Bioestadística (Clase 1):

Probabilidad y Conteo

Ernesto Mordecki

CMAT, Facultad de Ciencias, Universidad de la República.

Uruguay

Contenidos de la clase

Experimentos aleatorios

Probabilidad

Ejemplo: los dos dados

Conteo: regla del producto

Conteo: permutaciones

Experimentos aleatorios

- Nos interesa un experimento producido bajo una determinada cantidad de condiciones
- El resultado de este experimento podría tener un único resultado (ejemplo: enfriar agua a cero grados a presión atmosférica normal tiene como resultado el congelamiento del agua)
- En algunos casos, los resultados posibles forman una lista, y a priori no hay forma de saber cuál será el resultado del experimento (ejemplo: tirar un dado)
- En el segundo caso estamos en presencia de un experimento aleatorio

Probabilidad

- Listamos el conjunto de resultados posibles en un conjunto Ω[1], que llamamos espacio muestral. Ejemplo:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

- El número de resultados posibles en este caso en $N = 6$
- Cuando todos los resultados de un experimento aleatorio son equivalentes, simétricos, le asignamos a cada uno una probalidad de $1/N$, en el ejemplo cada resultado simple tiene probabilidad 1/6.
- Tenemos además sucesos compuestos por varios resultados.

[1] Legra griega mayúscula: Omega

- Por ejemplo el suceso A consiste en ejemplo en obtener un resultado par. Entonces

$$A = \{2, 4, 6\}$$

- En ese caso para calcular la probabilidad tenemos que contar los elementos del suceso A y los del espacio Ω, y definimos la probabilidad del suceso A mediante

$$P(A) = \frac{\text{cantidad de elementos de } A}{\text{cantidad de elementos de } \Omega}$$

- Esta definición se parafrasea como casos favorables sobre casos posibles y fue dada por P. S. de Laplace en 1812.

- En nuestro ejemplo A tiene 3 elementos, y Ω tiene 6, entonces

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Ejemplo: los dos dados

- Suponemos ahora que tiramos un dado **negro** y un dado rojo:

- ¿Cuántos resultados posibles tenemos?
- ¿Cuál es el espacio muestral Ω?

Espacio muestral del experimento de tirar dos dados:

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Cuadro: Todos los posibles resultados de tirar 2 dados donde uno tiene los números en rojo y otro en negro.

- Para calcular[2] la cantidad de resultados de Ω multiplicamos
$$6 \times 6 = 36$$

[2]Se aplica aquí la regla del producto

En este espacio nos interesa calcular probabilidades de algunos sucesos:

- Probabilidad de que haya algún resultado 1:

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Cuadro: En azul se indican los casos favorable: ¿cuántos son?

$$P(\text{algún } 1) = \frac{11}{36}$$

¿Apostarías a que sale algún uno?

- Probabilidad de la suma sea 6:

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Cuadro: En azul se indican los casos de suma 6: ¿cuántos son?

$$P(\text{suma } 6) = \frac{5}{36}$$

¿Cuál es la suma mas probable?

Conteo: regla del producto

- Como vimos, para calcular probabilidades tenemos que contar los resultados de los sucesos que nos interesan.

- Para eso se desarrollan algunas técnicas que nos ayudan en situaciones complejas

- La regla del producto se aplica cuando tenemos que los resultados dependen de dos características, por ejemplo contar los resultados de tirar dos dados: 6×6

- Si queremos contar los números pares de dos cifras, con números del 0 al 6: un números de esos es

$$C_1 \; C_2$$

  donde $C_1 = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ y $C_2 = 0, 2, 4, 6$. Tenemos entonces $6 \times 4 = 24$ casos.

Problema: Calcular la probabilidad del suceso A consistente en obtener un número par de dos cifras con números del 0 al 6 al elegirlo al azar entre todos los números de dos cifras[3].

- Calculamos el numerador (casos favorables) que era 24
- Cuantos números hay en Ω?
- Tenemos ahora
$$C_1 \, C_2$$
donde $C_1 = 1, \ldots, 9$ y $C_2 = 0, \ldots, 9$. Tenemos entonces $9 \times 10 = 90$ casos posibles.
$$P(A) = \frac{24}{90} = \frac{4}{15}$$
- ¿Cuántas veces aplicamos la regla del producto?

[3] Corregido del original

Problema de ADN:

¿Cuantas tiras de letras distintas obtenemos poniendo las letras A, T, C, G en N lugares?

- La primer letra puede ser cualquiera de cuatro
- La segunda también: $4 \times 4 = 16$
- La tercera daría $4 \times 4 \times 4 = 4^3 = 64$
- Si fuesen N lugares tenemos

$$\underbrace{4 \times 4 \times \cdots \times 4}_{N} = 4^N.$$

- ¿Cuánto vale N en un problema de biología humana?
- Los cromosomas humanos tienen entre N=50 000 000 a N=300 000 000 pares de bases

Conteo: permutaciones

Este es nuestro problema:

- ¿De cuantas formas distintas pueden sentarse 20 estudiantes en 20 sillas?
- Como parece un poco difícil, empezamos con dos estudiantes, digamos A (Alicia) y B (Beto):

- Son dos formas:

$$A\,B, \qquad B\,A.$$

Llega Carlos. Tenemos para cada una de las dos formas anteriores, las siguientes tres posibilidades:

$$C\ A\ B, \qquad A\ C\ B, \qquad A\ B\ C.$$

$$C\ B\ A, \qquad B\ C\ A, \qquad B\ A\ C.$$

Entonces, tenemos tres formas (izquierda, centro y derecha) para cada una de las dos primeras posibilidades:

$$3 \times 2 = 6.$$

- ¿Qué regla estamos aplicando?
- ¿Qué ocurre cuando llega Daniela?

- Tenemos seis formas de sentarse tres estudiantes, supongamos que una de ella es $X\ X\ X$ (no importa cual)
- ¿En cuantos lugares distintos se puede sentar Daniela?

$$D\ X\ X\ X \qquad X\ D\ X\ X \qquad X\ X\ D\ X \qquad X\ X\ X\ D$$

- Aplicando la regla del producto, tenemos

$$4 \times 6 = 24$$

formas distintas de que se sienten cuatro estudiantes.

- Además, la cuenta total que hicimos es

$$4 \times 3 \times 2 = 24.$$

- Al llegar Emilio, tenemos

$$5 \times 24 = 120$$

formas de sentarse.

- Y para nuestros **veinte** estudiantes tenemos

$$20 \times 19 \times 18 \times \cdots \times 3 \times 2 = 479001600 = 4{,}8 \times 10^7$$

- Unos quinientos millones: 500 000 000.

Definición. Llamamos permutaciones de n elementos a la cantidad de formas de ordenar n elementos en una lista.

- Las permutaciones de n se designan mediante el símbolo $n!$ (se lee n factorial)

- Según calculamos

$$2! = 2, \qquad 3! = 6, \qquad 4! = 24,$$

- Mas en general

$$n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 3 \times 2.$$

- Además se cumple

$$n! = n \times (n-1)!$$