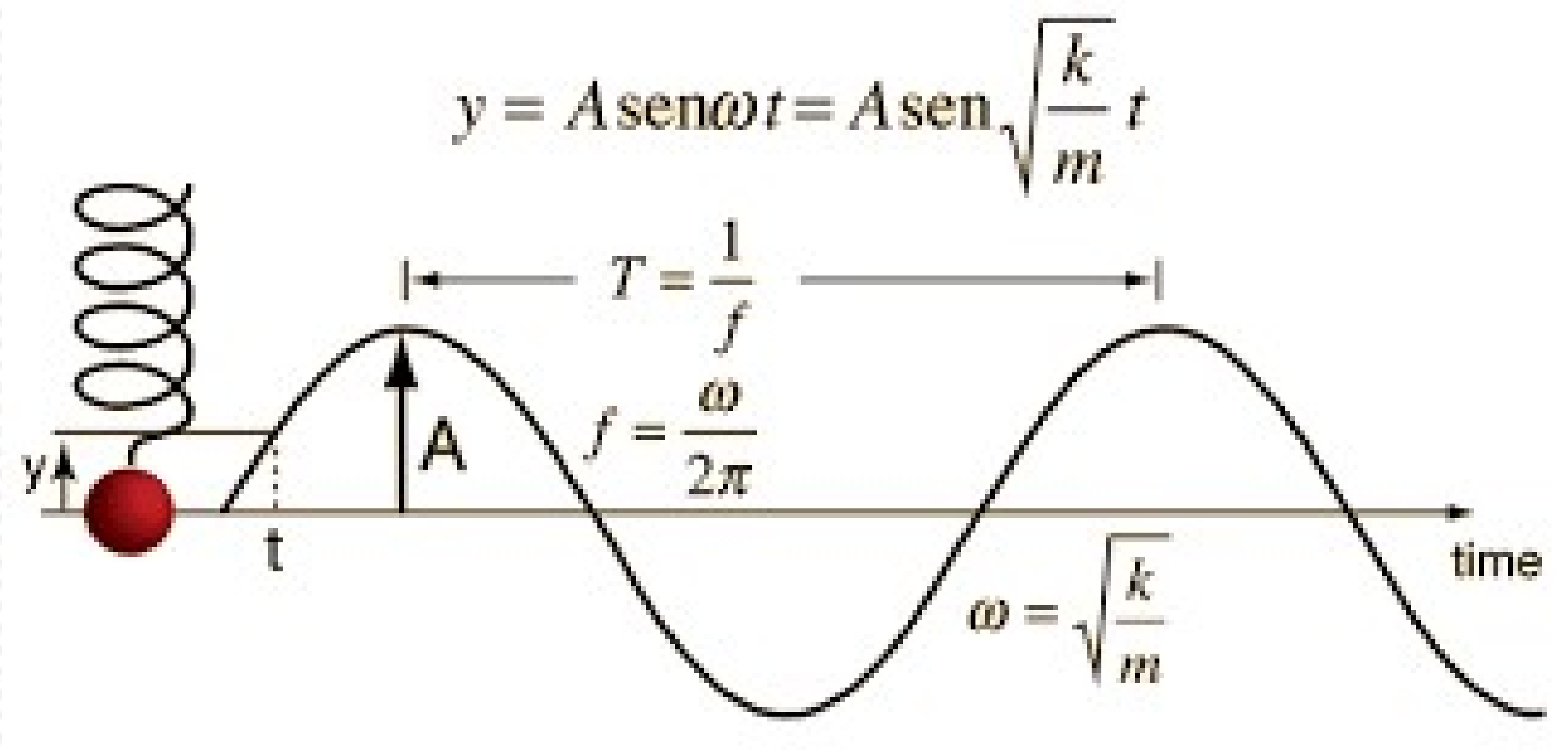
MOVIMIENTO PERIÓDICO

Movimiento Armónico Simple

Oscilaciones amortiguadas y forzadas



INTRODUCCIÓN

Movimientos que se repiten una y otra vez: vibraciones de un cristal de cuarzo, péndulo oscilante de un reloj con pedestal, vibraciones sonoras producidas por un instrumento musical o y el movimiento periódico de los pistones de un motor de combustión: **movimiento periódico u oscilación.**

Un cuerpo que tiene **un movimiento periódico se caracteriza por una posición de equilibrio estable:**

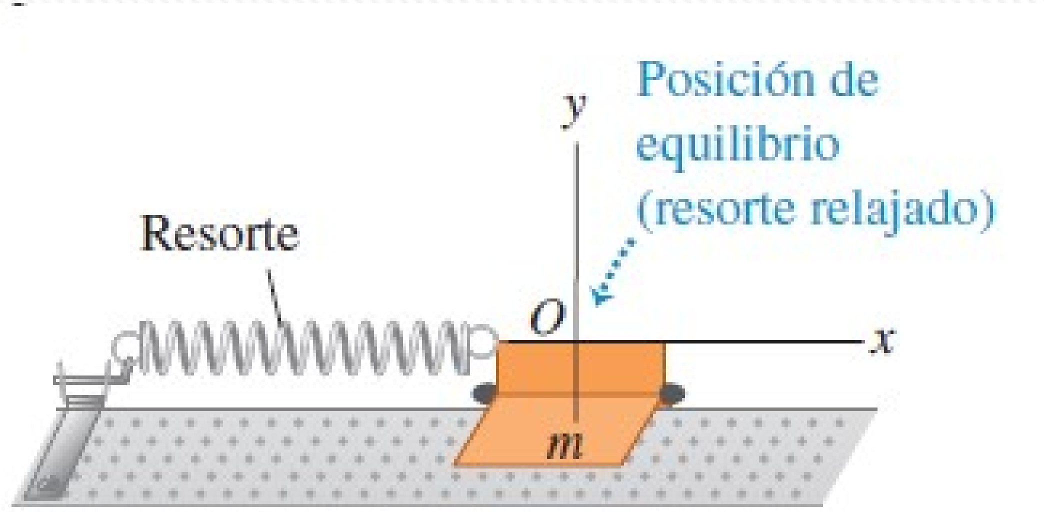
cuando se le aleja de esa posición y se suelta, entra en acción una fuerza o torca para hacerlo regresar al equilibrio.

Pero cuando llega ahí ha adquirido cierta energía cinética que le permite continuar su movimiento hasta detenerse del otro lado…

donde será impulsado nuevamente hacia su posición de equilibrio.

Sistemas sencillos con movimiento periódico: sistemas masa-resorte y péndulos.

Descripción de la oscilación

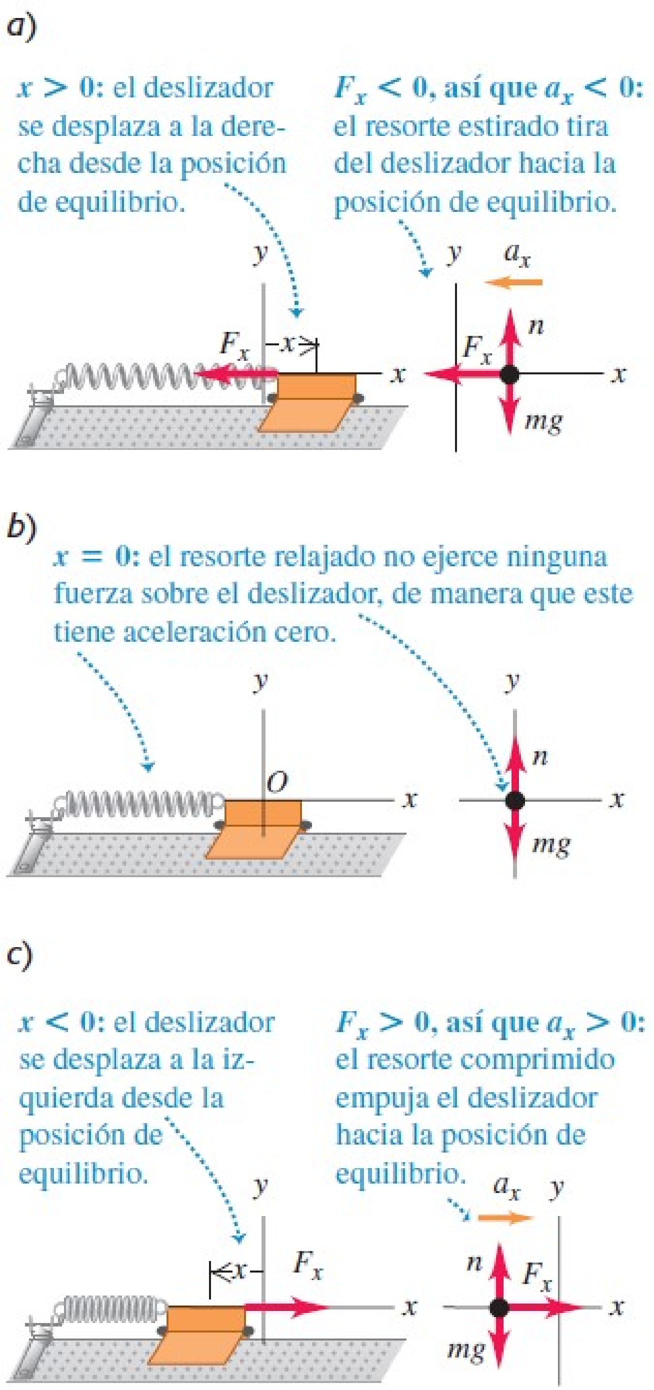


Sistema más sencillo que puede tener movimiento periódico: **sistema masa-resorte ideal.**

Cuerpo de masa *m sobre guía horizontal sin fricción que* solo puede desplazarse a lo largo del eje *x, conectado a un resorte ideal (perfectamente elástico y de masa despreciable)*
Extremo izquierdo del resorte fijo, y el derecho está unido al cuerpo.

La fuerza del resorte es la única fuerza horizontal que actúa sobre el cuerpo; las fuerzas normal y gravitacional verticales en este caso suman cero.

Descripción de la oscilación



Origen del sistema de coordenadas *en la* posición de equilibrio (resorte ni estirado ni comprimido)

x es el ***desplazamiento del cuerpo con respecto al equilibrio*** *y* el cambio de longitud del resorte.

Fuerza que el resorte ejerce sobre el cuerpo es F_x *y la componente x de la aceleración,* a_x*, está dada por*

$a_x = F_x/m$.

Siempre que el cuerpo se desplaza con respecto a su posición de equilibrio, la fuerza del resorte tiende a regresarlo a dicha posición.

Llamamos a una fuerza con esa característica **fuerza de restitución.**

Solo hay oscilación si hay una fuerza de restitución que tiende a regresar el sistema a la posición de equilibrio.

Amplitud, periodo, frecuencia y frecuencia angular

Términos que usaremos al analizar movimientos periódicos de todo tipo:

La **amplitud del movimiento,** denotada con ***A, es la magnitud máxima del desplazamiento*** con respecto al equilibrio, es decir, el valor máximo de *x y siempre es positiva.*
Si el resorte es ideal, el rango global del movimiento es 2*A.*
La unidad de *A en el SI es el metro.*
Una ***vibración completa, o ciclo,*** *es un viaje redondo* (de ida y vuelta), digamos de *A a -A y de regreso a A, o bien, de O a A, regresando* por *O hasta -A y volviendo a O. Observe que el movimiento de un lado al otro (digamos,* de *-A a A) es medio ciclo, no un ciclo completo.*
El **periodo,** ***T, es el tiempo que tarda un ciclo****, y siempre es positivo. La unidad del* periodo en el SI es el segundo, aunque a veces se expresa como “segundos por ciclo”.
La **frecuencia,** ***f, es el número de ciclos en la unidad de tiempo****, y siempre es positiva.* La unidad de la frecuencia en el SI es el hertz:
1 hertz = 1 Hz = 1 ciclo/s = 1 s^{-1}
Esta unidad se llama así en honor del físico alemán Heinrich Hertz (1857-1894), un pionero en la investigación de las ondas electromagnéticas.
La **frecuencia angular,ω, es 2π veces la frecuencia:** $\omega = 2\pi f$
Su unidad es el rad/s.

Amplitud, periodo, frecuencia y frecuencia angular

Aplicación Frecuencias de las alas
El colibrí garganta rubí (*Archilochus colubris*) normalmente bate sus alas en aproximadamente 50 Hz, produciendo su sonido característico. Los insectos pueden batir sus alas a un ritmo aún más rápido, desde 330 Hz para una mosca doméstica y 600 Hz para un mosquito, hasta una cifra increíble de 1040 Hz para el diminuto jején (*Ceratopogonidae*).

Por las definiciones de periodo *T y frecuencia f, es evidente que uno es el recíproco* del otro:

$$f = \frac{1}{T} \qquad \text{ó} \qquad T = \frac{1}{f}$$

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

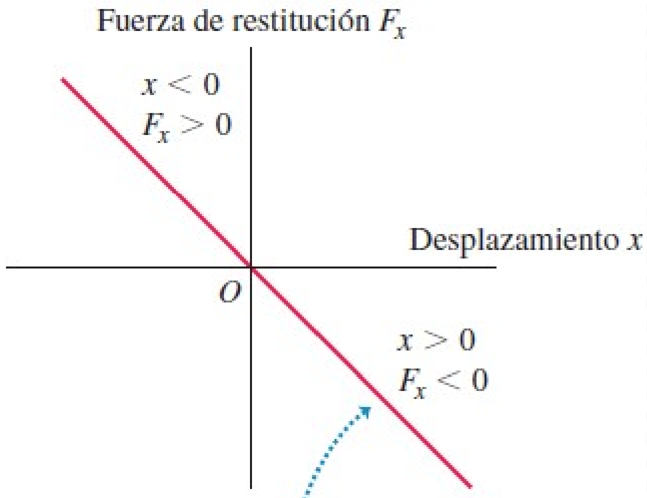
MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

La oscilación más sencilla: cuando la **fuerza de restitución *F_x* *es directamente proporcional al desplazamiento x con respecto al equilibrio*.**

Esto ocurre si el **resorte es ideal y obedece la ley de Hooke**. La constante de proporcionalidad entre *F_x y x es la constante de fuerza k.*

En ambos lados de la posición de equilibrio, ***F_x y x siempre tienen signos opuestos:*** ***$F_x = -kx$ (fuerza de restitución de un resorte ideal)***

La constante de fuerza *k siempre es positiva y tiene unidades* de N/m.



La fuerza de restitución ejercida por un resorte ideal es directamente proporcional al desplazamiento (ley de Hooke, $F_x = -kx$): la gráfica de F_x contra x es una recta.

Cuando la fuerza de restitución es directamente proporcional al desplazamiento con respecto al equilibrio, la oscilación se denomina **movimiento armónico simple**, *que se abrevia como* ***MAS.***

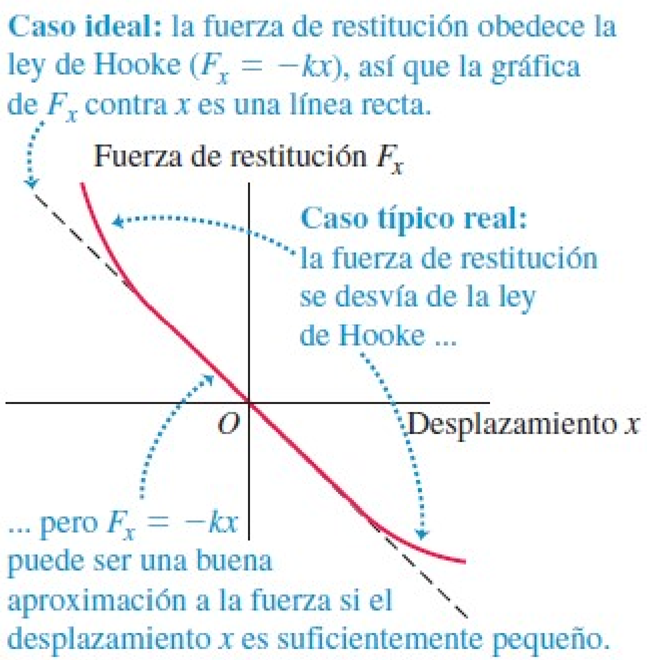
$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

El signo menos indica que la aceleración y el desplazamiento siempre tienen signos opuestos.

Un cuerpo que está en movimiento armónico simple se denomina **oscilador armónico.**

MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

14.4 En casi todas las oscilaciones reales, se aplica la ley de Hooke siempre que el cuerpo no se aleje tanto del equilibrio. En tal caso, las oscilaciones tienen amplitud pequeña y son casi armónicas simples.



¿Por qué es importante el movimiento armónico simple?

No todos los movimientos periódicos son armónicos simples; en el movimiento periódico en general, la relación entre la fuerza de restitución y el desplazamiento es más complicada que la ecuación $F_x = -kx$.

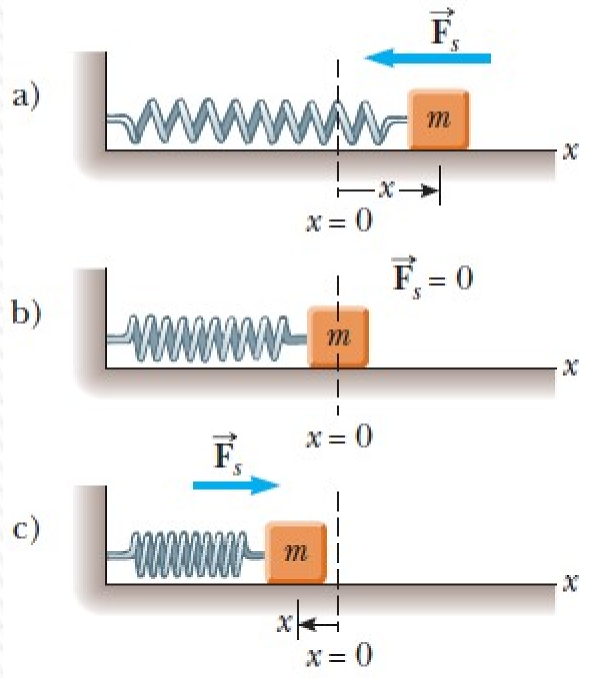
En muchos sistemas, la fuerza de restitución es *aproximadamente proporcional al desplazamiento si este es lo suficientemente* pequeño.

Si la amplitud es pequeña, las oscilaciones de tales sistemas son más o menos armónicas simples:

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

Se puede usar el MAS como modelo aproximado de muchos movimientos periódicos distintos: vibración del cristal de cuarzo, movimiento de un diapasón, corriente eléctrica en un circuito de corriente alterna, y vibraciones de los átomos en moléculas y sólidos.

Desplazamiento, velocidad y aceleración en el MAS



Para el sistema masa-resorte ideal, la ecuación de movimiento dada por la segunda ley de Newton según el eje x , teniendo en cuenta que la fuerza neta vale –kx es:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x = -\omega^2 x$$

Esta es una ecuación diferencial cuya solución es efectivamente:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \Phi)$$

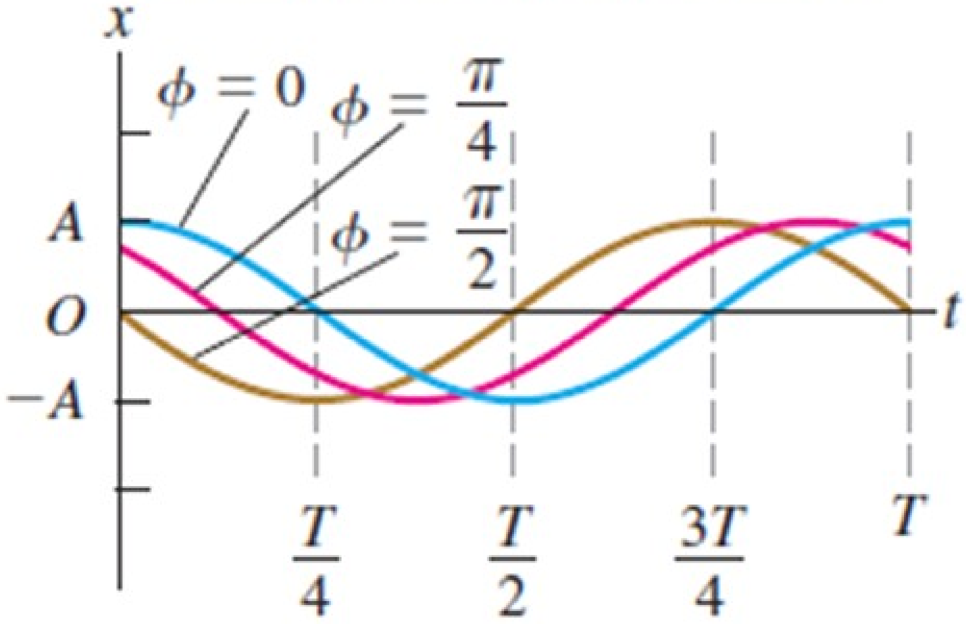
Donde A y ϕ *son constantes que se determinan a partir de las condiciones iniciales, es general los valores de x(0) y v(0).*

También se puede usar como soluciones:

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi) \qquad x(t) = C_1 \sin\omega t + C_2 \cos\omega t$$

Desplazamiento, velocidad y aceleración en el MAS

Estas tres curvas muestran el MAS con periodo T y amplitud A iguales, pero ángulos de fase ϕ distintos.



Constante ϕ ángulo de fase, indica en qué punto del ciclo se encontraba el movimiento cuando $t = 0$.

Llamamos a la posición en $t = 0$ con x_0.
Sustituyendo $t = 0$ y $x = x_0$ en la ecuación se tiene: $x_0 = A \cos \phi$.

Si $\phi = 0$, entonces $x_0 = A \cos 0 = A$;
por lo tanto,. si $\phi = \pi$, entonces
$x_0 = A \cos \pi = -A$;
por lo tanto, la partícula parte del desplazamiento *negativo máximo;*

si $\phi = \pi/2$, entonces
$x_0 = A \cos(\pi/2) = 0$.

Desplazamiento, velocidad y aceleración en el MAS

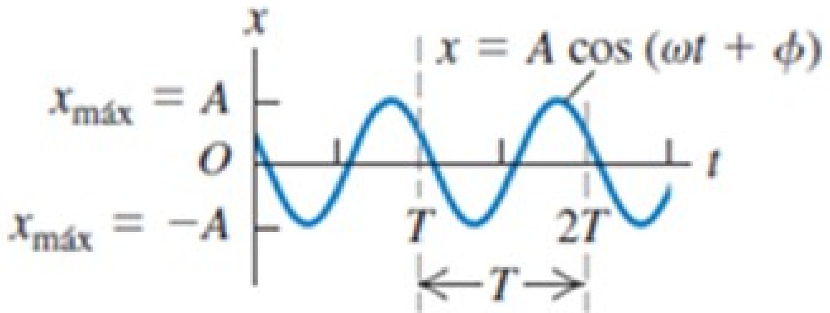
$$x(t) = A\cos(\omega t + \Phi)$$

Derivando
obtenemos:

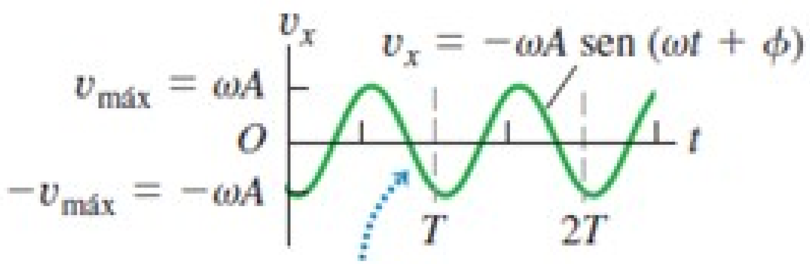
$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \Phi)$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \Phi$$

a) Desplazamiento x en función del tiempo t

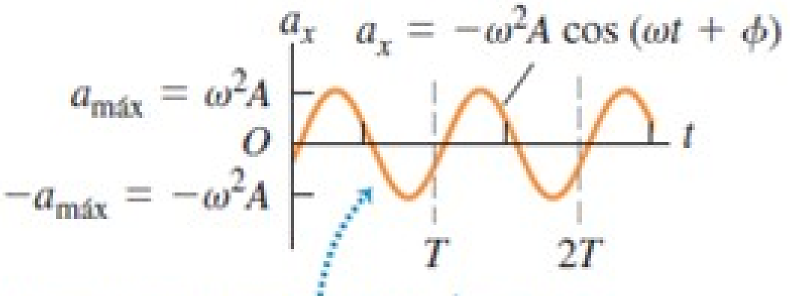


b) Velocidad v_x en función del tiempo t



La gráfica $v_x - t$ se desplaza por $\frac{1}{4}$ de ciclo con respecto a la gráfica $x - t$.

c) Aceleración a_x en función del tiempo t



La gráfica a_x-t se desplaza $\frac{1}{4}$ de ciclo con respecto a la gráfica v_x-t y $\frac{1}{2}$ ciclo con respecto a la gráfica x-t.

Desplazamiento, velocidad y aceleración en el MAS

Si conocemos la posición y la velocidad iniciales x_0 *y* v_0 *del cuerpo oscilante, podemos* determinar la amplitud *A y el ángulo de fase ϕ como sigue.*

v_0 *es la velocidad* inicial en $t = 0$;

si sustituimos $v = v_0$ *y* $t = 0$ *en la ecuación de v(t):*

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -A\omega\,\mathrm{sen}(\omega t + \phi)$$

$$x(t=0) = x_0 = A\cos\Phi \qquad v(t=0) = v_0 = -A\omega\sin\Phi$$

$$\sin\Phi = -\frac{v_0}{A\omega} \quad \text{y} \quad \cos\Phi = \frac{x_0}{A}$$

Dividiendo miembro a miembro: $\dfrac{\sin\Phi}{\cos\Phi} = \dfrac{-\frac{v_0}{A\omega}}{\frac{x_0}{A}} = -\dfrac{v_0}{\omega x_0}$

$$\Phi = \arctan\left(\frac{v_0}{\omega x_0}\right)$$

Desplazamiento, velocidad y aceleración en el MAS

$$x(t=0) = x_0 = A\cos\Phi \qquad v(t=0) = v_0 = -A\omega\sin\Phi$$

$$A\sin\Phi = -\frac{v_0}{\omega} \quad \text{y} \quad A\cos\Phi = x_0$$

Elevando al cuadrado cada miembro de estas dos igualdades y sumando a miembro a miembro:

$$A^2 sin^2\,\Phi + A^2 cos^2\,\Phi = \left(-\frac{v_0}{\omega}\right)^2 + (x_0)^2$$

$$A^2(sin^2\,\Phi + cos^2\,\Phi) = A^2 = \left(-\frac{v_0}{\omega}\right)^2 + (x_0)^2$$

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}$$

$$\Phi = \arctan\left(-\frac{v_0}{\omega x_0}\right)$$

Observe que si el cuerpo tiene tanto un desplazamiento inicial x_0 *como una velocidad* inicial v_0 *distinta de cero, la amplitud A no es igual al desplazamiento inicial.*

ENERGÍA EN EL MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

Fuerza del resorte única fuerza horizontal que actúa sobre el cuerpo.
La fuerza ejercida por un resorte ideal es conservativa y las fuerzas verticales no efectúan trabajo, así que **se *conserva la* energía mecánica total del sistema**.
También supondremos que la masa del resorte es despreciable.
Como no hay fuerzas no conservativas que efectúen trabajo, así que se conserva la energía mecánica total *E* = *K* + *U*

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 \qquad E = \frac{1}{2}m(-A\omega\sin(\omega t + \Phi))^2 + \frac{1}{2}k(A\cos(\omega t + \Phi))^2$$

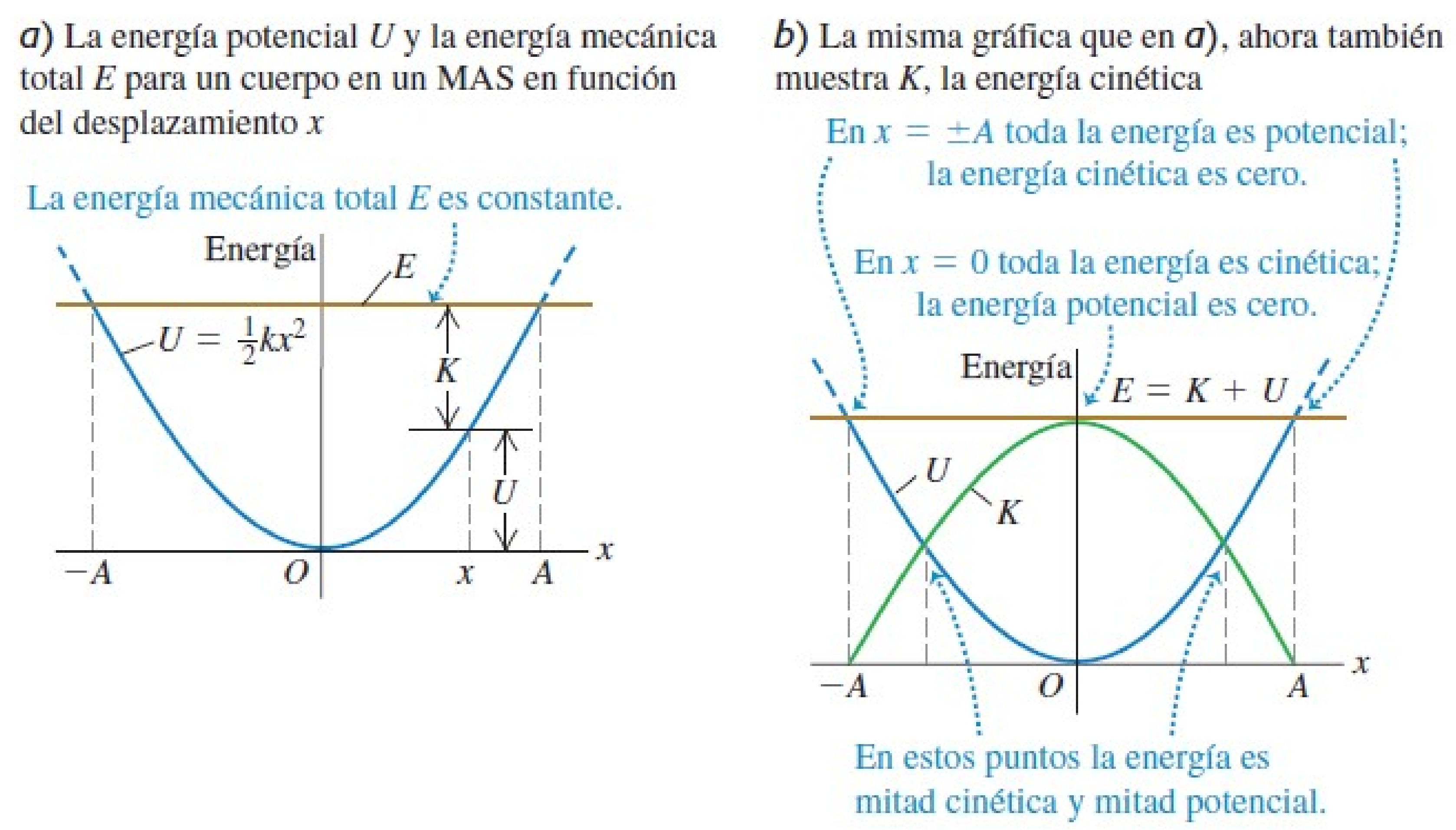
$$E = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 sin^2(\omega t + \Phi) + \frac{1}{2}kA^2 cos^2(\omega t + \Phi)$$ Como: $m.\omega^2 = k$

$$E = \frac{1}{2}kA^2 \left(sin^2(\omega t + \Phi) + cos^2(\omega t + \Phi)\right) = \frac{1}{2}kA^2$$

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2$$

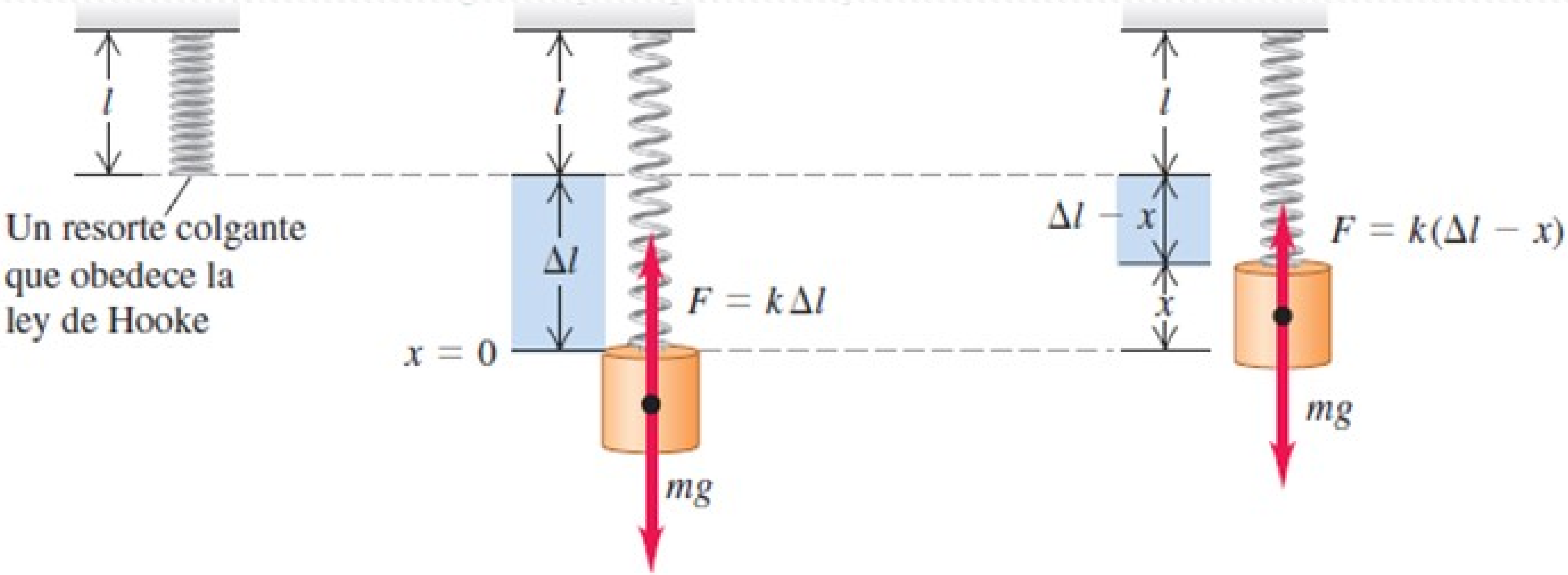
Siendo: $A\omega = v_{máx}$

INTERPRETACIÓN DE E, K Y U EN UN MAS



Energía cinética *K, energía* potencial *U y energía mecánica total E en* función de la posición en un MAS.
Para cada valor de *x, la suma de K y U es igual al valor* constante de *E.*

MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE VERTICAL

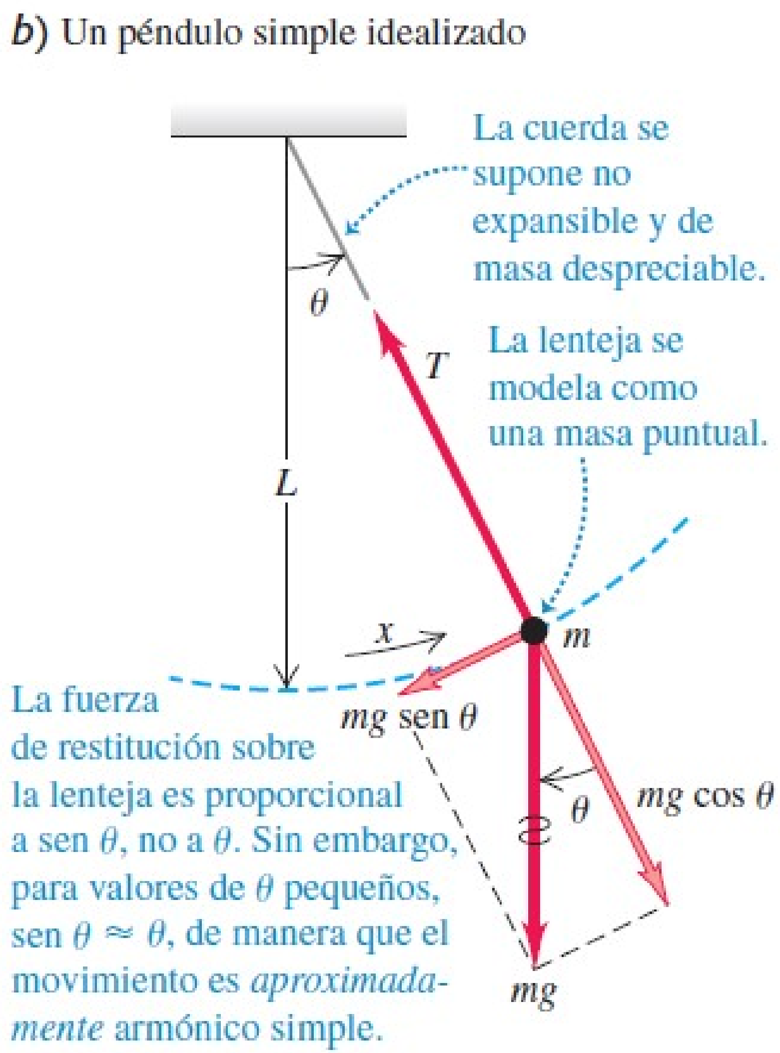


Si colgamos un resorte ideal con constante de fuerza *k y suspendemos* un cuerpo de masa *m, las oscilaciones ahora serán verticales: sigue desarrollando un* MAS.

E*l cuerpo cuelga en reposo, en equilibrio.* En tal posición, el resorte se estira una distancia Δl *tal que la* fuerza vertical hacia arriba $k\,\Delta l$ *del resorte sobre el cuerpo equilibre su peso mg:* $mg = k\,\Delta l$

El MAS vertical no difiere en esencia del horizontal: el único cambio real es que la posición de equilibrio *x = 0 ya no corresponde* al punto donde el resorte no está estirado.

PÉNDULO SIMPLE



Modelo idealizado: masa puntual suspendida de una cuerda no extensible y de masa despreciable.

Si la masa se mueve a un lado de su posición de equilibrio vertical descendente, oscilará alrededor de dicha posición.

La trayectoria de la partícula puntual con masa (llamada pesa o lenteja) no es una recta, sino el arco de un círculo de radio *L igual a la longitud de la* cuerda.

Usamos como coordenada la distancia x medida sobre el arco.

Si el movimiento es armónico simple, la fuerza de restitución debería ser directamente proporcional a *x, o bien a θ (porque x = Lθ).*

PÉNDULO SIMPLE

La **fuerza de restitución F_θ *es la componente* tangencial de la fuerza neta**:

$$F_\theta = -mg\sin\theta$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg\sin\theta$$

Ecuación de movimiento

La fuerza de restitución se debe a la gravedad; la tensión *T solo actúa para hacer que la* masa puntual describa un arco.

La fuerza de restitución es proporcional *no a θ sino* a senθ, así que **el movimiento *no es armónico simple.***

Sin embargo, si el ángulo θ es pequeño, sen θ es casi igual a θ en radianes.

Por ejemplo, si θ = 0,1 rad (unos 6°), sen θ = 0,0998, una diferencia de solo 0,2%.

Con esta aproximación, la ecuación se convierte en:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg\theta \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -g\theta$$

Pero: $x=\theta L$

$$\frac{d^2(\theta L)}{dt^2} = -g\theta \qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\theta$$

Que es un MAS con ω

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

PÉNDULO SIMPLE

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\theta$$

$$\theta(t) = \Theta\cos(\omega t + \Phi)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \qquad f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Expresiones para un péndulo ideal y amplitudes pequeñas.

Cuando la amplitud no es pequeña, la divergencia con respecto al MAS puede ser considerable.

Pero, ¿qué significa "pequeña" en este caso? El periodo se puede expresar con una serie infinita; cuando el desplazamiento angular máximo es Θ, el periodo *T está dado por:*

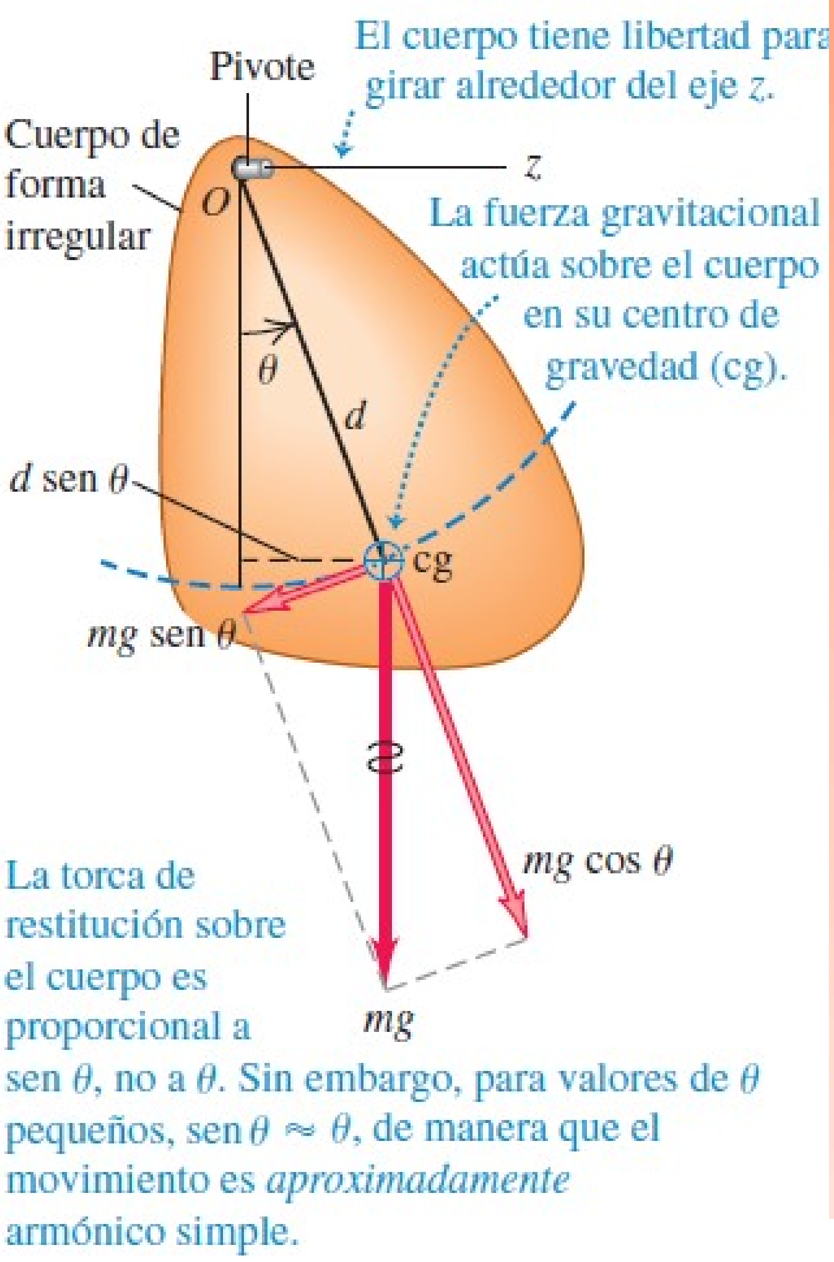
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left(1 + \frac{1}{2^2}\sin^2\left(\frac{\Theta}{2}\right) + \left(\frac{1\times 3}{2\times 4}\right)^2 \sin^4\left(\frac{\Theta}{2}\right) + \left(\frac{1\times 3\times 5}{2\times 4\times 6}\right)^2 \sin^6\left(\frac{\Theta}{2}\right)\dots\right)$$

(errores sen $\theta \approx \theta$: 5º-0,24%, 10º -0,5 %, 15º-1,14%)

Podemos calcular el periodo con la precisión deseada tomando suficientes términos de la serie.

PÉNDULO FÍSICO

14.23 Dinámica de un péndulo físico.



Cualquier péndulo *real que usa un cuerpo de tamaño finito,* *en* contraste con el modelo idealizado de péndulo *simple en el que toda la masa se concentra* en un punto.

Si las oscilaciones son pequeñas, el análisis del movimiento de un péndulo real es tan sencillo como el de uno simple.

Cuerpo de forma irregular que puede girar sin fricción alrededor de un eje que pasa por el punto *O. En la posición de equilibrio, el centro de gravedad está directamente* abajo del pivote; en la posición que se muestra en la figura, el cuerpo está desplazado del equilibrio un ángulo θ que usamos como coordenada para el sistema.
La distancia de *O al centro de gravedad es d, el momento de inercia del cuerpo alrededor del* eje de rotación a través de *O es I y la masa total es m.*

PÉNDULO FÍSICO

Cuando el cuerpo se desplaza como se muestra, el peso *mg causa una torca de restitución*

$$\tau_z = -(mg)d\sin\theta$$

El signo negativo indica que la torca de restitución es en sentido horario, si el desplazamiento es en sentido antihorario, y viceversa.
Cuando el cuerpo se libera, oscila alrededor de su posición de equilibrio.
El movimiento no es armónico simple porque la torca τ_z *es proporcional a sen θ, y no a θ* mismo.
No obstante, si θ es pequeño, podemos aproximar sen θ con θ en radianes, tal como lo hicimos al analizar el péndulo simple.
Entonces, **el movimiento es *aproximadamente* armónico simple**.
Con esta aproximación, $\tau_z = -(mgd)\theta$

La ecuación de movimiento es: $\sum \tau_z = I\alpha_z$ $\qquad I\alpha_z = -(mgd)\theta$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{mg}{I}\theta \qquad \omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}$$

OSCILACIONES AMORTIGUADAS

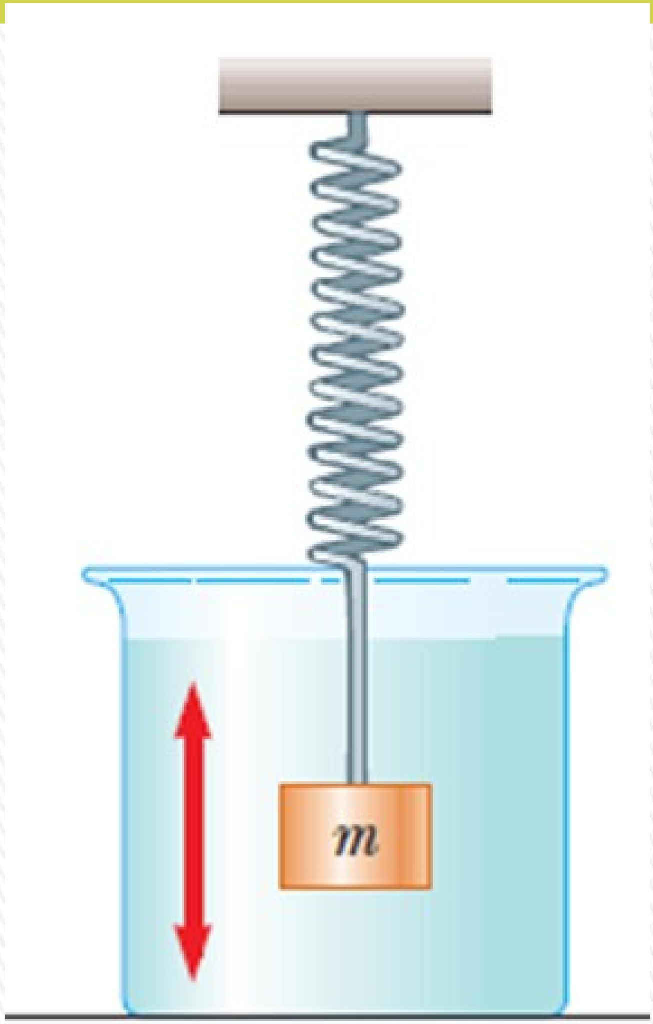
Si una campana que oscila se deja de impulsar, tarde o temprano las fuerzas de amortiguación (fricción en el soporte, resistencia del aire) harán que deje de moverse.

Sistemas oscilantes idealizados: no tienen fricción; la energía mecánica total es constante, y sigue oscilando eternamente sin disminución de la amplitud.

Los sistemas reales siempre tienen fuerzas disipativas, y las oscilaciones cesan con el tiempo, a menos que un mecanismo reponga la energía mecánica disipada.

La disminución de la amplitud causada por fuerzas disipativas se denomina **amortiguamiento**, y el movimiento correspondiente **oscilación amortiguada.**

OSCILACIONES AMORTIGUADAS



Ejemplo de un oscilador amortiguado: objeto unido a un resorte sumergido en fluido viscoso

Caso más sencillo: oscilador armónico simple, con fuerza de amortiguamiento por fricción proporcional a la *velocidad del cuerpo* oscilante.

Este comportamiento se observa en la fricción por flujo de fluidos viscosos, como en los amortiguadores de los automóviles o el deslizamiento entre superficies lubricadas con aceite.

OSCILACIONES AMORTIGUADAS

Sobre el cuerpo actúa una fuerza adicional debida a la fricción,

$F_x = -bv_x,$

donde $v_x = dx/dt$ *es la velocidad y*
b es una constante que describe la intensidad de la fuerza amortiguadora. El signo menos indica que la fuerza siempre tiene dirección opuesta a la velocidad. La fuerza *neta que actúa sobre el cuerpo :* $\Sigma F_x = -kx - bv_x$

Segunda ley de Newton para el sistema:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - bv_x$$

Ecuación diferencial en *x, de segundo orden,*

Si la fuerza de amortiguamiento es relativamente pequeña $b < \sqrt{4km}$

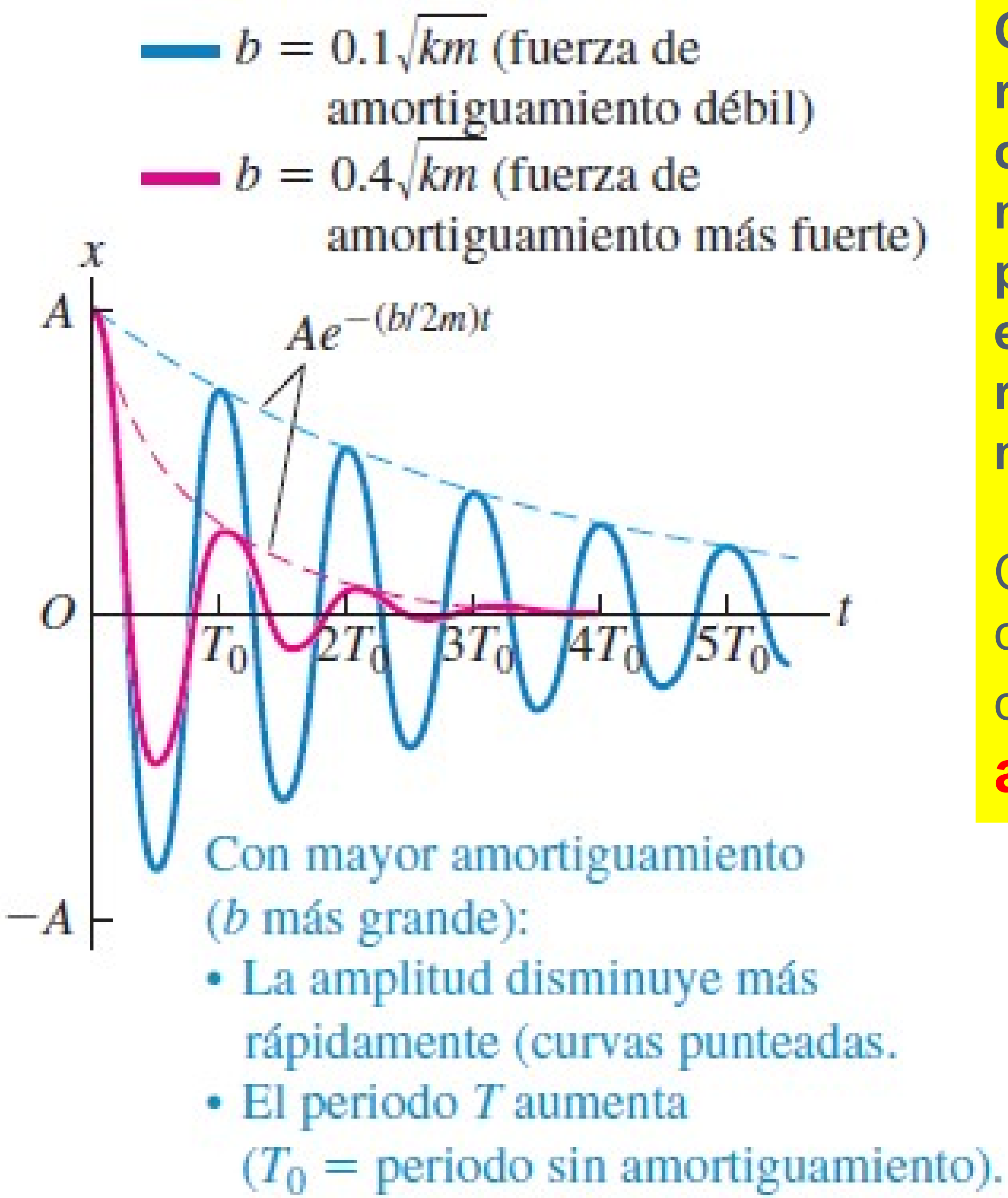
$$x(t) = Ae^{-\frac{b}{2m}t}\cos(\omega' t + \Phi)$$

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$$

La *condición se* llama **subamortiguamiento.**

El sistema oscila con amplitud constantemente decreciente

OSCILACIONES AMORTIGUADAS



Cuando la fuerza retardadora es pequeña, el carácter oscilatorio del movimiento se conserva pero la amplitud disminuye en el tiempo, con el resultado de que al final el movimiento cesa.

Cualquier sistema que se comporte de esta forma se conoce como **oscilador amortiguado**

OSCILACIONES AMORTIGUADAS

El movimiento descrito por la ecuación $m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - bv_x$

$$x(t) = Ae^{-\frac{b}{2m}t}\cos(\omega' t + \Phi)$$

difiere del caso no amortiguado en dos aspectos:

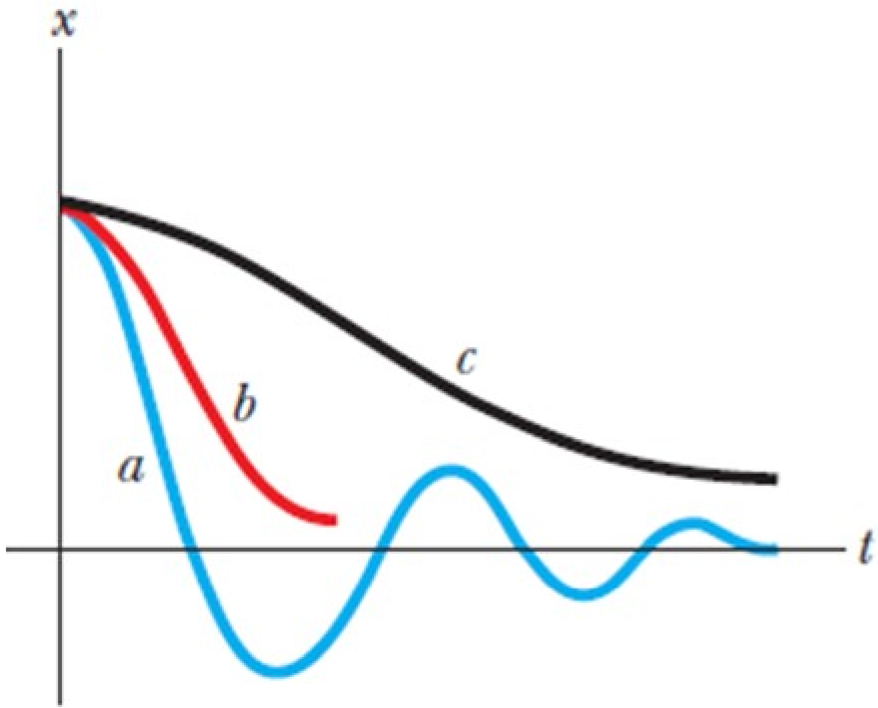
1) La amplitud $Ae^{-\frac{b}{2m}t}$ *no es constante, sino que disminuye con* el tiempo a causa del factor exponencial decreciente $e^{-bt/2m}$.

Cuanto mayor sea el valor de *b, la amplitud disminuirá más rápidamente.*

2) La frecuencia angular ω' ya no es igual $\omega = \sqrt{k/m}$ sino un poco menor, y se vuelve cero si *b es tan grande que* $b = \sqrt{4km}$

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$$

OSCILACIONES AMORTIGUADAS



Si se satisface la ecuación : $b = \sqrt{4km}$

la condición se denomina

amortiguamiento crítico.

El sistema ya no oscila, sino que vuelve a su posición de equilibrio sin oscilar cuando se le desplaza y suelta.

Si *b es mayor que la condición crítica se denomina*

sobreamortiguamiento.

No hay oscilación, el sistema regresa al equilibrio más lentamente que con amortiguamiento crítico. Las soluciones de la ecuación de movimiento tienen la forma:

$$x(t) - C_1 e^{-a_1 t} + C_2 e^{-a_2 t}$$

Gráficas x(t):
a) Subamortiguado (celeste)
b) Críticamente amortiguadoo (rojo)
c) Sobreamortiguado (negro)

C_1 y C_2 son ctes. que dependen de las condiciones iniciales, y a_1 y a_2 son constantes determinadas por *m, k y b.*

OSCILACIONES FORZADAS Y RESONANCIA

Un oscilador amortiguado aislado deja de moverse tarde o temprano.
Se puede mantener una oscilación de amplitud constante aplicando una fuerza que varíe con el tiempo periódica o cíclicamente, con periodo y frecuencia definidos.
El caso de una persona en una hamaca puede mantenerse oscilando con amplitud constante dándole un empujoncito a la vez en cada ciclo.
Llamamos a esta fuerza adicional **fuerza impulsora.**

Oscilación amortiguada con una fuerza impulsora periódica

Si aplicamos a un oscilador armónico amortiguado una fuerza impulsora que varíe periódicamente con **frecuencia angular ω_d**, se obtiene una **oscilación forzada** **o** ***impulsada***, *diferente al movimiento que se da* con una **frecuencia angular natural ω'** *como se vio anteriormente.*

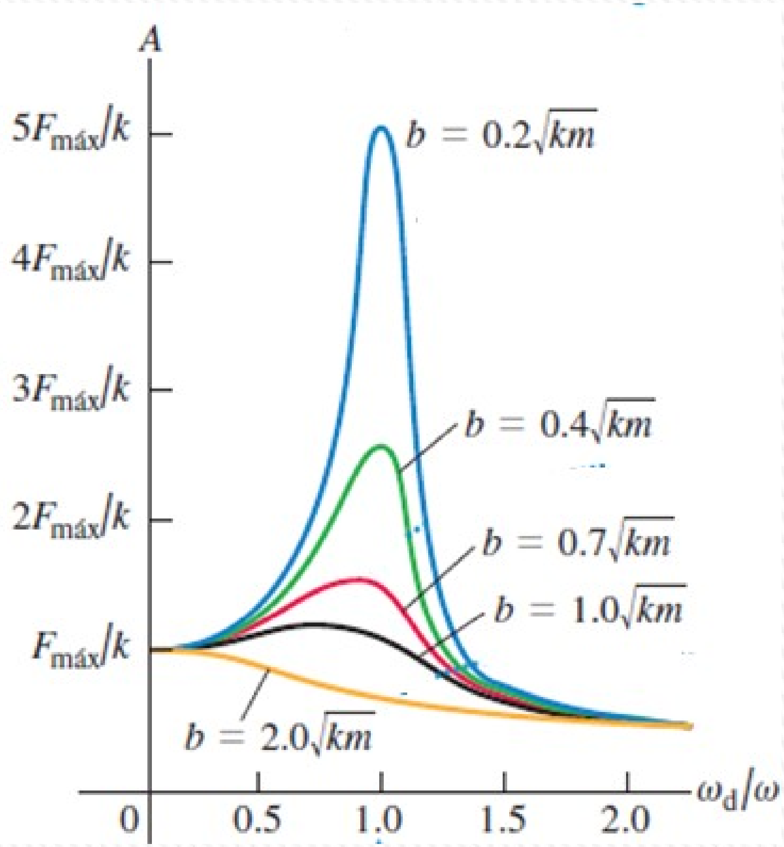
En este tipo la frecuencia angular de la masa oscilante es igual a la frecuencia angular ω_d, la cual *no tiene que ser igual a la frecuencia angular ω' con que el sistema oscilaría* sin una fuerza impulsora.

Oscilación amortiguada con una fuerza impulsora periódica

Supongamos que obligamos al oscilador a vibrar con una frecuencia angular ω_d casi *igual a la frecuencia angular ω' .*
La amplitud de la oscilación resultante es mayor que cuando las dos frecuencias son muy diferentes.

Caso más sencillo: fuerza impulsora *sinusoidal:* $F(t) = F_{máx} \cos \omega_d t$.

Al variar la frecuencia ω_d *de la fuerza impulsora, la amplitud* de la oscilación forzada resultante varía.



Cuando hay poco amortiguamiento*, la amplitud tiene un pico* marcado conforme ω_d se acerca a *ω'*.
Si aumenta el amortiguamiento (*b mayor), el pico* se ensancha y se hace más bajo, desplazándose hacia menores frecuencias.

Oscilación amortiguada con una fuerza impulsora periódica

La ecuación de movimiento es ahora:

$$F_{max}\cos\omega_d t - b\frac{dx}{dt} - kx = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

Se puede deducir una expresión que muestra cómo la amplitud *A de la oscilación* forzada depende de la frecuencia de una fuerza impulsora sinusoidal:

$$A = \frac{F_{máx}}{\sqrt{(k - m\omega_d^2)^2 + (b\omega_d)^2}}$$

Si $k = m\omega_d^2$ el primer término bajo el radical es cero y A tiene un máximo cerca de

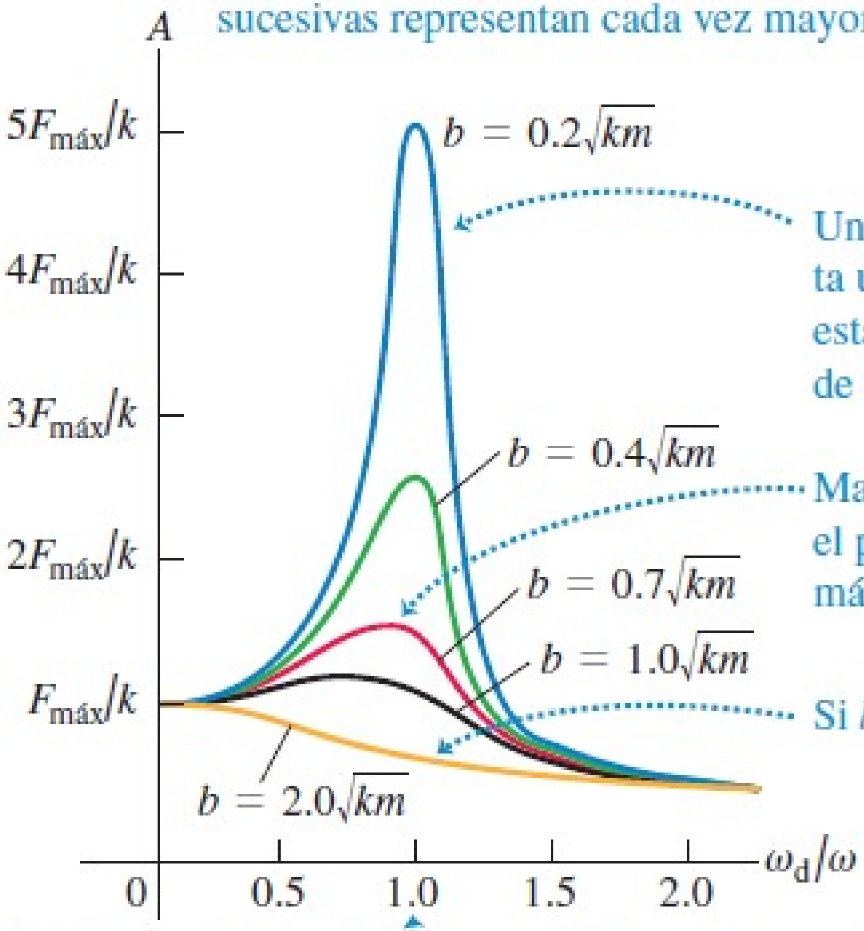
$$\omega_d = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

La altura de la curva en este punto es proporcional a 1/b; cuanto menor sea el amortiguamiento, más alto será el pico.

En el extremo de baja frecuencia, con $\omega_d = 0$, se tiene $A = F_{máx}/k$. Corresponde a una fuerza constante $F_{máx}$ y un desplazamiento constante $A = F_{máx}/k$ con respecto al equilibrio.

Oscilación amortiguada con una fuerza impulsora periódica

Cada curva muestra la amplitud A de un oscilador sujeto a una fuerza impulsora con diversas frecuencias angulares ω_d. Desde el azul hasta el dorado, las curvas sucesivas representan cada vez mayor amortiguamiento.



Un oscilador ligeramente amortiguado presenta un pico de resonancia puntiagudo, cuando ω_d está cerca de ω (la frecuencia angular natural de un oscilador no amortiguado).

Mayor amortiguamiento reduce y ensancha el pico, desplazándolo hacia frecuencias más bajas.

Si $b \geq \sqrt{2km}$, el pico desaparece por completo.

La frecuencia impulsora ω_d es igual a la frecuencia angular natural ω de un oscilador no amortiguado.

RESONANCIA Y SUS CONSECUENCIAS

El hecho de que haya un pico de amplitud a frecuencias impulsoras cercanas a la frecuencia natural del sistema se denomina **resonancia.**

Ejemplos de resonancia; aumentar las oscilaciones de un niño en una hamaca, empujando con una frecuencia igual a la frecuencia natural de la hamaca.
La resonancia también ocurre en los circuitos eléctricos (circuitos de sintonización).

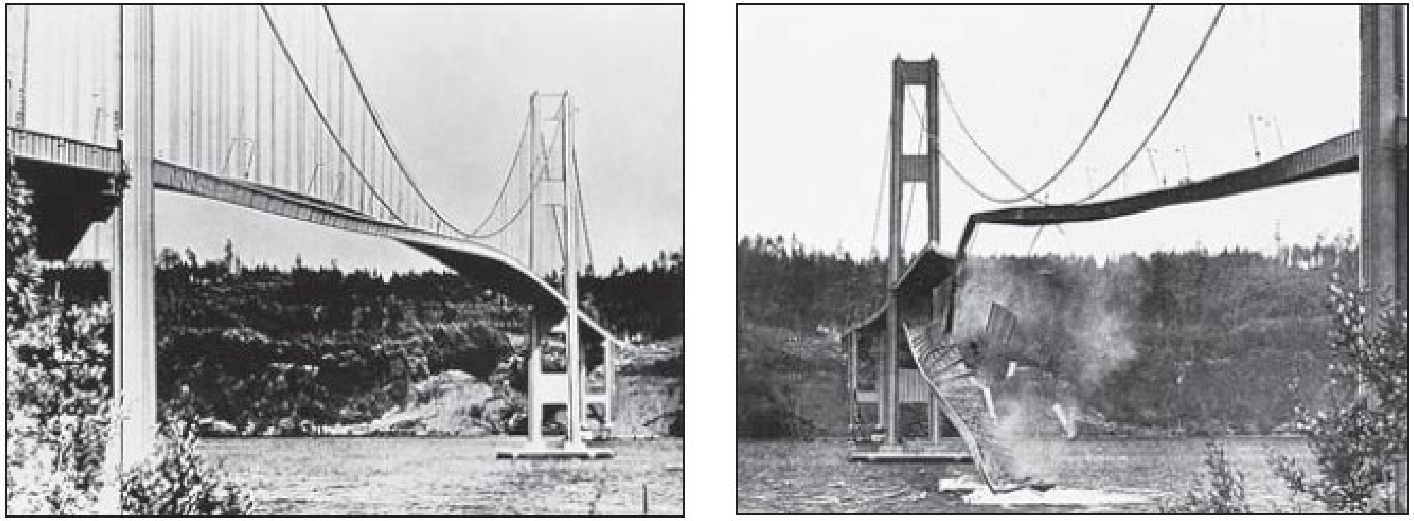
La resonancia en los sistemas mecánicos puede ser destructiva.
Un escuadrón de soldados una vez destruyó un puente marchando sobre él al mismo paso; la frecuencia de sus pasos era cercana a una frecuencia de vibración natural del puente, y la oscilación resultante tuvo suficiente amplitud para resquebrajar el puente. Desde entonces, se ha ordenado a los soldados que rompan el paso antes de cruzar un puente.
Hace algunos años, las vibraciones de los motores de cierto avión tuvieron justo la frecuencia adecuada para resonar con las frecuencias naturales de las alas. Las grandes oscilaciones se acumularon y, finalmente, las alas se desprendieron

RESONANCIA Y SUS CONSECUENCIAS

En 1940, el puente Tacoma Narrows, de Washington, fue destruido por vibraciones resonantes. Aunque los vientos no eran particularmente intensos en dicha ocasión, el "aleteo" del viento a través del camino (piense en el "aleteo" de una bandera frente a un viento fuerte) proporcionó una fuerza impulsora periódica cuya frecuencia emparejó con la del puente. Las oscilaciones del puente resultantes hicieron que a final de cuentas colapsara.

https://www.youtube.com/watch?v=SzObC64E2Ag

https://www.youtube.com/watch?v=yQ5ucPK2IEI



a) b)

Figura 15.24 a) En 1940 vientos turbulentos establecieron vibraciones de torsión en el puente Tacoma Narrows, haciendo que oscilara a una frecuencia cercana a una de las frecuencias naturales de la estructura del puente. b) Una vez establecida, esta condición de resonancia condujo al colapso del puente. (*UPI/Bettmann Newsphotos*)