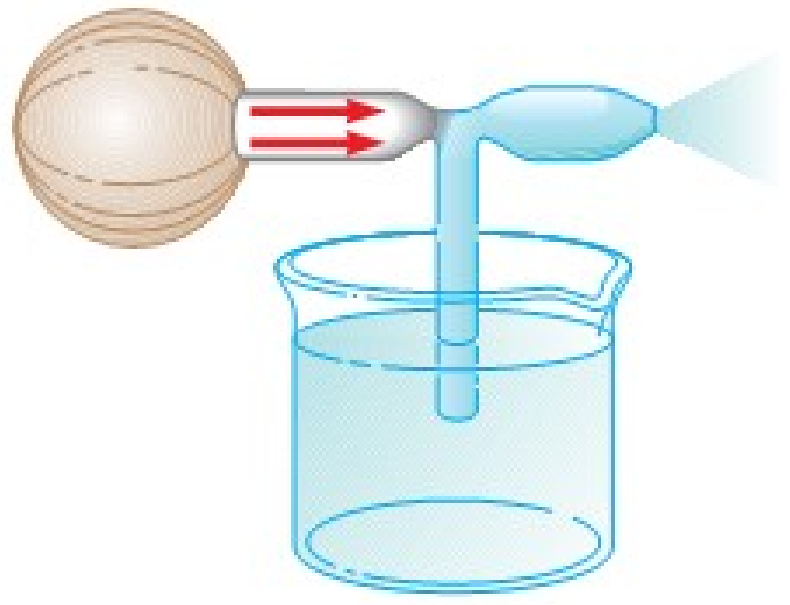
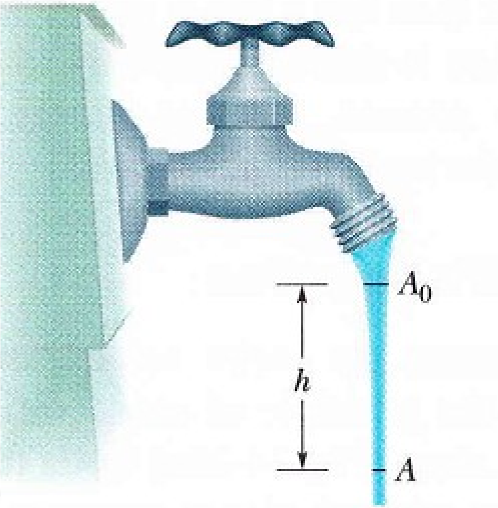


Figura 14.23 Una corriente de aire que pasa sobre un tubo sumergido en un líquido hace que el líquido se eleve en el tubo.



FLUJO DE FLUIDO

Flujo de fluidos : extremadamente complejo, pero algunas situaciones se pueden representar con modelos idealizados relativamente sencillos.

Fluido ideal o perfecto:
incompresible (es decir, su densidad no puede cambiar) y **no viscoso (fricción interna**).

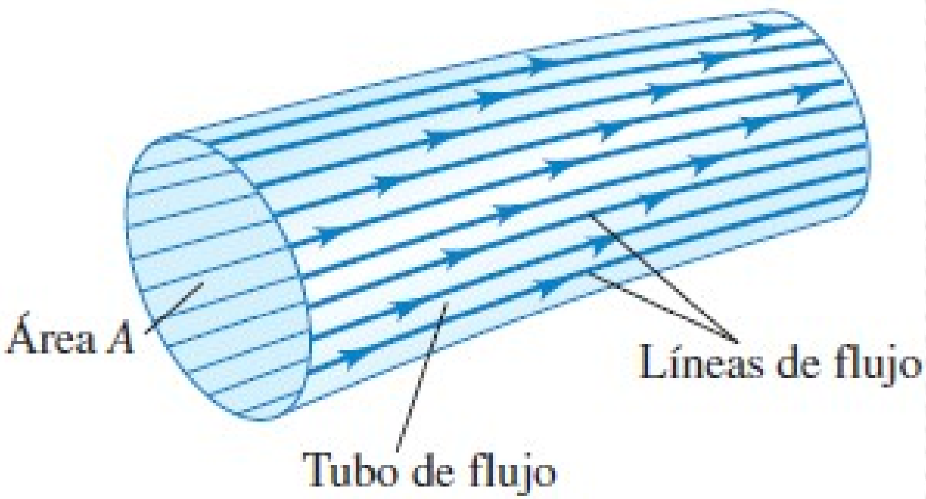
Líquidos aproximadamente incompresibles en casi todas las situaciones,
Gases: incompresible sólo si las diferencias de presión de una región a otra no son muy grandes.

Viscosidad o fricción interna: causa esfuerzos de corte cuando dos capas adyacentes de fluido se mueven una en relación con la otra, como cuando un fluido fluye dentro de un tubo o alrededor de un obstáculo. En algunos casos, se pueden despreciar estas fuerzas de corte en comparación con las fuerzas debidas a la gravedad y a diferencias de presión.

FLUJO DE FLUIDO

Línea de flujo o de corriente: trayectoria de una partícula en un fluido en movimiento.
Flujo estable o estacionario: el patrón global de flujo no cambia con el tiempo.

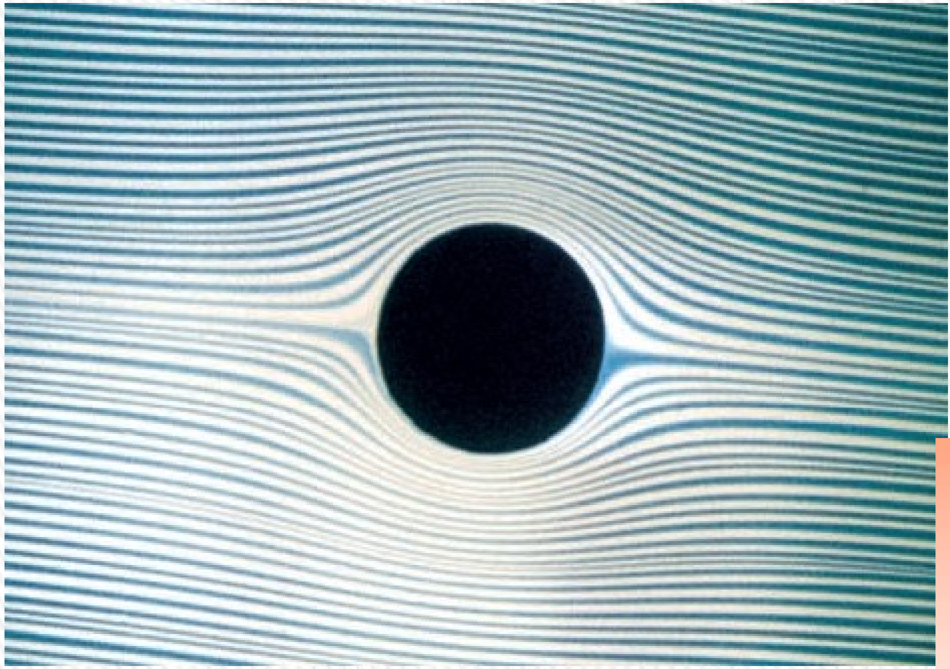
Flujo estable: c/elemento que pasa por un punto dado sigue la misma línea de flujo.
El "mapa" de velocidades del fluido en distintos puntos del espacio permanece constante, aunque la velocidad de una partícula específica pueda cambiar tanto en magnitud como en dirección durante su movimiento.

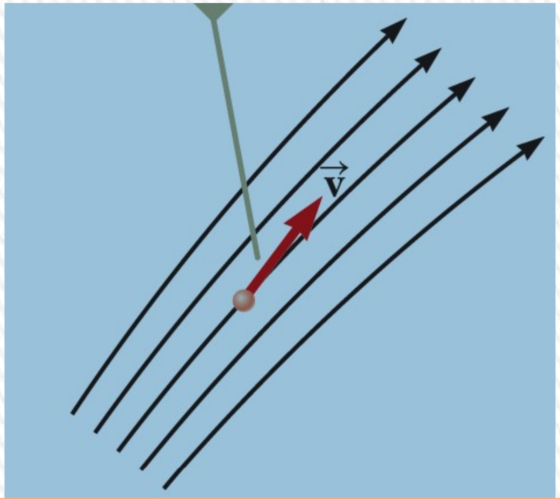


Las líneas de flujo que pasan por el borde de un elemento de área imaginario, como el área *A* forman un tubo llamado **tubo de flujo**.
Si el flujo es estable el fluido no puede cruzar las paredes laterales de un tubo de flujo; los fluidos de diferentes tubos de flujo no pueden mezclarse.

FLUJO DE FLUIDO

Flujo laminar: las capas adyacentes de fluido se deslizan suavemente una sobre otra, y el flujo es estable.





Una partícula en un flujo laminar sigue una línea de corriente.
La velocidad de la partícula siempre es tangente la linea de corriente.

Si la rapidez de flujo es suficientemente alta, o si las superficies de frontera causan cambios abruptos en la velocidad, el flujo puede volverse irregular y caótico (flujo turbulento)

Flujo turbulento: no hay un patrón de estado estable; el patrón de flujo cambia continuamente, se vuelve irregular y caótico.

Características de flujo y de fluido ideal (modelo)

Un fluido en movimiento puede caracterizarse en uno de los dos tipos principales: **flujo laminar, estacionario o estable** en el que cada partícula sigue una trayectoria uniforme y nunca se cruzan, de modo que la velocidad del fluido en cualquier punto se mantiene constante en el tiempo,
y el **flujo turbulento o no estable** en el que surgen torbellinos e irregularidades (ocurre a partir de cierta velocidad crítica).

Modelo de fluido ideal:

- **no viscoso, e**
- **Incompresible.**

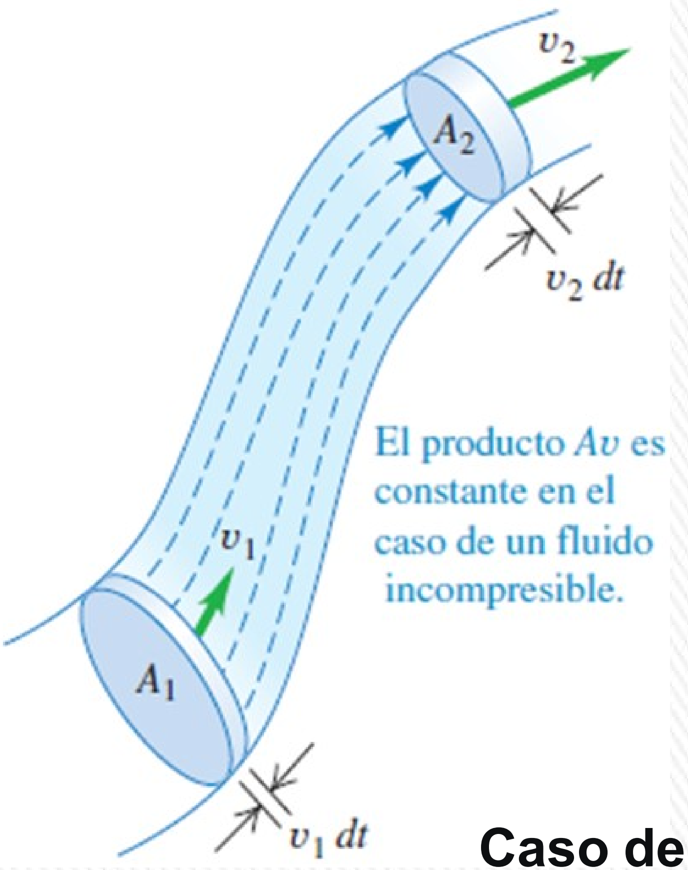
Flujo:

- **estacionario (estable o laminar) , e**
- **irrotacional (no hay momento angular del fluido alrededor de algún punto.)**

FLUJO DE FLUIDO

12.20 El flujo de humo que sale de estas varas de incienso es laminar hasta cierto punto; luego se vuelve turbulento.

ECUACIÓN DE CONTINUIDAD



La masa de un fluido en movimiento no cambia al fluir: lo que conduce a una relación cuantitativa importante llamada **ecuación de continuidad**.

Tubo de flujo entre dos secciones transversales con áreas A_1 y A_2.
v_1 y v_2 son los valores de la rapidez del fluido en estas secciones

No fluye fluido a través de los costados del tubo porque la velocidad del fluido es tangente a la pared en todos sus puntos.

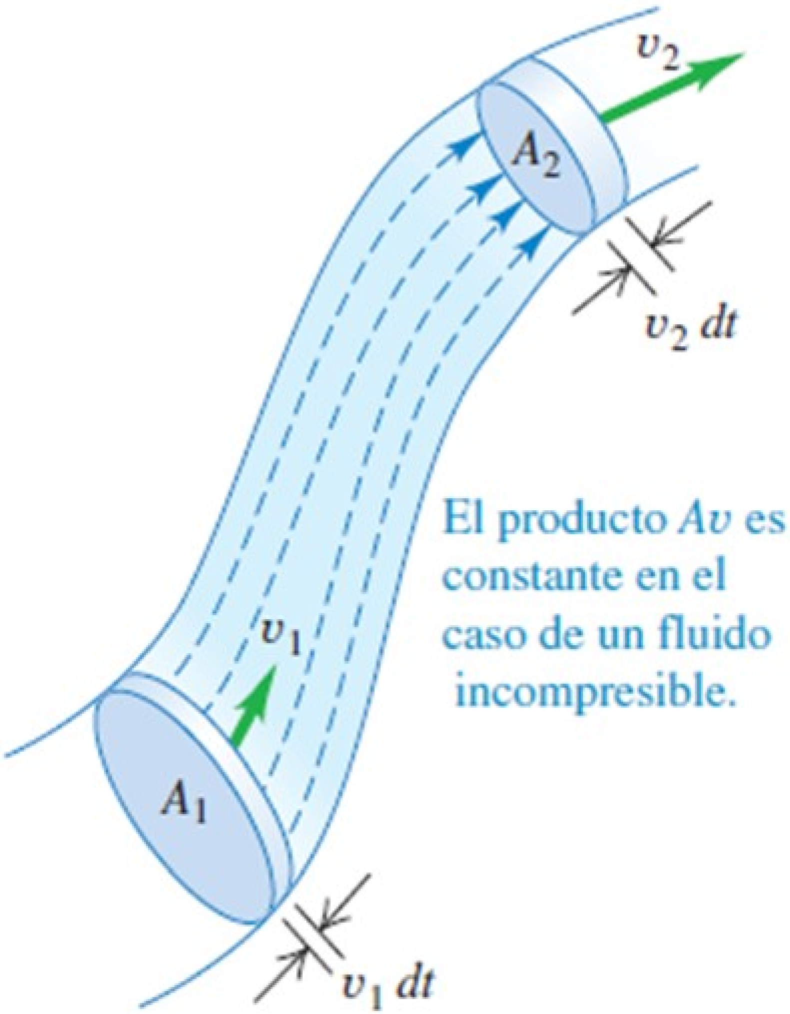
Caso de un fluido incompresible: la densidad ρ tiene el mismo valor en todos los puntos, se prueba que:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

Si el fluido es compresible:

$$\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2$$

ECUACIÓN DE CONTINUIDAD



En un dt, el fluido en A_1 se mueve una distancia $v_l\,dt$, fluye hacia el tubo un cilindro de fluido de volumen $dV_1 = A_1\,v_l\,dt$

En ese dt, un cilindro de volumen $dV_2 = A_2\,v_2\,dt$ sale del tubo a través de A_2.

Caso de un fluido incompresible:
la densidad ρ tiene el mismo valor en todos los puntos.

La masa dm_1 que fluye al tubo por A_1 en el tiempo dt es: $dm_1 = \rho\,A_1\,v_l\,dt$.

La masa dm_2 que sale por A_2 en el mismo tiempo es $dm_2 = \rho\,A_2\,v_2\,dt$.

En flujo estable, la masa total en el tubo es constante, por lo que $dm_1 = dm_2$ y

$$\rho A_1 v_1 dt = \rho A_2 v_2 dt \qquad \boxed{A_1 v_1 = A_2 v_2}$$

ECUACIÓN DE CONTINUIDAD

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

El producto *Av* es la ***rapidez del flujo de volumen o caudal o gasto*** *dV/dt*, la rapidez con que el volumen cruza una sección del tubo:

$$\frac{dV}{dt} = Av$$

La rapidez de flujo de *masa* es el flujo de masa por unidad de tiempo (gasto másico) a través de una sección transversal, y es igual a la densidad *ρ* multiplicada por la rapidez de flujo de volumen *dV/dt*.

El caudal tiene el mismo valor en todos los puntos a lo largo de cualquier tubo de flujo.

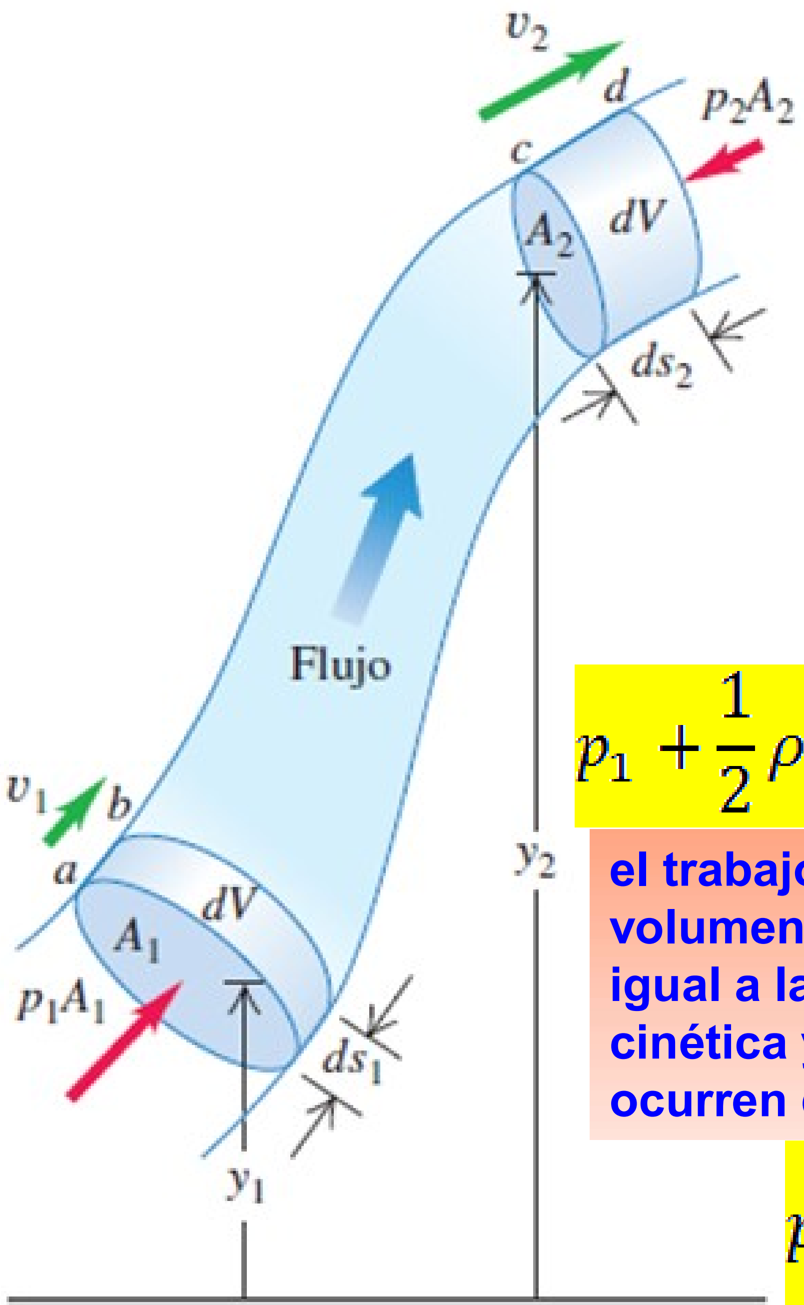
Si la sección transversal de un tubo de flujo disminuye, la rapidez aumenta, y viceversa.

El chorro de agua que sale de un grifo se adelgaza al adquirir rapidez durante su caída, pero *dV/dt* tiene el mismo valor en todo el chorro.

ECUACIÓN DE CONTINUIDAD

Cuando regamos, y tapamos un poco el orificio de salida de la manguera, no estamos aumentando la presión (que siempre es la atmosférica)…
estamos aumentando la rapidez del agua que se rocía conforme el tamano de la abertura disminuye con el pulgar.

ECUACIÓN DE BERNOULLI



Modelo de fluido incompresible y no viscoso y flujo estacionario e irrotacional.

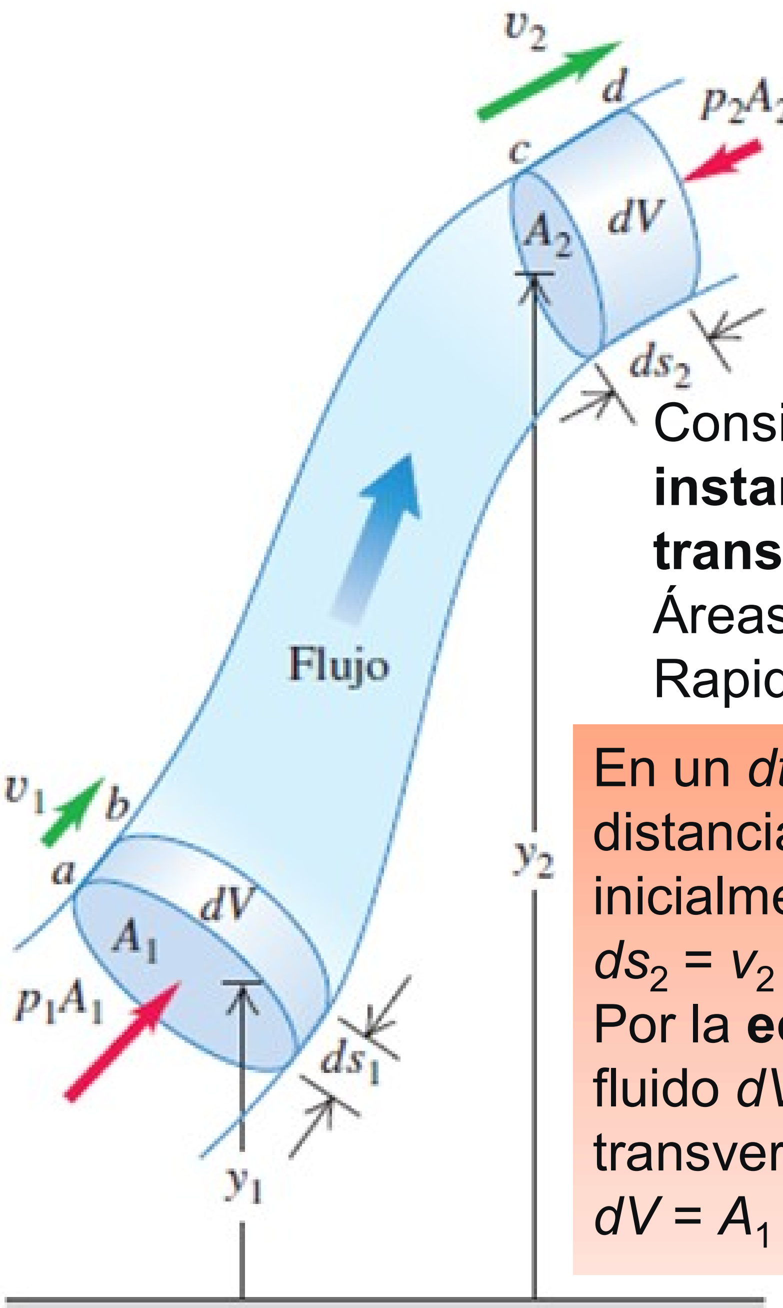
Esta ecuación se prueba si aplicamos **teorema del trabajo y energía** al fluido en una sección de un tubo de flujo (que inicialmente está entre a y c y luego pasa a la sección entre b y d) y usando además la ecuación de continuidad)

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2$$

el trabajo efectuado sobre una unidad de volumen de fluido por el fluido circundante es igual a la suma de los cambios de las energías cinética y potencial por unidad de volumen que ocurren durante el flujo.

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g y = cte.$$

ECUACIÓN DE BERNOULLI (demostración)



Modelo: fluido incompresible y no viscoso y flujo estacionario e irrotacional.

Aplicamos **teorema del trabajo y la energía** al fluido en una sección de un tubo de flujo.

Consideramos **elemento de fluido que en instante inicial está entre las secciones transversales *a* y *c***.

Áreas transversales en extremos son A_1 y A_2.

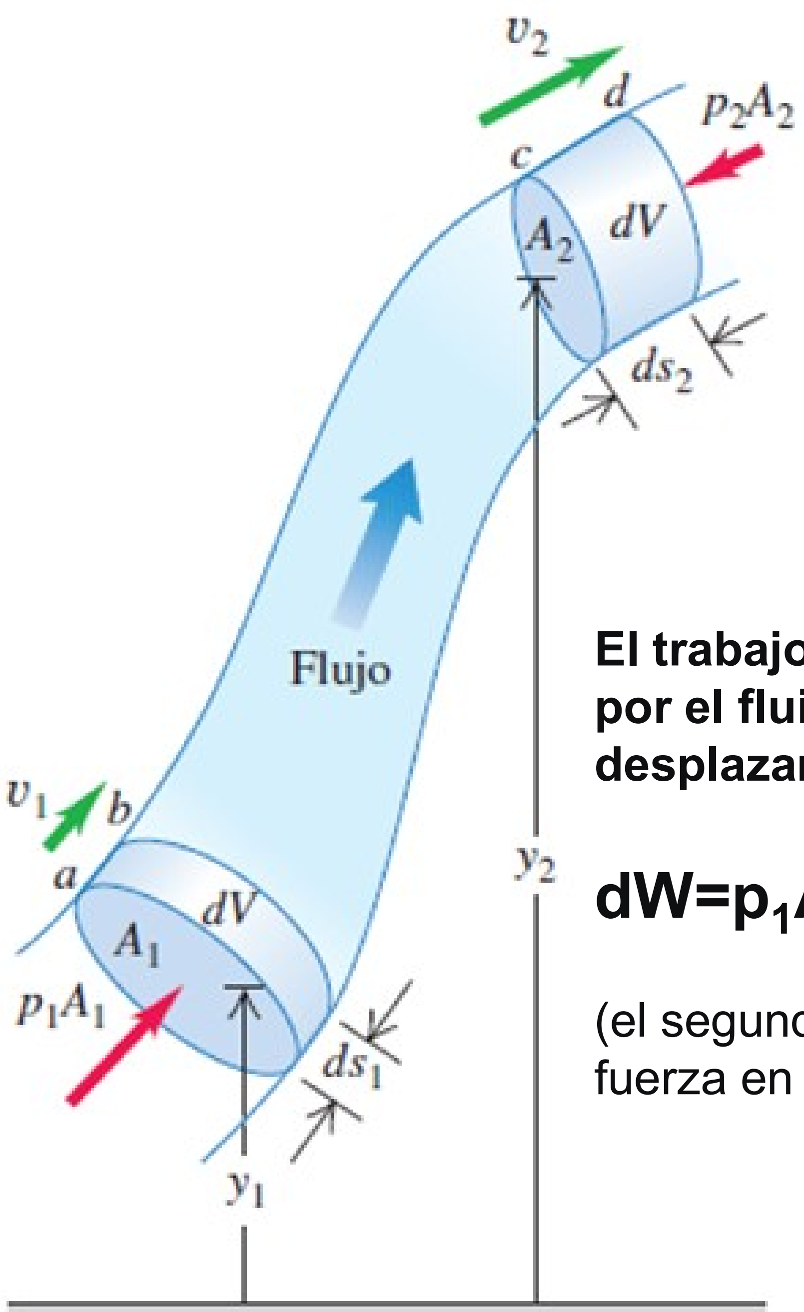
Rapidez en los extremos a y c son v_1 y v_2.

En un *dt*, el fluido se mueve de *a* a *b*, una distancia $ds_1 = v_1\,dt$, y el fluido que está inicialmente en *c* se mueve a *d*, una distancia $ds_2 = v_2\,dt$.

Por la **ecuación de continuidad**, el volumen de fluido *dV* que pasa por *cualquier* sección transversal durante el tiempo *dt* es el mismo.

$dV = A_1\,ds_1 = A_2\,ds_2$.

ECUACIÓN DE BERNOULLI (demostración)



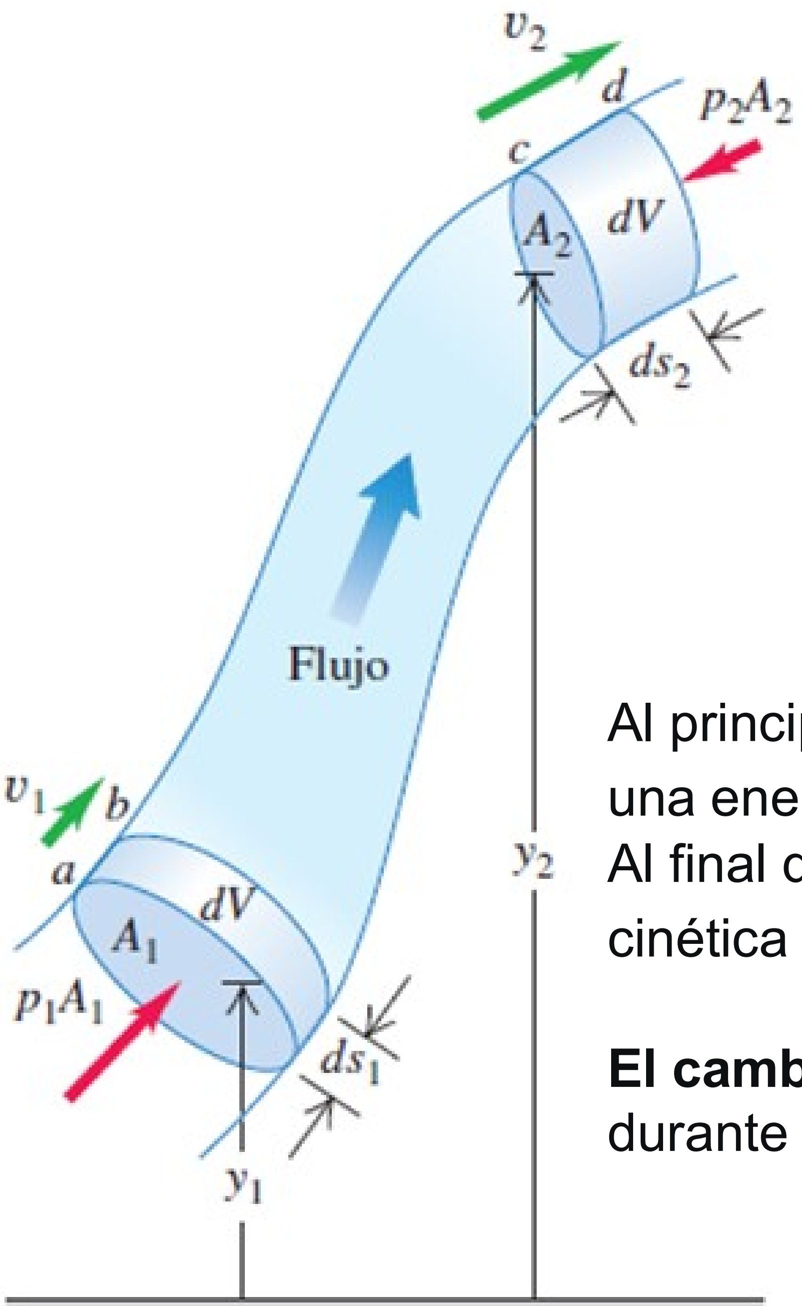
Trabajo efectuado sobre este elemento de fluido durante *dt*.
Como no hay viscosidad **las únicas fuerzas no gravitacionales que efectúan trabajo sobre el elemento fluido se deben a la presión del fluido circundante**.
Las presiones en los extremos son p_1 y p_2; la fuerza sobre la sección transversal en *a* es $p_1 A_1$, y la fuerza en *c* es $p_2 A_2$.

El trabajo neto *dW* efectuado sobre el elemento por el fluido circundante durante este desplazamiento es:

$$dW = p_1 A_1 ds_1 - p_2 A_2 ds_2 = (p_1 - p_2) dV$$

(el segundo término tiene signo negativo porque la fuerza en *c* se opone al desplazamiento del fluido

ECUACIÓN DE BERNOULLI (demostración)



El **trabajo *dW*** se debe a fuerzas distintas de la fuerza de gravedad conservativa, así que es igual al cambio en la energía mecánica total (energía cinética más energía potencial gravitacional) asociada al elemento fluido.

$$dW = dK + dU,$$

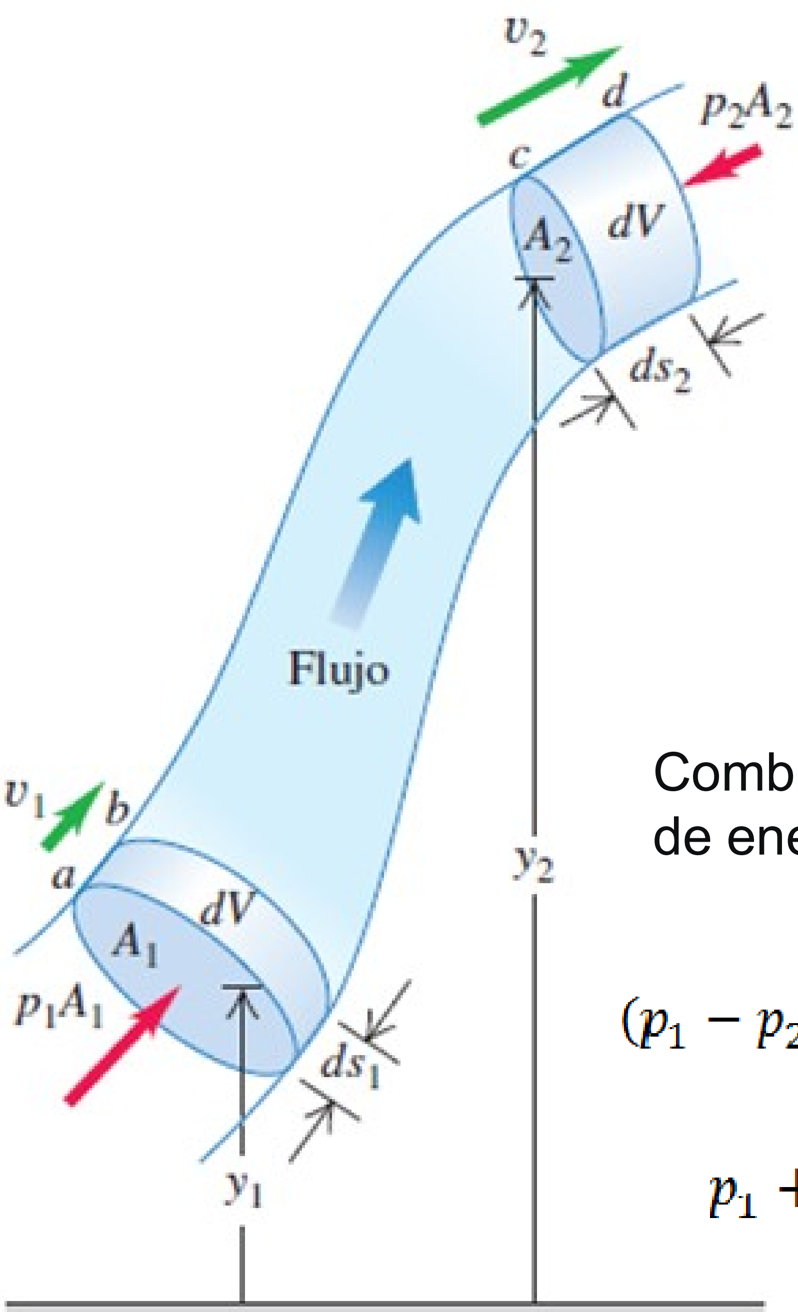
La energía mecánica para el fluido entre las secciones *b* y *c* no cambia.

Al principio de *dt*, el fluido entre *a* y *b* tiene una energía cinética $\frac{1}{2}\rho(A_1 ds_1)v_1^2$.
Al final de *dt*, el fluido entre *c* y *d* tiene energía cinética $\frac{1}{2}\rho(A_2 ds_2)v_2^2$.

El cambio neto de energía cinética *dK* durante *dt* es

$$dK = \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2)dV$$

ECUACIÓN DE BERNOULLI (demostración)



Cambio en la energía potencial gravitacional: al iniciar *dt*, la energía potencial para la masa que está entre *a* y *b* es $dm\, gy_1 = \rho dVgy_1$.
Al final de *dt*, la energía potencial para la masa que está entre *c* y *d* es
$dm\, gy_2 = \rho dV\, gy_2$.
El cambio neto de energía potencial *dU* durante *dt* es:

$$dU = \rho dVg(y_2 - y_1)$$

Combinando las ecuaciones en la ecuación de energía: $dW = dK + dU$, obtenemos

$$(p_1 - p_2)dV = \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2)dV + \rho g(y_2 - y_1)dV$$

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2$$

ECUACIÓN DE BERNOULLI

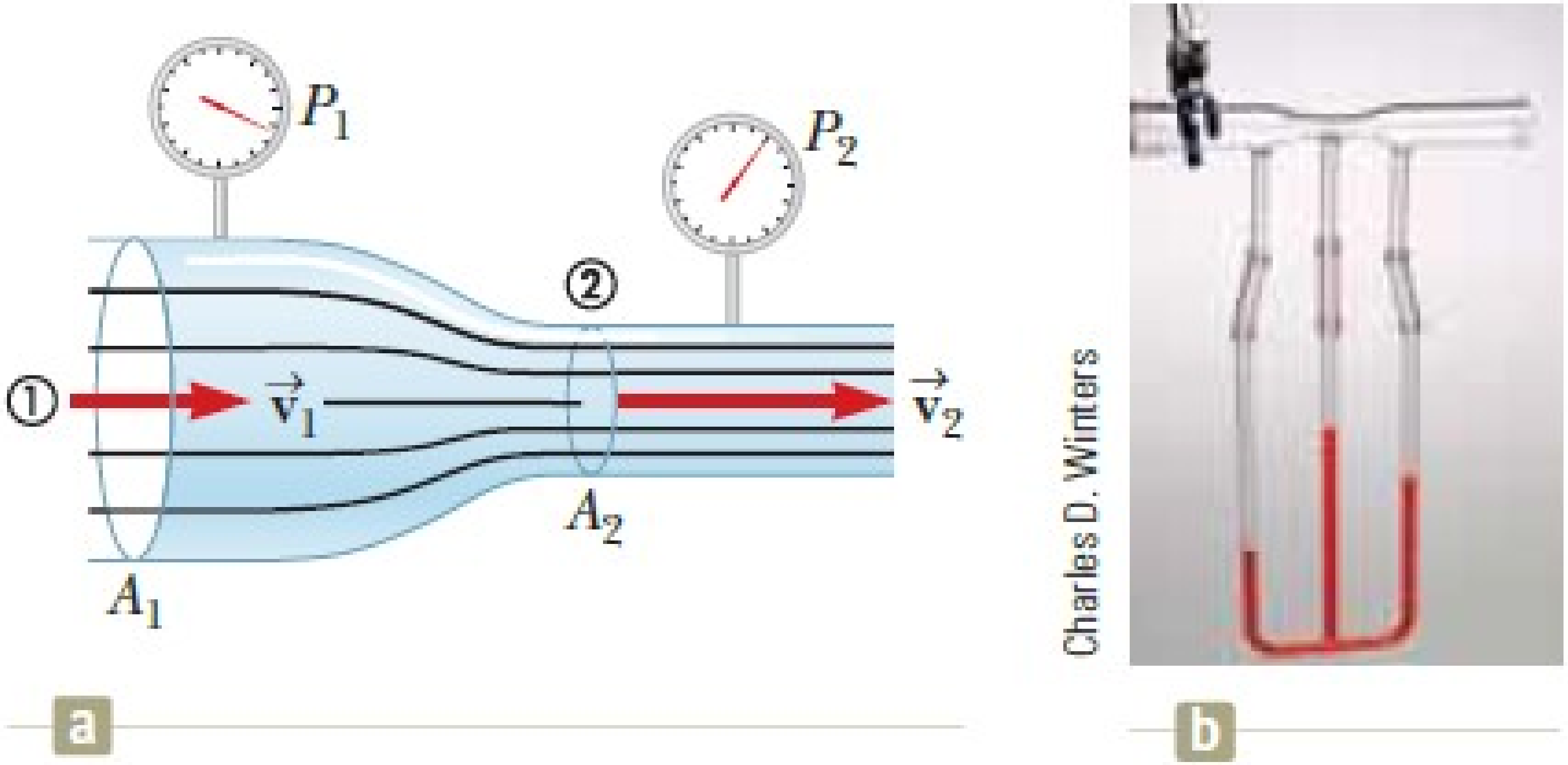
$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2$$

Esta es la **ecuación de Bernoulli**, y dice que **el trabajo efectuado sobre una unidad de volumen de fluido por el fluido circundante es igual a la suma de los cambios de las energías cinética y potencial por unidad de volumen que ocurren durante el flujo**.

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g y = cte.$$

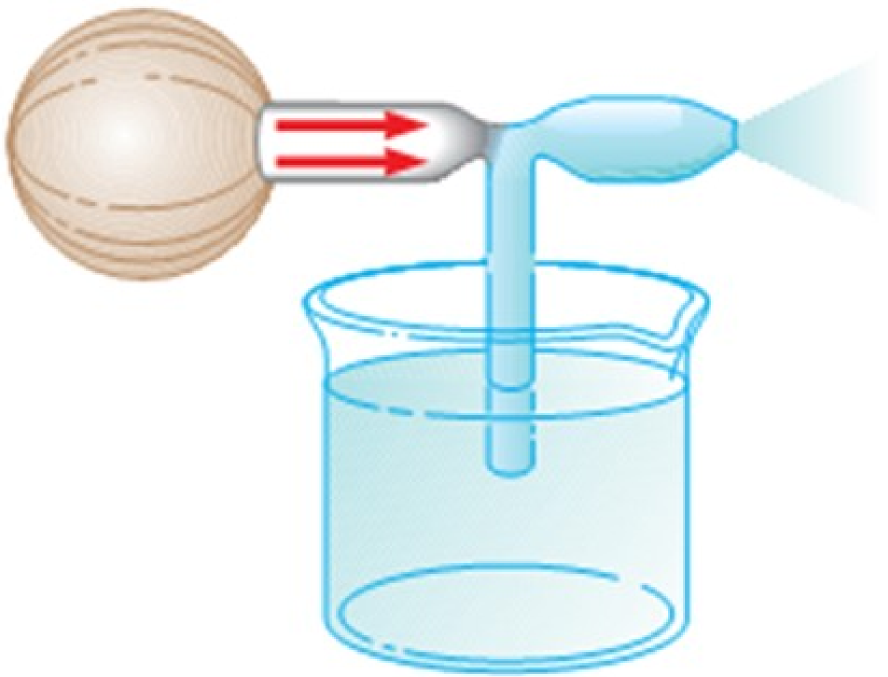
Observar que si el fluido *no* se mueve (de manera que $v_1 = v_2 = 0$), la ecuación se reduce a la relación de presión que se dedujo para un fluido en reposo.

El tubo Venturi



a) La presión *P1 es mayor* que la presión *P2 porque v1 < v2.*
Este dispositivo se utiliza para medir la rapidez del flujo de fluido.
b) Un tubo Venturi: el aire se sopla a través del tubo desde la izquierda. El mayor nivel de fluido en la columna de en medio muestra que la presión en lo alto de la columna, que esta en la región estrecha del tubo Venturi, es menor.

La máquina de Flit o pulverizador

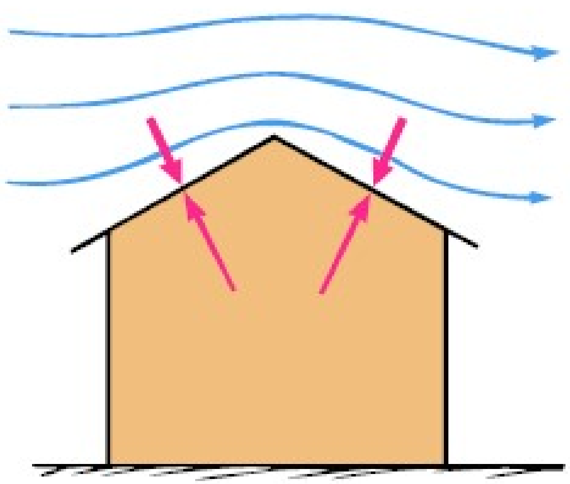


Un flujo de aire que pasa sobre un tubo sumergido en un líquido, hace que éste suba por el tubo. Este efecto es usado en botellas de perfume y en rociadores de pintura e insecticidas.

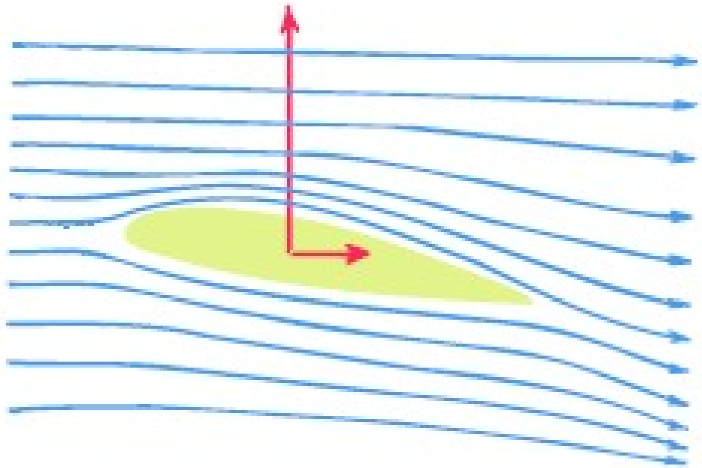
Una corriente de aire que pasa sobre un tubo abierto reduce la presión arriba del tubo, lo que hace que el líquido suba en la corriente de aire. El líquido es entonces dispersado en una fina nube de pequeñas gotas.

El mismo principio es usado en el **carburador** de una moto. En este caso, la región de baja presión del carburador es producida por un aire succionado por el émbolo a través del filtro de aire. La gasolina se evapora, se mezcla con el aire y entra al cilindro del motor donde se produce la combustión.

Aplicaciones de la ecuación de Bernoulli



La presión del aire arriba del techo es menor que la presión del aire abajo del techo.

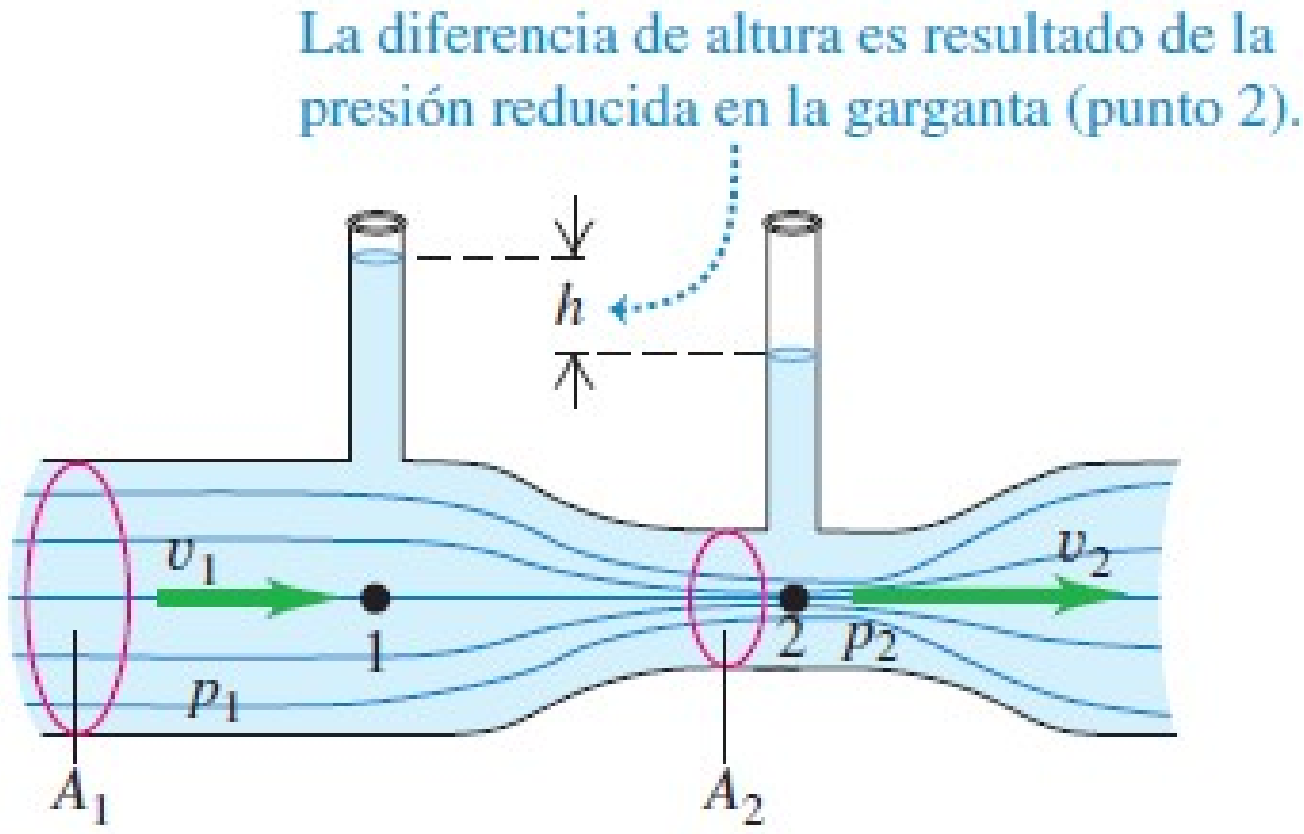


El vector vertical representa la fuerza ascendente neta (sustentación) que resulta de mayor presión de aire bajo el ala que arriba del ala. El vector horizontal representa el arrastre aerodinámico.

En ambos casos, una mayor presión por abajo empuja el techo o el ala hacia una región de menor presión arriba. El aire se hace fluir más rápido sobre la superficie superior del ala que bajo su superficie inferior.,
El resultado son líneas de corriente más apiñadas a lo largo de la superficie superior del ala que a lo largo de la parte inferior.

Ejemplo: El medidor Venturi

La figura muestra un *medidor Venturi*, que se usa para medir la rapidez de flujo en un tubo. Deduzca una expresión para la rapidez de flujo v_1 en términos de las áreas transversales A_1 y A_2 y la diferencia de altura h del líquido en los dos tubos verticales.



Asumo que el fluido y el flujo son tales que puedo aplicar la ecuación de Bernoulli

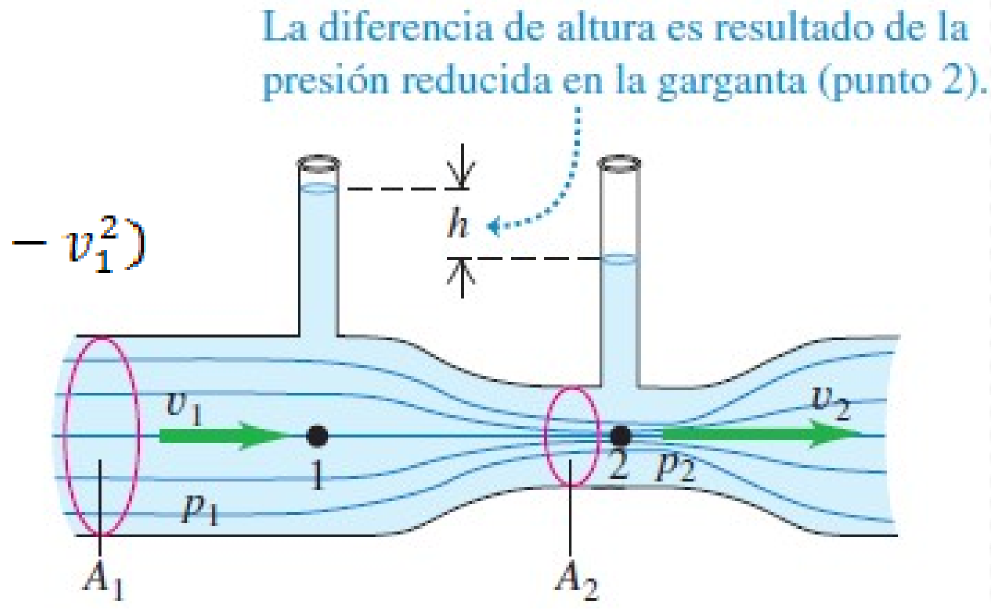
$$p_1 + \rho g y_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g y_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

Los dos puntos tienen la misma coordenada vertical ($y_1 = y_2$),

Ejemplo 12.9 : El medidor Venturi

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 - \frac{1}{2}\rho v_1^2 = \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2)$$



De acuerdo con la ecuación de continuidad : $v_1A_1 = v_2A_2$

$v_2 = (A_1/A_2)v_1$.

Al sustituir y reordenar, obtenemos

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho\left(\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 v_1^2 - v_1^2\right) = \frac{1}{2}\rho v_1^2\left(\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 - 1\right)$$

Como: $p_1 = p_0 + \rho g h_1$ y $p_2 = p_0 + \rho g h_2$ y por tanto: $p_1 - p_2 = \rho g(h_1 - h_2) = \rho g h$

$$\rho g h = \frac{1}{2}\rho v_1^2\left(\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 - 1\right)$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{2gh}{\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 \quad 1}}$$

Ejemplo: ejercicio 7.7

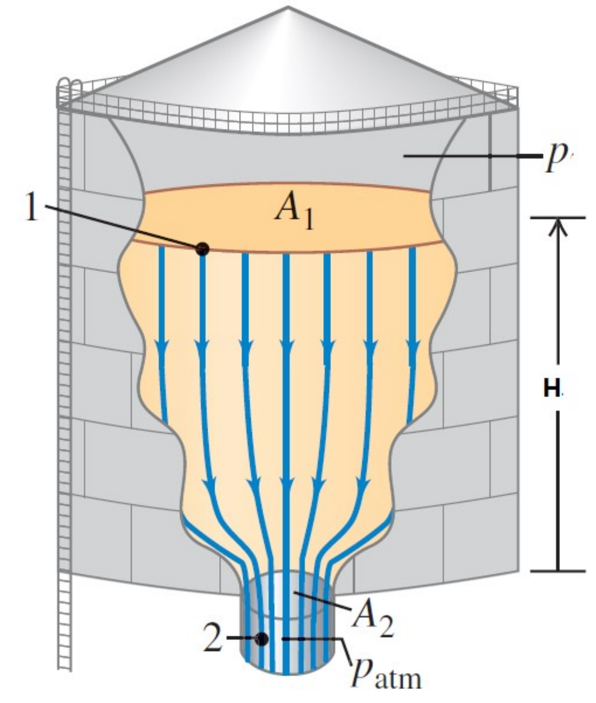
Un tanque contiene un líquido de densidad ρ, y tiene un pequeño orificio a una altura h de la base del tanque. El aire en la parte superior del tanque se mantiene a una presión P. Determinar la velocidad con la cual sale el líquido por el orificio cuando el nivel del líquido está a una distancia H sobre el orificio para el caso en que:

a) La sección del orificio A_2 es mucho menor que la sección del tanque A_1 ($A_2 << A_1$)
b) $A_2 << A_1$ y además $P = P_{atm}$ (este caso se conoce como ley de Torricelli)
c) Considere ahora que $A_1 = N A_2$ y $P = P_{atm}$.
d) Suponga que el tanque está abierto a la atmósfera, H inicialmente es de 1,00 m, el orificio está en el fondo del tanque y $A_1 = 400 A_2$. ¿Cuánto vale la velocidad de salida?

Voy a considerar que se cumplen las condiciones para aplicar la ecuación de Bernoulli.
Los puntos 1 está en la superficie del líquido y a la presión $P = p_1$ el 2 en la salida y a la atmosférica, p_{atm}.
Tomo $y = 0$ en el tubo de salida, así que $y_1 = H$ e $y_2 = 0$.

Aplico Bernoulli entre 1 y 2:

$$p_1 + \rho g y_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g y_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$



Ejemplo: ejercicio 7.7

$$p_1 + \rho g y_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g y_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

$$(p_1 - p_2) + (\rho g y_1 - \rho g y_2) = \frac{1}{2}\rho v_2^2 - \frac{1}{2}\rho v_1^2$$

$$(p_1 - p_{atm}) + \rho g (y_1 - y_2) = \frac{1}{2}\rho (v_2^2 - v_1^2)$$

$$(p_1 - p_{atm}) + \rho g H = \frac{1}{2}\rho v_2^2 \left(1 - \frac{v_1^2}{v_2^2}\right)$$

Por la ecuación de continuidad: $A_1 v_1 = A_2 v_2$

por lo que: $v_1/v_2 = A_2/A_1$

$$(p_1 - p_{atm}) + \rho g H = \frac{1}{2}\rho v_2^2 \left(1 - \frac{A_2^2}{A_1^2}\right)$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2\left((p_1 - p_{atm}) + \rho g H\right)}{\rho\left(1 - \frac{A_2^2}{A_1^2}\right)}}$$

a) La sección del orificio A_2 es mucho menor que la sección del tanque A_1 ($A_2 << A_1$) . Entonces: $\frac{A_2^2}{A_1^2} \cong 0$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2\left((p_1 - p_{atm}) + \rho g H\right)}{\rho}} = \sqrt{2\left(\frac{p_1 - p_{atm}}{\rho}\right) + gH}$$

Ejercicio 7.7

b) $A_2 << A_1$ y además $P = P_{atm}$ (este caso se conoce como ley de Torricelli): $p=p_1=p_{atm}$, por lo que $p_1-p_{atm} = 0$

$$v_2 = \sqrt{2gH}$$

c) Considere ahora que $A_1 = N\,A_2$ y $P = P_{atm}$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2gH}{\left(1-\frac{1}{N^2}\right)}}$$

d) Suponga que el tanque está abierto a la atmósfera, H inicialmente es de 1,00 m, el orificio está en el fondo del tanque y $A_1 = 400\,A_2$. ¿Cuánto vale la velocidad de salida

$$v_2 = \sqrt{\frac{2gH}{\left(1-\frac{1}{N^2}\right)}} = \sqrt{\frac{2(9{,}80)(1{,}00)}{\left(1-\frac{1}{400^2}\right)}} = \sqrt{\frac{19{,}6}{0{,}99999375}} = 4.43\ m/s$$

Ejemplo: ejercicio 7.9

Tintín y el profesor Tornasol se encuentran en un camarote bajo la cubierta de un barco. En dicho compartimiento hay un agujero de 1,20 cm^2 por el que ingresa el agua del mar. Tintín controla que un balde de 10 litros se llena exactamente en 8,30 s. El profesor Tornasol, luego de ciertos cálculos expresa: "considerando que el camarote está a la presión atmosférica y despreciando los efectos de contracción del chorro por el borde del agujero, el agujero se encuentra a una profundidad por debajo del nivel del mar de..." (complete la frase).

Datos: A= 1,20 cm^2=1,20×10^{-4} m^2; V= 10,0 L = 1,00×10^{-2} m^3; Δt = 8,30 s

Puedo determinar el caudal Q: $Q = \frac{V}{\Delta t} = \frac{1{,}00\times10^{-2}}{8{,}30} =$ 1,2048×10^{-3} m^3/s

Y a partir de Q, sabiendo el área del agujero puedo determinar la rapidez con que está ingresando el agua, ya que Q= A.v

$$v = \frac{Q}{A} = \frac{1{,}2048\times10^{-3}}{1{,}20\times10^{-4}} = \text{ } 10{,}040 \text{ m/s}$$

Y ahora puedo aplicar la ley de Torricelli $v = \sqrt{2gh}$

$$h = \frac{v^2}{2g} = \frac{(10{,}040)^2}{2(9{,}8)} = \text{ } 5{,}143 \text{ m}$$

h =5,1 m