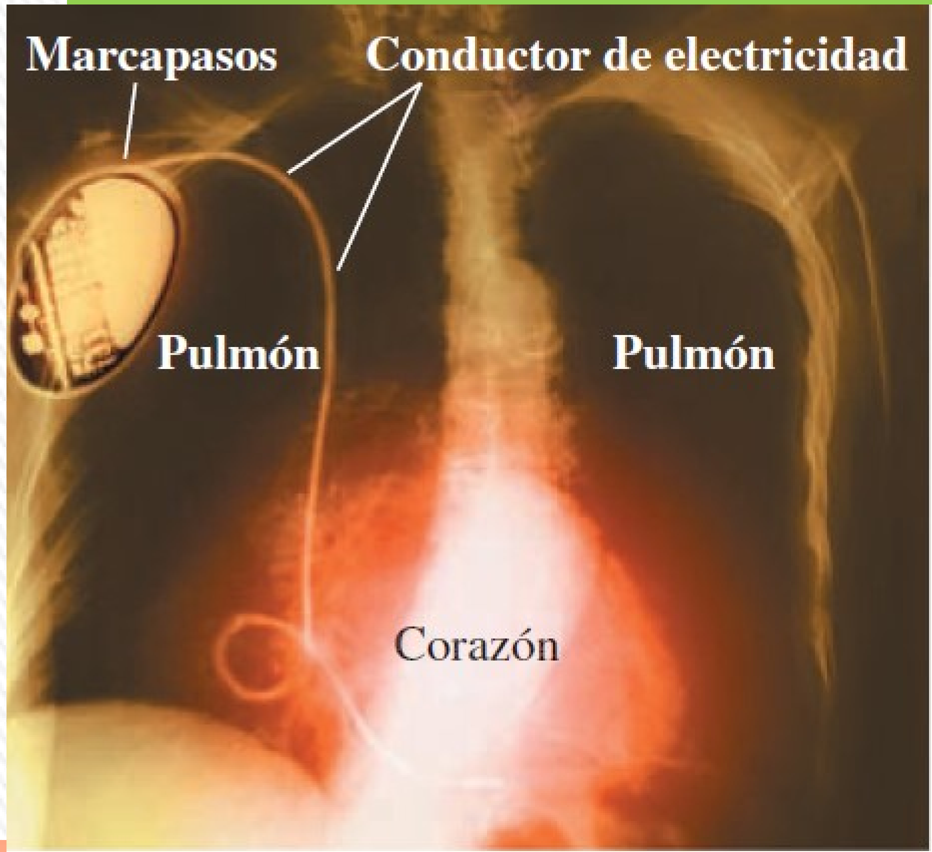
2.4- CIRCUITOS RC



Marcapasos y capacitores Esta radiografía muestra un marcapasos implantado en un paciente con problemas de funcionamiento en el nódulo sinoatrial, la parte del corazón que genera la señal eléctrica que provoca los latidos del corazón. El circuito del marcapasos contiene una batería, un capacitor y un interruptor controlado porcomputadora. Para mantener los latidos regulares, el interruptor descarga el capacitor una vez por segundo y envía unpulso eléctrico al corazón. Luego, el interruptor se abre para permitir la recarga del capacitor para el siguiente pulso.

CIRCUITOS RC

En los circuitos en que las fem y las resistencias son *constantes* (independientes del tiempo), los potenciales, las corrientes y las potencias también son independientes del tiempo.

Pero en la carga o descarga de un capacitor se tiene una situación en la que las corrientes, los voltajes y las potencias *sí* cambian con el tiempo.

Muchos dispositivos incorporan circuitos en los que un capacitor se carga y descarga consecutivamente: semáforos intermitentes, luces de emergencia de los automóviles y unidades de flash electrónico, marcapasos…

CIRCUITOS RC – Carga de un capacitor

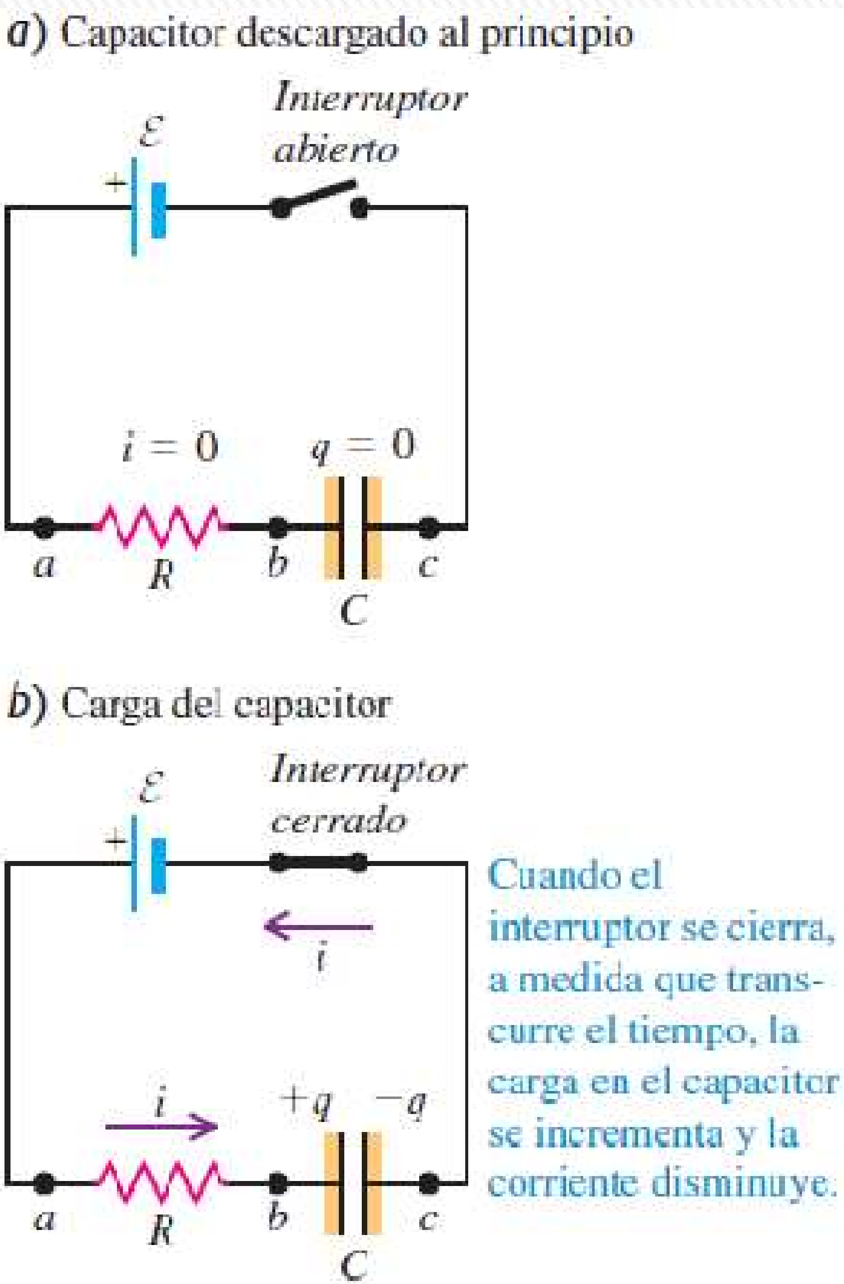
Un circuito que tiene un resistor y un capacitor conectados en serie, se llama **circuito *R*-*C***.

Se considera una batería ideal con una fem Ɛ constante y se desprecia la resistencia de todos los conductores de conexión.

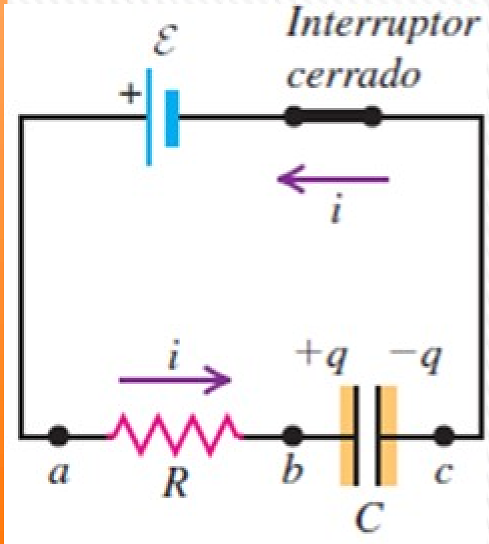
Inicialmente el capacitor está descargado, después, en $t = 0$, se cierra el interruptor, lo que completa el circuito y permite que la corriente alrededor del circuito comience a cargar el capacitor.

A los efectos prácticos, la corriente aparece en el mismo instante en todas las partes conductoras del circuito, y en todo momento la corriente es la misma en todas ellas.

Como el capacitor en $t = 0$ está descargado, la diferencia de potencial $v_{bc}=0$, y el voltaje v_{ab} a través del resistor R es igual a la fem Ɛ; y la corriente inicial a través del resistor, $I_0 = v_{ab}/R = \mathcal{E}/R$.



CIRCUITOS RC – Carga de un capacitor



A medida que el capacitor se va cargando, su voltaje v_{bc} aumenta, mientras que el voltaje del resistor v_{ab}, disminuye, cumpliéndose que: $\mathcal{E} = v_{ab} + v_{bc}$.

Sea q la carga del capacitor e i la corriente del circuito.

Luego de un cierto tiempo, el capacitor se termina de cargar, $i = 0$, por lo que $v_{ab} = i.R = 0$, y $v_{bc} = \mathcal{E}$.

Las diferencias de potencial instantáneas valen:

$v_{ab} = i.R = 0$, y $v_{bc} = q/C$.

Con la regla de Kirchhoff de las mallas, se obtiene

$$\mathcal{E} - i.R - \frac{q}{C} = 0$$

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} - \frac{q}{RC}$$

En $t = 0$, cuando el interruptor se encuentra cerrado, el capacitor está descargado y $q = 0$. Al sustituir $q = 0$ se encuentra que la corriente *inicial* está dada por $I_0 = \mathcal{E}/R$.

A medida que la q *aumenta*, el término q/RC *crece* y la carga del capacitor q tiende a su valor final (Q_f), la corriente i disminuye y finalmente se vuelve cero.

Cuando $i = 0$:

$$Q_f = \mathcal{E}C$$

como se observa, no depende de R

CIRCUITOS RC – Carga de un capacitor

$$\boxed{\mathcal{E} - iR - \frac{q}{C} = 0}$$

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} - \frac{q}{RC}$$

Vamos a resolver esta ecuación diferencial

Como: $i = \frac{dq}{dt}$ se tiene que: $\frac{dq}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{R} - \frac{q}{RC} = -\frac{1}{RC}(q - C\mathcal{E})$ $\qquad \frac{dq}{q - C\mathcal{E}} = -\frac{dt}{RC}$

Para integrar ambos miembros podemos cambiar las variables de integración a *q'* y *t'* con la finalidad de utilizar *q y t para los límites superiores.*
Los límites inferiores son q = 0 y t = 0:

$$\int_0^q \frac{dq'}{q' - \mathcal{E}C} = -\int_0^t \frac{1}{RC}dt' = -\frac{1}{RC}\int_0^t dt' \qquad \ln(q' - \mathcal{E}C)\Big|_0^q = -\frac{t'}{RC}\Big|_0^t$$

$$\ln\left(\frac{q - \mathcal{E}C}{-\mathcal{E}C}\right) = -\frac{t}{RC} \Rightarrow \frac{q - \mathcal{E}C}{-\mathcal{E}C} = e^{-\frac{t}{RC}} \qquad q - \mathcal{E}C = -\mathcal{E}Ce^{-\frac{t}{RC}}$$

$$q = \mathcal{E}C - \mathcal{E}Ce^{\frac{t}{RC}} \qquad \boxed{q(t) = \mathcal{E}C\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) = Q_f\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)}$$

Circuito *R-C*, con capacitor cargándose:

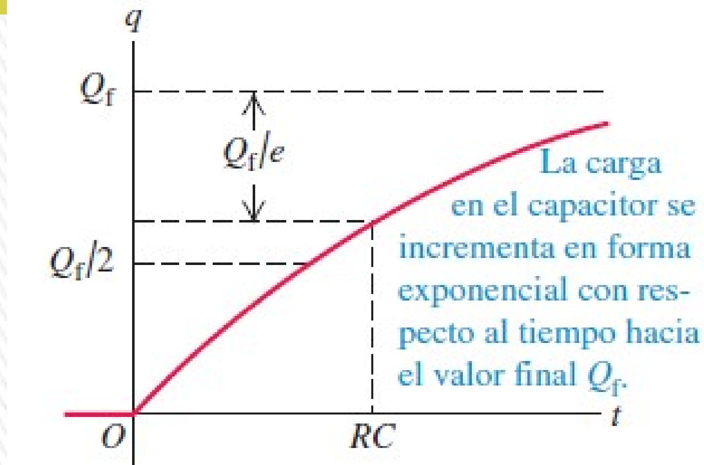
Carga del capacitor · Capacitancia · Carga final del capacitor $= C\mathcal{E}$

$$q = C\mathcal{E}(1 - e^{-t/RC}) = Q_f(1 - e^{-t/RC})$$

fem de la batería · Tiempo transcurrido desde el cierre del interruptor · Resistencia

CIRCUITOS RC – Carga de un capacitor

$$q(t) = \mathcal{E}C\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) = Q_f\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

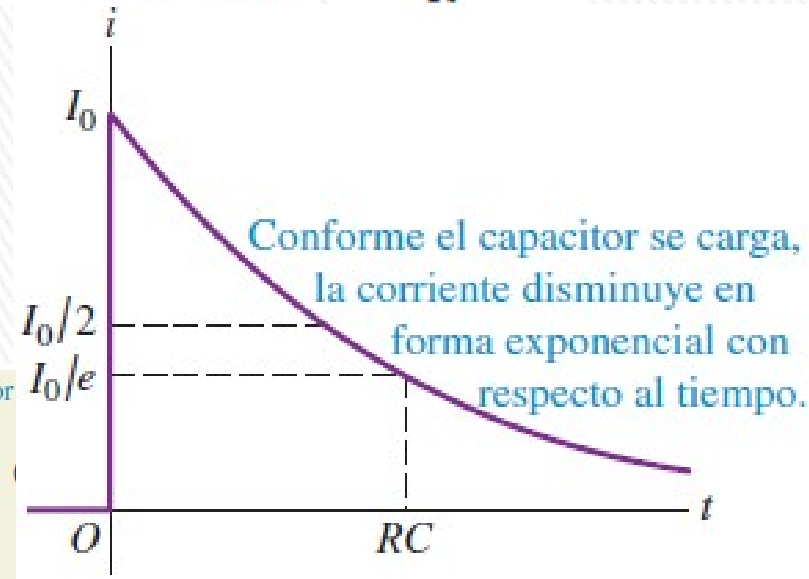


La carga del capacitor comienza en cero y poco a poco se acerca al valor final $Q_f = C\mathcal{E}$.

La corriente instantánea *i es la derivada con respecto al tiempo:*

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\mathcal{E}C\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)\right) = \mathcal{E}C\left(-e^{-\frac{t}{RC}}\right)\left(-\frac{1}{RC}\right) = \frac{\mathcal{E}}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R}e^{-\frac{t}{RC}} = I_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$



Cuando el interruptor se cierra ($t = 0$), la corriente pasa de cero a su valor inicial $I_0 = \mathcal{E}/R$; después de eso, tiende gradualmente a cero.

Circuito *R-C*, capacitor que se carga:

Corriente — fem de la batería — Tiempo transcurrido desde el cierre del interruptor

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{R}e^{-t/RC} = I_0 e^{-t/RC}$$

Corriente inicial $= \mathcal{E}/R$

Tasa de cambio de la carga del capacitor — Resistencia — Capacitancia

CIRCUITOS RC – Carga de un capacitor

Constante de tiempo - Después de un tiempo igual a *RC* *(t=RC):*

$$i(t=RC) = I_0 e^{-\frac{t}{RC}} = I_0 e^{-\frac{RC}{RC}} = I_0 e^{-1} = I_0 \frac{1}{e}$$

$$q(t=RC) = Q_f\left(1 - e^{-\frac{RC}{RC}}\right) = Q_f(1 - e^{-1}) = Q_f\left(1 - \frac{1}{e}\right)$$

la corriente ha disminuido a 1/e (alrededor de 0,368) de su valor inicial, y la carga del capacitor ha alcanzado (1 – 1/*e) = 0,632 de su valor final* $Q_f = C\mathcal{E}$.
Por lo tanto, el producto RC es una medida de la rapidez con que se carga el capacitor.
El término *RC recibe el nombre* de **constante de tiempo, o tiempo de relajación,** del circuito, y se denota con **τ**:

$$\tau = RC$$

Cuando τ es pequeña, el capacitor se carga con rapidez; cuando es grande, el proceso de carga toma más tiempo.
Si la resistencia es pequeña, es fácil que fluya la corriente y el capacitor se carga rápido.
Si *R está en ohms y C en farads, τ está en segundos.*

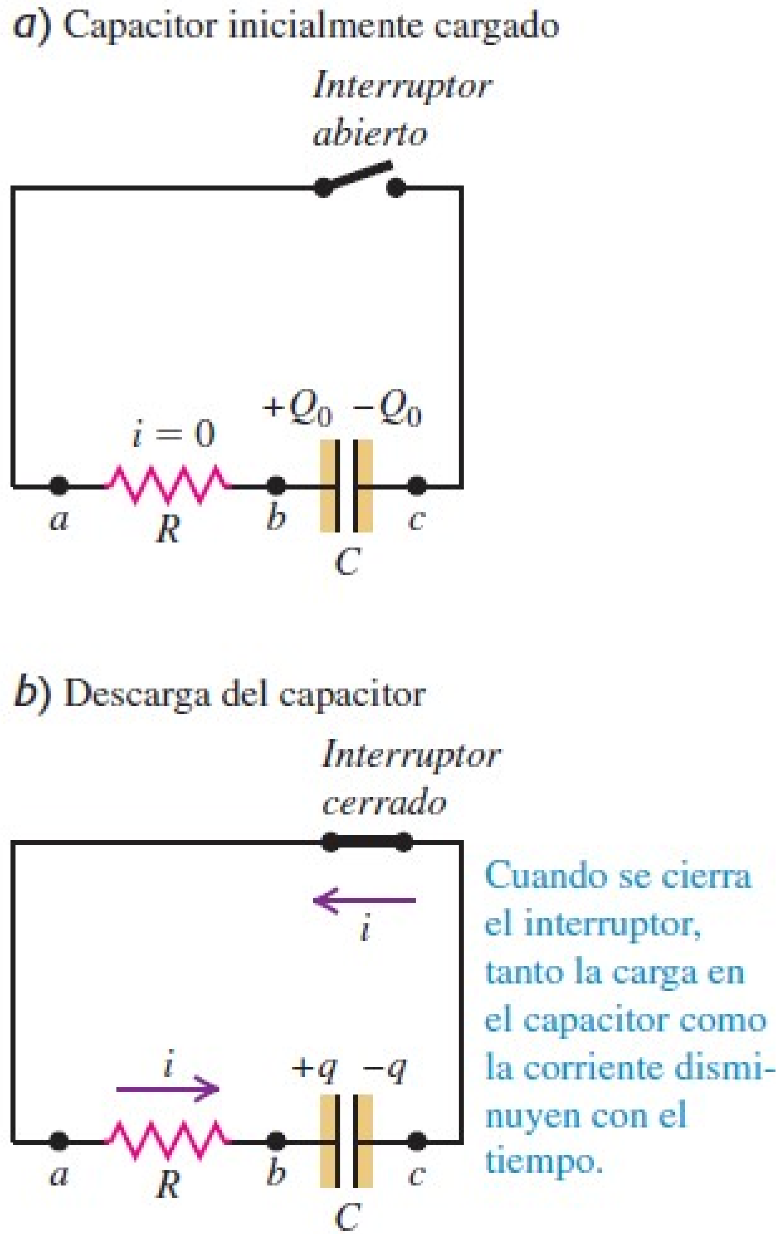
En un intervalo de tiempo 2τ la corriente desciende a $i(2\tau) = I_0 e^{-2} = 0{,}135 I_0$;
en 3τ: $i(3\tau) = I_0 e^{-3} = 0{,}0498 I_0$
en 10τ: $i(10\tau) = I_0 e^{-10} = 4{,}54\times10^{-5} I_0$

CIRCUITOS RC – Descarga de un capacitor

Después de que el capacitor *ha adquirido una* carga Q_0, *se retira la batería del circuito RC y se conectan los puntos a y c a un interruptor* abierto (figura *a).*
Después se cierra el interruptor y en el mismo instante se reajusta el cronómetro a *t* = *0; en ese momento, q* = Q_0*. Luego, el capacitor se descarga a través del resistor y su carga disminuye finalmente a cero.*
La figura *b muestra la* elección del sentido positivo para la corriente.
Entonces, la regla de Kirchhoff de las mallas da la ecuación anterior pero con $\mathcal{E} = 0$:

$$0 - iR - \frac{q}{C} = 0 \qquad i(t) = \frac{dq}{dt} = -\frac{q}{RC}$$

La corriente *i ahora es negativa;ya que la carga positiva q está saliendo* de la placa izquierda del capacitor de la figura *b, por lo que la corriente va en* sentido opuesto al que se ilustra en la figura.
En *t* = *0, q* =Q_0, corriente inicial es $I_0 = -Q_0/RC$.



CIRCUITOS RC – Descarga de un capacitor

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = -\frac{q}{RC}$$

Para obtener *q como función del tiempo se reordena la ecuación , de nuevo* se cambian los nombres de las variables a *q y t, y se procede a integrar, los límites para q' son ahora de* Q_0 *a q.*

$$\int_{Q_0}^{q} \frac{dq'}{q'} = -\frac{1}{RC}\int_0^t dt' \quad \ln\frac{q}{Q_0} = -\frac{t}{RC}$$

$$\boxed{q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{RC}}}$$

La corriente instantánea *i es la derivada de esta con respecto al tiempo:*

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}\left(Q_0 e^{-\frac{t}{RC}}\right) = Q_0 e^{-\frac{t}{RC}}\left(-\frac{1}{\mathrm{RC}}\right) = -\frac{\mathcal{E}C}{\mathrm{RC}} e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$i(t) = -\frac{\mathcal{E}}{\mathrm{R}} e^{-\frac{t}{RC}} = -\frac{Q_0}{\mathrm{RC}} e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$\boxed{i(t) = -\mathrm{I}_0 e^{-\frac{t}{RC}} = -\frac{Q_0}{\mathrm{RC}} e^{-\frac{t}{RC}}}$$

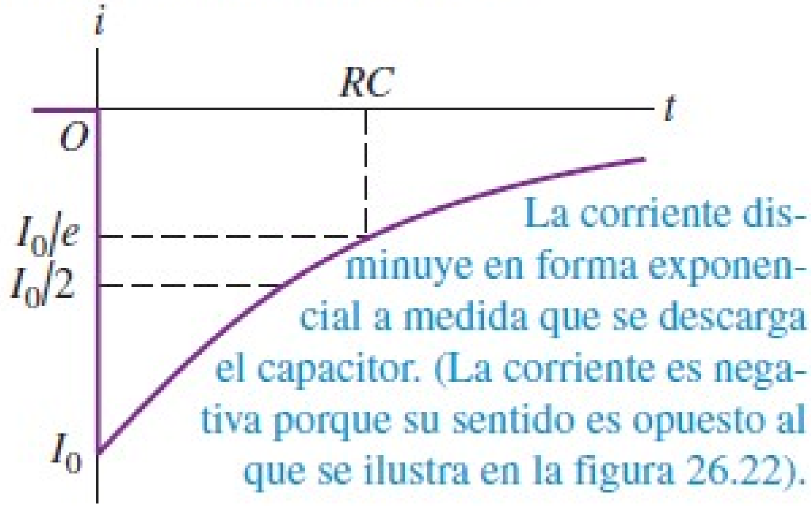
CIRCUITOS RC – Descarga de un capacitor

Las figuras muestran las gráficas de la corriente y la carga; ambas cantidades tienden a cero en forma exponencial con respecto al tiempo.

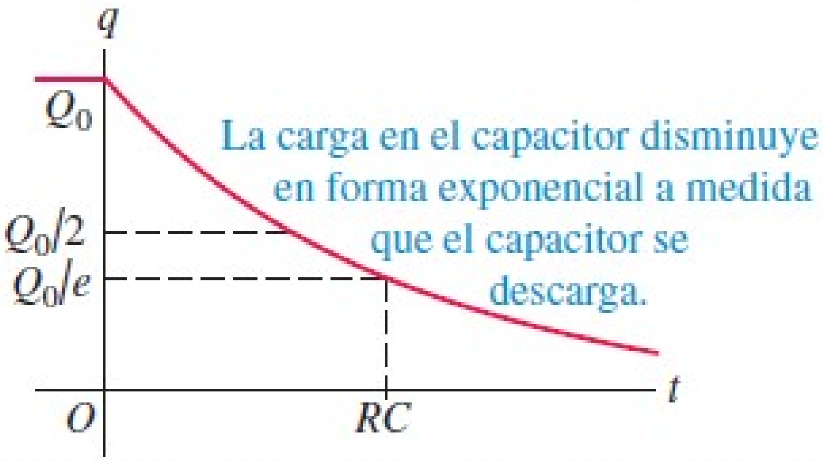
Mientras el capacitor se carga, la tasa instantánea a la que la batería entrega energía al circuito es $P = \mathcal{E}i$.
La tasa instantánea a la que la energía eléctrica se disipa en el resistor es i^2R, *y la tasa a la que la energía se almacena en el* capacitor es $iv_{bc} = iq/C$:

$$\mathcal{E}i = i^2R + \frac{iq}{C}$$

a) Gráfica de la corriente contra el tiempo para un capacitor en descarga



b) Gráfica de la carga del capacitor contra el tiempo para un capacitor en descarga



CIRCUITO RC BALANCE ENERGÍA

$$\mathcal{E}i = i^2R + \frac{iq}{C}$$

Esto significa que de la potencia *suministrada por la batería, una parte se disipa* en el resistor y otra parte *se almacena en el capacitor.*

La energía *total suministrada por la batería durante la carga del capacitor es igual* a la fem $\mathcal{E}$ de la batería multiplicada por el total de la carga Q_f, *o* $\mathcal{E}.Q_f$

La energía total almacenada en el capacitor es $Q_f\,\mathcal{E}/2$.

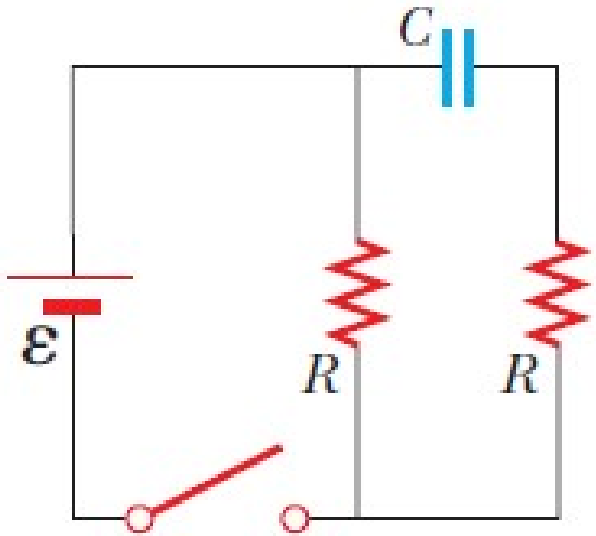
Así, exactamente la mitad de la energía suministrada por la batería se almacena en el capacitor, y la otra mitad se disipa en el resistor.

Esta división a la mitad de la energía no depende de *C, R o* $\mathcal{E}$.

Estos resultados se pueden verificar en detalle tomando la integral con respecto al tiempo de cada una de las cantidades de potencia.

PREGUNTA RÁPIDA (QUICK QUIZ)

Considere el circuito de la figura y suponga que la batería no tiene resistencia interna.



i) **Justo después de cerrar el interruptor, ¿cuál es la corriente** en la batería?

a) 0,

b) $\mathcal{E}/2R$,

c) $2\mathcal{E}/R$,

d) $\mathcal{E}/R$,

e) imposible de determinar.

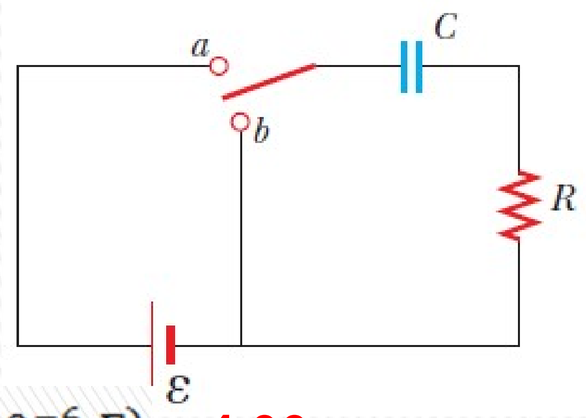
***ii) Después de* un tiempo muy largo**, ¿cuál es la corriente en la batería? Elija entre las mismas opciones

i) c) 2ε/R
Justo después de que se ha cerrado el interruptor, no existe carga en el capacitor. Mientras el capacitor comienza a cargarse, existe corriente en ambas ramas del circuito, por lo que la mitad derecha del circuito es equivalente a dos resistencias *R en paralelo, es decir, una resistencia equivalente de ½* R.

ii), d) ε/R . Después de mucho tiempo, el capacitor se carga por completo y la corriente en la rama derecha disminuye hasta cero. Ahora la corriente existe sólo en una resistencia *R a través* de la batería

EJEMPLO: Carga de un capacitor

Un capacitor sin carga y un resistor se conectan en serie a una batería, como se muestra en la figura, donde ε=12,0 V, *C = 5,00 μF y R = 8,00×10⁵ Ω. El interruptor se mueve a la posición a. Encuentre la constante de tiempo del circuito,* la carga máxima en el capacitor, la corriente máxima en el circuito y la carga y la corriente como funciones del tiempo.



Constante de tiempo: $\tau = RC = (8{,}00 \times 10^5\ \Omega)(5{,}00 \times 10^{-6}\ \mathrm{F})$ **= 4,00 s**

Carga máxima: $Q = \varepsilon C = (12{,}0\ V)(5{,}00 \times 10^{-6}\ \mathrm{F})$ **= 60,0 μC**

Corriente máxima: $I_{max} = I_0 = \dfrac{\varepsilon}{R} = \dfrac{12{,}0\ V}{8{,}00 \times 10^5\ \Omega}$ **= 15,0 μA**

Carga como función del tiempo: $q(t) = Q\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) = (60{,}0\ \mu C)\left(1 - e^{-\frac{t}{4{,}00}}\right)$

Corriente como función del tiempo:

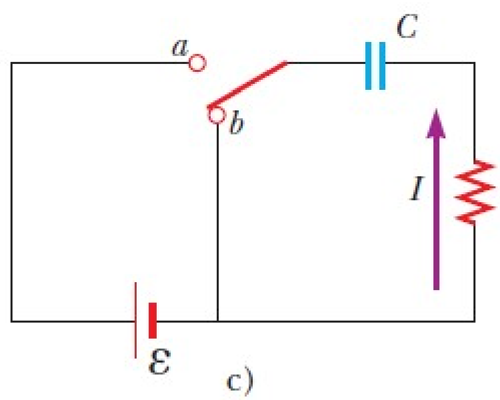
$$I(t) = \frac{\varepsilon}{R} e^{-\frac{t}{RC}} = (15{,}0\ \mu A)\left(1 - e^{-\frac{t}{4{,}00}}\right)$$

EJEMPLO: Descarga de un capacitor

Considere un capacitor de capacitancia C que se descarga a través de un resistor de resistencia R , como se muestra en la figura.

a) ¿Después de cuántas constantes de tiempo la carga en el capacitor es un cuarto de su valor inicial?

b) La energía almacenada en el capacitor disminuye con el tiempo conforme el capacitor se descarga. ¿Después de cuántas constantes de tiempo la energía almacenada es un cuarto de su valor inicial?



$$q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$q(t) = \frac{Q}{4}$$

$$\frac{Q}{4} = Q e^{-\frac{t}{RC}} \Rightarrow \frac{1}{4} = e^{-\frac{t}{RC}} \Rightarrow \ln\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{t}{RC} \Rightarrow \ln(4) = \frac{t}{RC}$$

$$t = RC\ln(4) = \tau\ln(4) = 1{,}39\,\tau$$

$$U(t) = \frac{q^2}{2C} = \frac{Q^2}{2C} e^{-\frac{2t}{RC}}$$

$$t = \frac{1}{2} RC\ln(4) = 0{,}693\tau$$

$$\frac{1}{4}\frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2}{2C} e^{-\frac{2t}{RC}} \Rightarrow \frac{1}{4} = e^{-\frac{2t}{RC}} \Rightarrow -\ln(4) = -\frac{2t}{RC}$$

EJEMPLO Carga de un capacitor

Un resistor de 10 MΩ está conectado en serie con un capacitor de 1,0 μF y una batería con fem de 12,0 V. Antes de cerrar el interruptor en el instante $t = 0$, *el capacitor está descargado.*

a) ¿Cuál es la constante de tiempo?

b) ¿Qué fracción de la carga final Q_f *hay en el capacitor* en $t = 46$ *s?*

c) ¿Qué fracción de la corriente inicial I_0 *permanece* en $t = 46$ *s?*

a) Constante de tiempo

$$\tau = RC = (10 \times 10^6\ \Omega)(1.0 \times 10^{-6}\ \mathrm{F}) = 10\ \mathrm{s}$$

b) Fracción de Q_f en t= 46 s

$$q(t) = \varepsilon C\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) = Q_f\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

$$\frac{q(t=46)}{Q_f} = 1 - e^{-\frac{t}{RC}} = 1 - e^{-\frac{46}{10}} = 1 - e^{-4,6} = 0{,}99$$

c) Fracción de I_0 en t= 46 s

$$i(t) = \frac{\varepsilon}{R}e^{-\frac{t}{RC}} = I_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$\frac{i(t=46)}{I_0} = e^{-\frac{t}{RC}} = e^{-\frac{46}{10}} = e^{-4,6} = 0{,}010$$

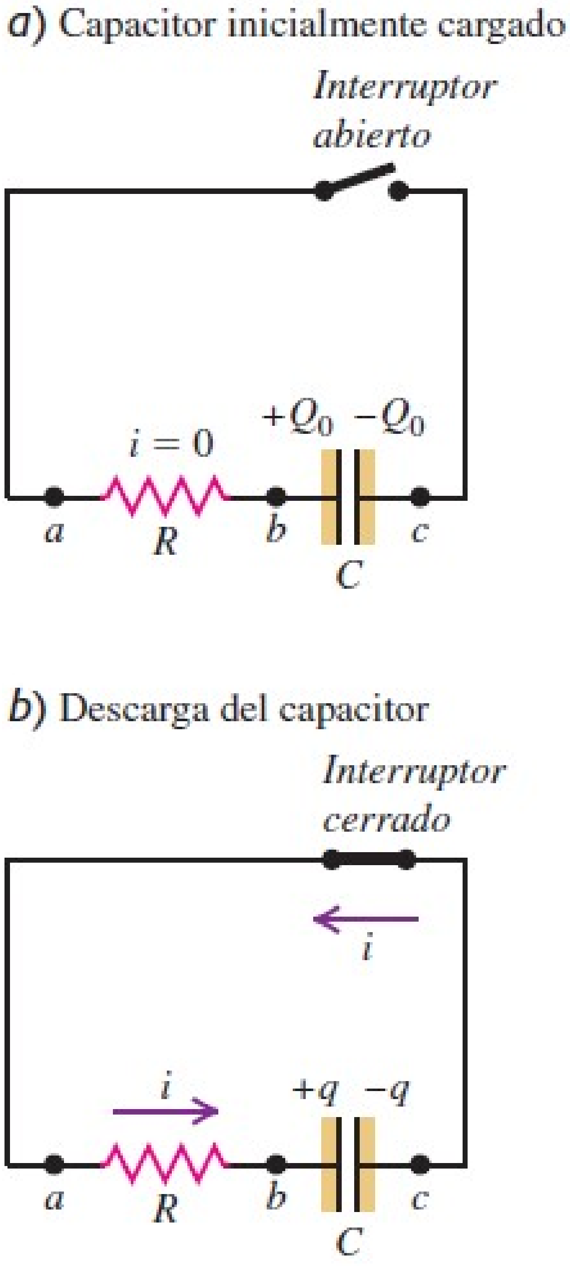
Después de 4,6 constantes de tiempo, el capacitor tiene 99% de carga y la corriente ha disminuido al 1,0% de su valor inicial. El circuito se cargaría más rápidamente si se redujera la constante de tiempo usando una menor resistencia.

EJEMPLO Descarga de un capacitor

El resistor y el capacitor del ejemplo anterior se reconectan como se ilustra en la figura. Inicialmente, el capacitor tiene una carga de 5,0 μC y luego se descarga al cerrar el interruptor en *t = 0.*

a) *¿En qué* momento la carga será igual a 0,50 μC?

b) ¿Cuál es la corriente en ese instante?



a) t en que q= 0,50 μC

$$q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$t = -RC \ln\frac{q}{Q_0} = -(10\text{ s})\ln\frac{0.50\ \mu\text{C}}{5.0\ \mu\text{C}} = 23\text{ s} = 2.3\tau$$

b) Corriente en t anterior

$$i(t) = -\mathrm{I}_0 e^{-\frac{t}{RC}} = -\frac{Q_0}{\mathrm{RC}} e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$i = -\frac{Q_0}{RC}e^{-t/RC} = -\frac{5.0 \times 10^{-6}\text{ C}}{10\text{ s}}e^{-2.3} = -5.0 \times 10^{-8}\text{ A}$$