a) $K_\mu F^{\mu\nu} = \begin{cases} \nu=0 \ : & K_i F^{i0} = -\dfrac{\vec{K}\cdot\vec{E}}{c} \\ \nu=i \ : & K_0 F^{0i} + K_j F^{ji} = -\dfrac{\omega}{c}\dfrac{E^i}{c} + \vec{K}_j\, \varepsilon^{jil} B_l = \left(-\dfrac{\omega}{c^2}\vec{E} - \vec{K}\times\vec{B}\right)^i \end{cases}$

$K_\mu G^{\mu\nu} = \begin{cases} \nu=0 \ : & K_i G^{i0} = -\vec{K}\cdot\vec{B} \\ \nu=i \ : & K_0 G^{0i} + K_j G^{ji} = \underline{-\dfrac{\omega}{c} B^i + \vec{K}_j\, \varepsilon^{jil}\left(\dfrac{-E_l}{c}\right)} = \left(-\dfrac{\omega}{c}\vec{B} + \vec{K}\times\dfrac{\vec{E}}{c}\right)^i \end{cases}$

b) $x^\mu = (ct, \vec{x})$ es un cuadrivector $\Rightarrow$ $x'^\nu = \Lambda^\nu{}_\mu x^\mu$ con x' el trasformado de x bajo la T. de Lorentz Λ

- $K_\mu x^\mu = -\frac{\omega}{c}ct + \vec{K}\cdot\vec{x}$ es la fase de la onda EM y es invariante baje T. de Lorentz $\Rightarrow K'_\nu x'^\nu = K_\mu x^\mu \Rightarrow$

$\Rightarrow K'_\nu x'^\nu = K_\mu (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu x'^\nu \ \forall x' \Rightarrow \boxed{K'_\nu = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu K_\mu} \Rightarrow K_\mu$ transforma como vector co-variante y luego K^μ transforma como 4-vector

Ahora
- $K'_\mu F'^{\mu\nu} = \overline{(\Lambda^{-1})^\sigma{}_\mu} K_\sigma \overline{\Lambda^\mu{}_\alpha} \Lambda^\nu{}_\rho F^{\alpha\rho} = \delta^\sigma{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\rho K_\sigma F^{\alpha\rho} = \underline{\Lambda^\nu{}_\rho} K_\alpha F^{\alpha\rho}$ tranforma como 4-vector
- $G^{\mu\nu}$ tranforma igual que $F^{\mu\nu}$ y por tanto $K_\mu G^{\mu\nu}$ también transforma como 4-vector.

c) En una onda mocromática plana

$$\vec{K} \times \vec{B} = -\frac{\omega}{c}\vec{E}/c \quad (\text{Ampere})$$

$$\vec{K} \times \vec{E} = \omega \vec{B} \quad (\text{Faraday}) \qquad \text{con} \quad |\vec{K}| = \frac{\omega}{c}$$

$$\vec{K} \cdot \frac{\vec{E}}{c} = \vec{K} \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{Gauss})$$

$$\Rightarrow \quad K_\mu F^{\mu 0} = -\frac{\vec{K} \cdot \vec{E}}{c} = 0 \qquad \Bigg| \qquad K_\mu G^{\mu 0} = -\vec{K} \cdot \vec{B} = 0$$

$$K_\mu F^{\mu i} = \left(-\frac{\omega}{c^2}\vec{E} - \vec{K} \times \vec{B}\right)^i = 0 \qquad \Bigg| \qquad K_\mu G^{\mu i} = \left(-\frac{\omega}{c}\vec{B} + \vec{K} \times \frac{\vec{E}}{c}\right)^i = 0$$

d) Dado que $K_\mu F^{\mu\nu}$ y $K_\mu G^{\mu\nu}$ transforman como 4-vectores y son cero en un sistema de referencia inercial $\mathcal{O}$ entoces son cero en cualquier otro sistema $\mathcal{O}'$ relacionado con $\mathcal{O}$ mediante una transformación de Lorentz (las T. de Lorentz son transformaciones lineales). Así

- También: $|\vec{K}'|^2 - \left(\frac{\omega'}{c}\right)^2 = K'^\mu K'_\mu = K^\mu K_\mu = |\vec{K}|^2 - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 = 0$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{|\vec{K}'| = \omega'/c}$$

- $K'_\mu F'^{\mu\nu} = \boxed{-\frac{\vec{K}' \cdot \vec{E}'}{c} = 0}$, • $K'_\mu G'^{\mu\nu} = \boxed{-\vec{K}' \cdot \vec{B}' = 0}$

- $K'_\mu F'^{\mu i} = \boxed{\left(-\frac{\omega'}{c^2}\vec{E}' - \vec{K}' \times \vec{B}'\right)^i = 0}$, • $K'_\mu G'^{\mu i} = \boxed{\left(-\frac{\omega'}{c}\vec{B}' + \vec{K}' \times \frac{\vec{E}'}{c}\right)^i = 0}$

Entonces E' , B' y k' forman una terna de vectores ortogonales con idénticas relaciones a E,B y k.