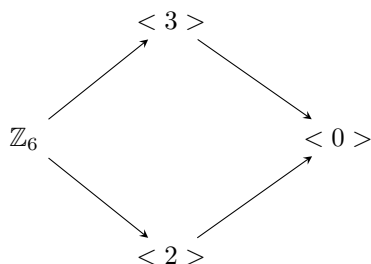
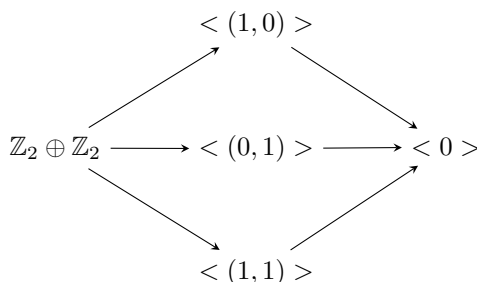


Soluciones - Práctico 2

1. (a) $\mathbb{Z}_4 \rightarrow \langle 2 \rangle \rightarrow \langle 0 \rangle$
 (b) $\mathbb{Z}_5 \rightarrow \langle 0 \rangle$



- (c)
 (d) $\mathbb{Z}_8 \rightarrow \langle 2 \rangle \rightarrow \langle 4 \rangle \rightarrow \langle 0 \rangle$



- (e) \mathbb{Z}_4 y $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ no son isomorfos porque el primero es cíclico, mientras que el segundo no.

2. • $HK < G \iff HK = KH$
 \implies) Sea $hk \in HK$. Como es subgrupo, $(hk)^{-1} \in HK$. Pero $(hk)^{-1} = k^{-1}h^{-1} \in KH$. Finalmente, como todo elemento de HK es opuesto de algún otro elemento, se deduce que $HK \subset KH$. Para la otra inclusión, tomar $kh \in KH$, entonces $kh = (h^{-1}k^{-1})^{-1}$, que es el inverso de un elemento de HK . Por tanto, $KH \subset HK$.
 \Leftarrow) $e \in HK$, veamos que es cerrado por la operación del grupo. Si $hk, h'k' \in HK$, entonces $hkh'h'k' = hh''k''k' \in HK$, donde usamos que $kh' = h''k''$ por ser iguales $HK = KH$. Por tanto $hkh'h'k' \in HK$
 • Probar que $HK \subset KH \implies HK = KH$
 Sea $kh \in KH$. Entonces $h^{-1}k^{-1} \in HK \subset KH$. Esto implica que KH es cerrado bajo la operación del grupo, es decir, es subgrupo (el neutro pertenece). Entonces de la parte anterior tenemos que $HK = KH$.

3. Ejercicio de Entrega

4. Por ejercicio 8 del práctico 1, $|gf| = |g||f|$. Además,

$$\langle f, g \rangle = \{f^a g^b : 0 \leq a \leq |f|, 0 \leq b \leq |g|\} \tag{1}$$

que tiene a lo sumo $|g||f|$ elementos; luego $\langle fg \rangle \subset \langle f, g \rangle$ y ambos tienen la misma cantidad de elementos. Por tanto fg genera $\langle f, g \rangle$

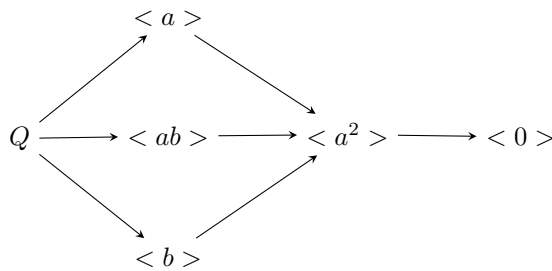
5. (a) $G_0 < G \times F$, $F_0 < G \times F$ trivial de las definiciones. Los mapas $\phi_G : G \rightarrow G_0$, $g \mapsto (g, 1)$ y $\phi_F : F \rightarrow F_0$, $f \mapsto (f, 1)$ son los isomorfismos buscados, y las propiedades $G_0 \cap F_0 = \{1\}$, $G_0 F_0 = G \times F$ son inmediatas.
- (b) Como $G = HK$, ϕ es sobreyectiva. Para probar inyectividad: $hk = h'k' \Leftrightarrow h'^{-1}h = k'k^{-1} \Leftrightarrow h'^{-1}h, k'k^{-1} \in H \cap K = \{1\}$, por tanto $h = h'.k = k'$.
6. Ídem a ejercicio 4. Usamos $(1, 1, 1, \dots, 1)$ como generador.
7. $\phi \in \text{Aut}(G) \Leftrightarrow G$ abeliano
 $fg = \phi(f^{-1})\phi(g^{-1}) = \phi(f^{-1}g^{-1}) = gf$, por tanto G abeliano.
8. Sea g tal que $G = \langle g \rangle$. Consideremos $\langle \phi(g) \rangle < G$. Como ϕ morfismo, $\phi(\langle g \rangle) = \langle \phi(g) \rangle$, por tanto la ecuación anterior resulta $\phi(G) < G$. Al ser automorfismo, es sobreyectiva; luego $\phi(G) = G$. Esto implica que $\phi(g)$ es generador.
 Recíprocamente, sea f otro generador. Definimos $\phi(1) = 1, \phi(g) = f$, y se cumplen las ecuaciones. anteriores.
9. • $\text{Aut}\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_2$: sea $\phi \in \text{Aut}\mathbb{Z}$. Por ejercicio anterior, $\phi(1)$ debe ser generador. Como los únicos generadores son $1, -1$ tenemos dos posibilidades. Basta ver que $\phi(1) = -1$ da lugar a un morfismo, y esto último es claro por el ejercicio 7.
- $\text{Aut}\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}_n^\times$: $\phi(1)$ debe ser generador (pues 1 lo es), así que $\phi(1) = r$, con r coprimo con n (pues son números para los que el conjunto $\{r, 2r, 3r, \dots, nr\}$ es un conjunto completo de restos para n). Notemos por ϕ_r al morfismo que asocia $\phi(1) = r$. Entoces, veamos que $\phi_r \mapsto r \in \mathbb{Z}_n^\times$ es un morfismo biyectivo:
- $\phi_1(1) = 1$, así que es la identidad: $\phi_1(n) = n\phi_1(1) = n$.
 - $\phi_r(\phi_s(1)) = \phi_r(s) = rs = \phi_{rs}(1)$, pues recordar que si r, s son coprimos con n , entonces rs también lo es.
- Entonces el mapa $\phi_r \mapsto r$ es un morfismo. Como la cantidad de elementos de $\text{Aut}\mathbb{Z}_n$ es la misma que la de \mathbb{Z}_n^\times , tenemos biyectividad.
- $\text{Aut}\mathbb{Z}_5 \simeq \mathbb{Z}_4$: basta ver que $\mathbb{Z}_5^\times \simeq \mathbb{Z}_4$. Para esto, observar que $\mathbb{Z}_5^\times = \{1, 2, 3, 4\}$, es cíclico, generado por el 2. Luego, como todo grupo de orden 4 cíclico es isomorfo a \mathbb{Z}_4 (práctico 1), se deduce que $\text{Aut}\mathbb{Z}_5 \simeq \mathbb{Z}_4$.
- $\text{Aut}\mathbb{Z}_6 \simeq \mathbb{Z}_2$: $\mathbb{Z}_6^\times = \{1, 5\}$, grupo de orden 2, y por tanto \mathbb{Z}_2 .
- $\text{Aut}\mathbb{Z}_8 \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$: observar que $\mathbb{Z}_8^\times = \{1, 3, 5, 7\}$ no es cíclico, así que por la clasificación de grupos de orden 4 debe ser isomorfo a $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$.
10. Ejercicio de Entrega
11. (a) • $\phi : H/H \cap K \rightarrow G/K$ tal que $\phi(h(H \cap K)) = hK$ está bien definida. $hK = h'K$ implica que $h^{-1}h' \in K$, entonces $h^{-1}h' \in H \cap K$ y por lo tanto están en la misma coclase en $H/H \cap K$, es decir, $hH \cap K = h'H \cap K$. Esto implica que está bien definida y que es inyectiva.
- Como la función es inyectiva, entonces $\text{Card}(G/K) > \text{Card}(H/H \cap K)$, de donde se deduce el resultado.
- (b) Basta probar que el mapa ϕ de la parte anterior es sobreyectivo sii $G = HK$.
 \Rightarrow si ϕ sobreyectivo, entonces toda coclase es alcanzada por la imagen de ϕ . Por tanto $G = HK$. \Leftarrow si $G = HK$, cualquier coclase en G/K es de la forma hK , por tanto es alcanzado por ϕ .
12. (a) Tenemos $H \cap K < H, K < G$. Como $[G : K]$ finito, entonces $[H : K \cap H] \leq [G : K]$ finito. Además, $[G : H]$ finito. Luego, $[G : H \cap K]$ finito. Además, $[G : H \cap K] = [G : H][H : H \cap K] \leq [G : H][G : K]$.
- (b) Vale la igualdad si y sólo si (por la parte anterior saturando la igualdad) $[H : K \cap H] = [G : K]$, y esto último por el ejercicio anterior es equivalente a $G = HK$.

(c) $[G : K][K : H \cap K] = [G : H \cap K] = [G : H][H : H \cap K]$, así que $[G : H]$ y $[G : K]$ dividen a $[G : H \cap K]$. Como son coprimos, $[G : H][G : K] \mid [G : H \cap K] \leq [G : H][G : K]$, por tanto vale la igualdad.

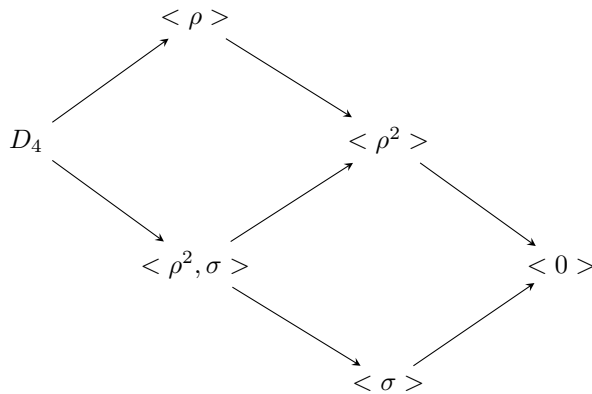
13. Sea G grupo de orden 4, no cíclico. Sea $g \in G$ distinto del neutro. Por el teorema de Lagrange, $|g| = 1, 2, 4$, pues debe ser un divisor positivo de 4. Como el grupo no es cíclico y $g \neq e$, $|g| = 2$. Luego, todo elemento no neutro tiene orden 2. Pr ej. 4 del práctico 1, tenemos que el grupo es abeliano. Sea h otro elemento no nulo.

Entonces, $2 = [\langle h \rangle : \langle h \rangle \cap \langle g \rangle] \leq [G : \langle g \rangle] = 2$, así que vale la igualdad, y por el ejercicio anterior $G = \langle h \rangle \langle g \rangle$.

Luego, Un grupo de orden 4 no cíclico es isomorfo a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$



14.



15. Consideremos $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{Z}_2$ dada por $\phi(\tau) = 0$ si es directa o 1 si no es directa. Este morfismo está bien definido, gracias a las propiedades de las simetrías y la orientación de \mathbb{R}^2 . Luego, $\hat{\phi} : \mathcal{M}/\mathcal{M}_+ \rightarrow \mathbb{Z}_2$ es un automorfismo, pues es sobreyectivo y por los teoremas de isomorfismos es biyectivo ($\ker \hat{\phi} = \mathcal{M}_+$).

Si $G < \mathcal{M}$, tenemos que $\phi(G) < \mathbb{Z}_2$, de donde salen dos posibilidades:

- $\phi(G) = 0$, entonces $G < \ker \phi = \mathcal{M}_+$.
- $\phi(G) = \mathbb{Z}_2$, entonces $\hat{\phi}|_G : G/G \cap \mathcal{M}_+ \rightarrow \mathbb{Z}_2$ es isomorfismo, de donde se deduce $[G : G \cap \mathcal{M}_+] = 2$.