Bioestadística (Clase 3):

Propiedades de la probabilidad, probabilidad condicional

Ernesto Mordecki

CMAT, Facultad de Ciencias, Universidad de la República.

Uruguay

Contenidos de la clase

Probabilidad

Propiedades de la probabilidad
- Montonía
- Unión de sucesos
- Complemento

Probabilidad condicional

Fórmula de la probabilidad total

Experimentos aleatorios

- Nos interesa un experimento producido bajo una determinada cantidad de condiciones
- Cuando los resultados posibles forman una lista, y a priori no hay forma de saber cuál será el resultado del experimento (ejemplo: tirar un dado) estamos en presencia de un experimento aleatorio.
- Ejemplo: tirar un dado.

Probabilidad

- Listamos el conjunto de resultados posibles en un conjunto Ω, que llamamos espacio muestral. Ejemplo:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

- El número de resultados posibles en este caso en $N = 6$
- Cuando todos los resultados de un experimento aleatorio son equivalentes, simétricos, le asignamos a cada uno una probalidad de $1/N$, en el ejemplo cada resultado simple tiene probabilidad 1/6.
- Tenemos además sucesos compuestos por varios resultados.

- Por ejemplo el suceso A consiste en ejemplo en obtener un resultado par. Entonces

$$A = \{2, 4, 6\}$$

- En ese caso para calcular la probabilidad tenemos que contar los elementos del suceso A y los del espacio Ω, y definimos la probabilidad del suceso A mediante

$$\boxed{P(A) = \frac{\text{cantidad de elementos de } A}{\text{cantidad de elementos de } \Omega} = \frac{|A|}{|\Omega|}}$$

- Esta definición se parafrasea como casos favorables sobre casos posibles y fue dada por P. S. de Laplace en 1812.

- En nuestro ejemplo A tiene 3 elementos, y Ω tiene 6, entonces

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Observaciones

- La probabilidad es no negativa y menor o igual que 1. Para cualquier suceso A tenemos
$$0 \leq P(A) \leq 1.$$
- Como el conjunto vacío $\emptyset$ es un subconjunto de Ω sin elementos, tenemos que su probabilidad es nula, es decir $P(\emptyset) = 0$. Es por ésto que lo llamamos suceso imposible.
- Por otra parte obtenemos que $P(\Omega) = 1$, por lo que llamamos suceso seguro al espacio de sucesos elementales Ω.

Propiedades de la probabilidad

- La unión de los sucesos A y B son los puntos que componen A o B.
- La intersección de los sucesos A y B son los puntos que componen A y B.
- Dados A y B, designamos mediante $A \cup B$ su unión, y $A \cap B$ a su intersección.
- Cuando los conjuntos no contienen puntos comunes, decimos que son sucesos disjuntos. Escribimos en este caso
$$A \cap B = \emptyset.$$

Ejemplo. Tiremos un dado, y designemos

- A el suceso de obtener una cantidad par de puntos;
- B una cantidad múltipo de tres.
- El suceso $A = \{2, 4, 6\}$, mientras que $B = \{3, 6\}$. Por eso

$$A \cup B = \{2, 3, 4, 6\}.$$

- El resultado 6 aparece en ambos sucesos, no son disjuntos:
- La intersección de A y B es el suceso 6, es decir

$$A \cap B = \{6\}.$$

Monotonía

- Si un suceso B tiene todos los puntos de otro A y eventualmente más, decimos que B contiene a A y escribimos
$$A \subset B.$$
- Como tiene más puntos (o la misma cantidad), tenemos $|A| \leq |B|$.
- De aquí tenemos
$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} \leq \frac{|B|}{|\Omega|} = P(B).$$

Probabilidad de la unión de suscesos

Propiedad. Si la unión de dos sucesos A y B es disjunta, su probabilidad es la suma de las respectivas probabilidades. Es decir, si $A \cap B = \emptyset$, tenemos

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B).}$$

Demostración. Si A y B no tienen puntos en común, se tiene

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

Por eso

$$P(A \cup B) = \frac{|A| + |B|}{|\Omega|} = \frac{|A|}{|\Omega|} + \frac{|B|}{|\Omega|} = P(A) + P(B)$$

$\square$

¿Qué pasa con tres conjuntos?

- Supongamos que A, B y C no tienen puntos en común.
- Consideramos $D = B \cup C$ que no tiene puntos en común con A. Eso nos da

$$P(A \cup B \cup C) = P(A \cup D) = P(A) + P(D)$$

- Además

$$P(D) = P(B) + P(C)$$

- Si sustituimos la última igualdad, tenemos

$$\boxed{P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C).}$$

Partición de un conjunto

- Supongamos que Ω se compone de n conjuntos que no tienen puntos en común, llamados $A_1, \ldots A_n$.
- Estamos diciendo que

$$\Omega = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n.$$

- y que

$$A_i \cup A_j = \emptyset \quad \text{siempre que } i \neq j$$

- Como $P(\Omega) = 1$, un razonamiento análogo nos da

$$P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) = 1.$$

Probabilidad del complemento de un suceso

- El complemento de un suceso A contiene todos los puntos que no están en A,
- Lo designamos A^c.
- Tenemos
$$\Omega = A \cup A^c.$$
- Además, son disjuntos, no tienen puntos en común. Entonces, por la propiedad anterior
$$1 = P(\Omega) = P(A) + P(A^c)$$
- Despejando
$$\boxed{P(A^c) = 1 - P(A)}$$
- A y A^c son una partición de Ω.

Probabilidad condicional

Definición. Dados dos sucesos A y B, con $P(B) > 0$ definimos la probabilidad condicional de A dado B, mediante

$$\boxed{P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$$

Nota: Precisamos que $P(B) > 0$ porque aparece en el denominador
Es útil escribir la fórmula anterior como:

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A \mid B) \times P(B).}$$

que llamamos la fórmula dos.

Comentarios

- La probabilidad condicional se interpreta como la probabilidad de que ocurra A cuando sabemos que ocurre B.
- Es como pensar que el espacio de probabilidad es B (porque no ocurren puntos fuera de B)
- Por eso contamos los puntos de A que están en B, y dividimos por los de B.

Ejemplo

Supongamos que tiramos el dado negro y el rojo, y consideramos los sucesos:

- $A = \{$el producto es 10$\}$.
- $B = \{$la suma de los dados es 7$\}$.

Pregunta: Calcular e interpretar $P(A \mid B)$.

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Cuadro: En verde las sumas 7, en violeta los productos 10

Solución Tenemos

- $P(A) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$
- $P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.
- $P(A \cap B) = P(A) = \frac{1}{18}$

$$P(A \mid B) = \frac{1/18}{1/6} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}.$$

- Ocurre que sabemos que ocurre B (la suma es 7), entonces tenemos 2 casos favorables en 6 posibles.

Fórmula de la probabilidad total

Ejemplo: Supongamos que se hacen test de covid. El espacio de resultados posibles Ω se divide en cuatro categorías:

- Los verdaderos positivos: el test da positivo y el paciente está enfermo.
- Los falsos positivos: el test da positivo pero el paciente no está enfermo.
- Los verdaderos negativos: el test da negativo y el paciente está sano.
- Los falsos negativos: el test da negativo pero el paciente está enfermo

Alternativamente Ω se divide en S (estar sano) y $S^c = E$ (estar enfermo), y también test positivo T^+ y test negativo T^-.

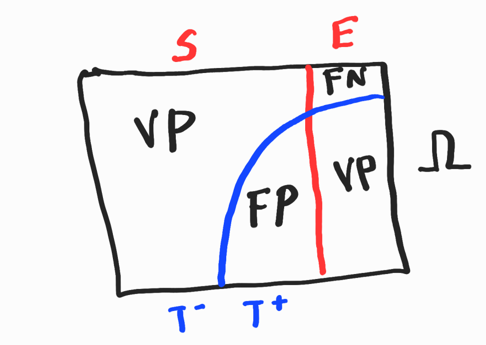
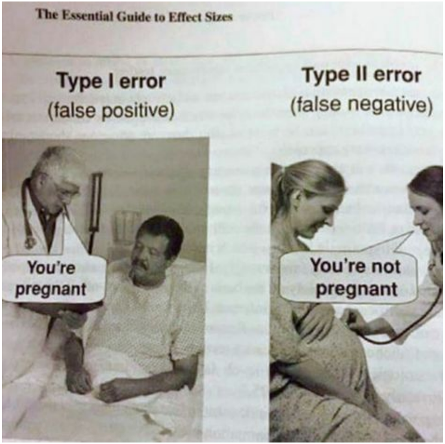


Figura: El espacio se divide en cuatro

Dos situaciones ¿posibles?



Tenemos que los positivos se dividen en 2:

$$T^+ = VP \cup FP = (E \cap T^+) \cup (S \cap T^+)$$

Como estas dos clases son disjuntas, tenemos

$$P(T^+) = P(E \cap T^+) + P(S \cap T^+)$$

Aplicando ahora la “fórmula dos”[1], tenemos

$$\boxed{P(T^+) = P(E \mid T^+)P(T^+) + P(S \mid T^+)P(T^+)}$$

Esta expresión se llama fórmula de la probabilidad total.
Veamos su formulación general.

[1] $P(A \cap B) = P(A \mid B) \times P(B)$

Fórmula de la probabilidad total

- Supongamos que el espacio Ω se particiona en los conjuntos $A_1, \ldots, A_n$.
- Supongamos que tenemos un suceso de interés B.
- La fórmula de la probabilidad total nos permite calcular B mediante

$$\boxed{P(B) = P(B \mid A_1)P(A_1) + \cdots + P(B \mid A_n)P(A_n)}$$

que se llama fórmula de la probabilidad total.

Ejemplo

- El próximo jueves 2 Uruguay enfrenta a Perú por las eliminatorias sudamericanas.
- Supongamos que Uruguay tirará un penal, nos interesa saber cual es la probabilidad de que se convierta en gol, sea
$$B = \{\text{se convierte el gol}\}$$
- Habitualmente los penales los tira Suarez (que tiene una probabilidad de convertir de 0.95), Cavani (que tiene una probabilidad de convertir de 0.90) o un tercer jugador, que tiene una probabilidad de convertir de 0.60.

- Como no sabemos quien va a tirar, les asignamos una probabilidad de 1/3 a cada evento (tira S, tira C, tira T). Es decir
$$\Omega = S \cup C \cup T.$$
- Podemos calcular la probabilidad de B mediante
$$\begin{aligned} P(B) &= P(B \mid S)P(S) + P(B \mid C)P(C) + P(B \mid T)P(T) \\ &= 0{,}95 \times \frac{1}{3} + 0{,}90 \times \frac{1}{3} + 0{,}60 \times \frac{1}{3} = \mathbf{0.82} \end{aligned}$$