Si uno pregunta la solución de un problema,

el conocimiento NO permanece.

Es como si uno lo hubiera pedido prestado.

En cambio, si lo piensa uno,

es como haberlo adquirido para siempre.

ADRIAN PAENZA

La clase de hoy la dedicamos a:

Adrián Paenza y Emanuel (Manu) Ginóbili.

Bioestadística (Clase 2):

Combinaciones

Ernesto Mordecki

CMAT, Facultad de Ciencias, Universidad de la República.

Uruguay

Contenidos de la clase

Permutaciones (repaso)

Combinaciones

Paseo al azar y triangulo de Pascal

Permutaciones (repaso)

Definición. Llamamos permutaciones de n elementos a la cantidad de formas de ordenar n elementos en una lista.

- Las permutaciones de n se designan mediante el símbolo $n!$ (se lee n factorial)
- Definimos $0! = 1$ (para darle coherencia a las notaciones)
- Calculamos la clase pasada que:

$$n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 3 \times 2.$$

- Además se cumple

$$n! = n \times (n-1)!$$

Aplicación

- ¿De cuantas formas distintas pueden sentarse 2 estudiantes en 2 sillas, digamos A (Alicia) y B (Beto)?:

- Son dos formas:

$$A\,B, \qquad B\,A.$$

Si son por ejemplo Alicia, Beto, Carlos, Daniela y Emilio (**5** estudiantes) tenemos

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$$

formas distintas de sentarse en 5 sillas.

Combinaciones

- El 23 de agosto de 2004, Ruben Magnano, entrenador de la selección argentina de Basketball no podía dormir.
- Al día siguiente, debía enfrentar en la final por la medalla de oro en Atenas, al equipo de Estados Unidos.
- No se decidía por la formación inicial: tenía que elegir 5 jugadores entre 12.
- ¿Tendría que integrar al inicio a Manu Ginóbili, o hacerlo jugar de 6 como en San Antonio Spurs?
- ¿Cuántos equipos distintos podría formar?

- Como sabía permutaciones, imaginó ordenados sus 12 jugadores en fila. Sabía que eso podía hacerse de 12! formas distintas.

- Luego imaginó que los 5 primeros jugadores de la fila serían el equipo titular, y los últimos 7 los suplentes

- Entonces pensó que habían 12! equipos diferentes.
- Como no conciliaba el sueño, se dió cuenta que muchas de esas permutaciones producían el mismo equipo, los equipos posibles diferentes eran menos. ¿pero cuántos menos?
- Y se dió cuenta que el mismo equipo inicial aparecía 5! veces . . . tenía que dividir 12! entre 5!

- Pero lo mismo pasaba con los suplentes, que eran 7. Tenía que dividir también por 7!
- Llegó a la conclusión de que tenía

$$E = \frac{12!}{5!7!} = 792$$

equipos posibles.

- De otra forma:
  - Sea E la cantidad de equipos posibles
  - Si multiplicamos E por $5!$ obtenemos todos los ordenes posibles de los titulares.
  - Si multiplicamos el resultado por $7!$ obtenemos además todos los posibles ordenes de los suplentes.
  - El resultado es $E \times 5! \times 7!$ produce todas las $12!$ ordenaciones posibles de todos los jugadores (digamos que todas las fotos posibles)

  Despejando

  $$E \times 5! \times 7! = 12!$$

  obtenemos la fórmula.

Combinaciones

Definición. Llamamos combinaciones de n elementos tomados de a k a la cantidad de subconjuntos posibles de k elementos de un conjunto de n elementos. Ese número lo escribimos como $\binom{n}{k}$.

Observaciones

- Un argumento general como al anterior nos permite afirmar que
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

- Se verifica además
$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$
(es lo mismo elegir los titulares que elegir los suplentes)

Paseo al azar y triangulo de Pascal

- Consideremos una partícula que se desplaza, una unidad para arriba o para abajo en cada instante de tiempo:
- Llamamos paseo al azar a cada posible trayectoria.

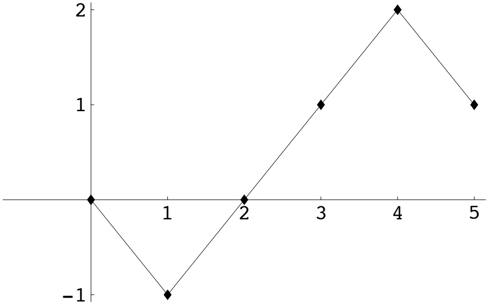
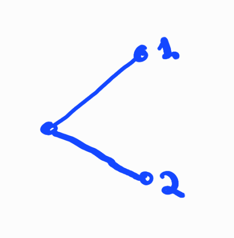


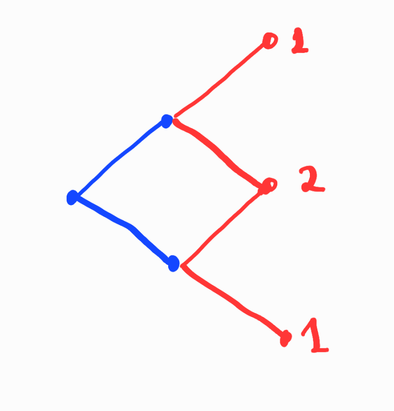
Figura: Una trayectoria del paseo al azar

Contemos la cantidad de paseos posibles en n pasos

- Si tenemos $n = 1$ paso son 2 caminos posibilidades.

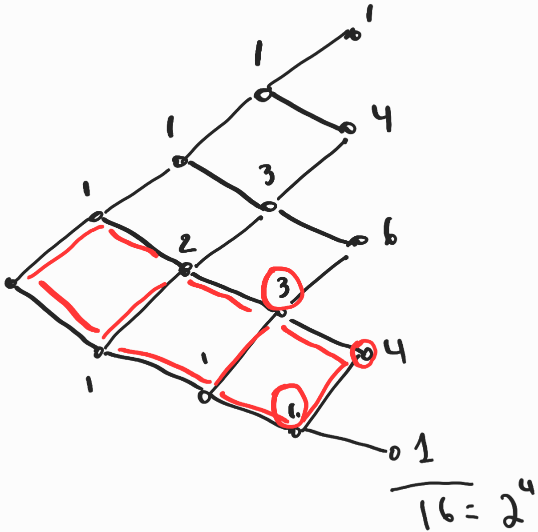


- Si tenemos $n = 2$ (dos pasos)...



- Tenemos 3 destinos finales, al primero llega un camino, al segundo 2, al tercero 1, en total 4 caminos.

- Si tenemos cuatro pasos:



- En síntesos, en en n pasos la particula puede recorrer 2^n caminos diferentes
- La idea es que en cada paso la partícula sube o baja, y se aplica la regla del producto.
- Supongamos que queremos numerar cada uno de estos caminos:
    - Cada camino tienen un número de n dígitos
    - Si en el paso sube ponemos 1, si en el paso baja, ponemos un 0.

- Por ejemplo si $n = 4$
  - el número 1111 corresponde al camino que sube las 4 veces
  - el número 0000 corresponde al camino que baja las 4 veces
  - el número 0101 corresponde al que baja-sube-baja-sube
- Es claro que la cantidad de tiras posibles de 0 y 1 corresponde a la cantidad de caminos posibles.
- Tenemos entonces 2^n tiras de ceros y unos.

Nos interesa calcular la cantidad de caminos diferentes que conducen a una altura dada en una cantidad de pasos n

- Si un camino tiene la misma cantidad de ceros y unos, llegará a la misma altura.

- Nuestro problema es contar de cuantas formas distintas se pueden disponer k unos en n lugares:

$$\underbrace{\underline{0}\ \underline{0}\ \underline{1}\ \underline{0}\ \underline{1}\ \underline{0}\ \underline{1}}_{7 \text{ lugares}}$$

$$C^7_3 = \frac{7!}{3!\,4!} = 35$$

Si representamos estas cantidades en una tabla obtenemos el triángulo de Pascal:

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 **10** + **5** 1

1 6 15 20 **15** 6 1

- La regla de formación de este triángulo es que cada línea se obtiene de la superior sumando los dos números que se encuentran arriba a la derecha y a la izquierda
- Por ejemplo $15 = 5 + 10$.
- Estos números cuentan la cantidad de caminos posibles por los que la partícula llega a las diferentes alturas en n pasos, que son $\binom{n}{k}$
- Como la cantidad total de caminos que puede seguir la partícula es 2^n, y la cantidad de subidas posibles es $0, 1, 2, \dots, n$, obtenemos

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{k} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$$

- Por ejemplo

$$1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 2^6 = 64.$$

- Además vemos nuevamente que

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

  porque los caminos que suben k veces son la misma cantidad que los que bajan k veces

- Obtenemos además la regla de formación:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

  llamada fórmula de Stieffel