Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Cálculo diferencial e integral I
Primer semestre 2022

Examen teórico: julio de 2022

Nombre: ....

1. Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función y $[a, b]$ un intervalo, donde a, b son números reales tales que $a < b$.

(a) Indicar si alguna de las afirmaciones abajo es **falsa** y, en ese caso, dar un ejemplo que corrobore lo indicado.

  (i) Si f es integrable en $[a, b]$, entonces es continua en $[a, b]$.

  (ii) Si f es continua en $[a, b]$, entonces es integrable en $[a, b]$.

(b) Probar que si $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una primitiva de f, entonces $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

2. Sean $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ dos series de términos positivos.

(a) Explique qué significa que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sea divergente.

(b) Demuestre que si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es divergente $a_n \geq b_n$ para todo n, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente.

(c) Demuestre que la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ es divergente.