Clase 9 de Bioestadística

Esperanza de una variable aleatoria

Ernesto Mordecki

CMAT, Facultad de Ciencias, Universidad de la República.

Uruguay

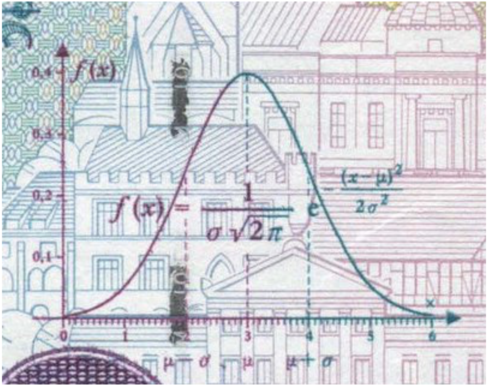
Contenidos de la clase

- Variable aleatoria normal (repaso)
  - Estandarización
- Esperanza
  - Esperanza de una variable aleatoria discreta
  - Esperanza de una variable uniforme
  - Esperanza de una variable de Bernoulli
  - Esperanza de una variable aleatoria Binomial
  - Esperanza de una variable geométrica
  - Esperanza de una variable de Poisson

Variable aleatoria normal (repaso)

Definición: Una variable aleatoria X es **normal** o **gaussiana** con parámetros μ y σ^2 si tiene densidad dada por

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}.$$



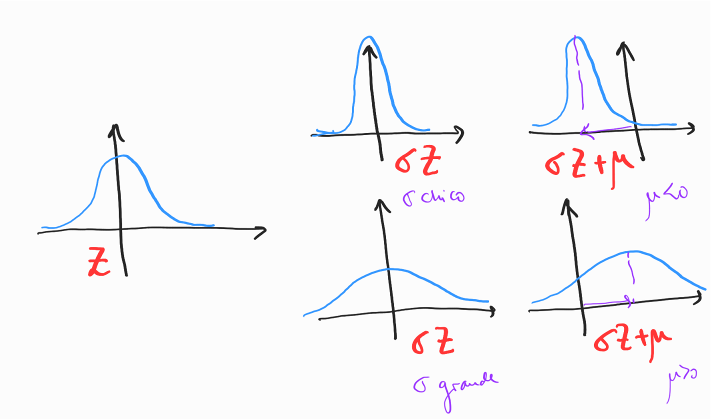
Los parámetros

- El parámetro de posición μ indica el punto de mayor densidad
- El parámetro de escala σ indica la concentración de la probabilidad alrededor de μ:
  - Si σ es pequeño, hay gran concentración,
  - Si σ es grande, hay gran dispersión
- Cuando $\mu = 0$ y $\sigma = 1$ tenemos una variable normal estándar

- La notación es
$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$
se lee
  - X tiene distribución normal con parámetros μ, σ^2,
  - X es normal μ, σ^2.
- Para las normales estándar usamos la letra Z, es decir
$$Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

Estandarización

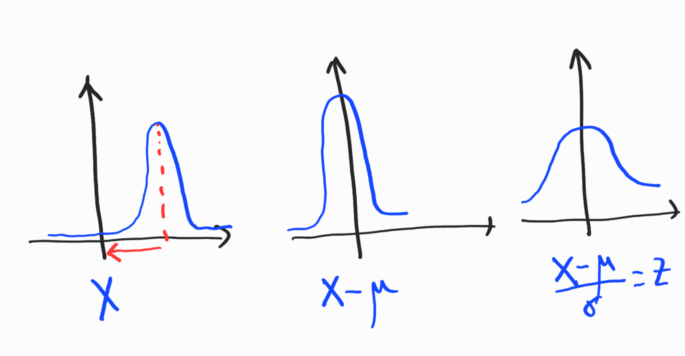
Es el pasaje de una normal estándar $(0, 1)$ a una (μ, σ^2):



Entonces

$$Z \sim \mathcal{N}(0, 1) \qquad \text{implica} \qquad X = \sigma Z + \mu \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$

Ahora pasamos de $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ a $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$



Entonces

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \qquad \text{implica} \qquad Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

Esperanza

- Queremos definir un número que represente el resultado de un experimento aleatorio
- Buscamos entonces un valor central, o medio, que pueda representar el experimento antes que este se realice.
- Si tenemos una variable normal, ese número podría ser μ
- ¿Cómo hacemos con una variable aleatoria genérica X?

Definición Llamamos esperanza de una variable aleatoria X al número $E(X)$ definido como

$$E(X) = \sum_{k} x_k P(X = x_k)$$

si X es una variable discreta y

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

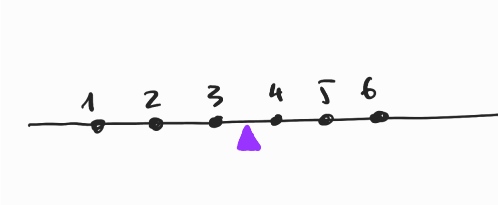
donde f es la densidad de X

También se llama esperanza matemática, o valor esperado.

Esperanza de una variable aleatoria discreta

Supongamos que X es el resultado de tirar un dado. Tenemos

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \sum_k x_k P(X = x_k) \\
&= 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + \cdots + 6 \times \frac{1}{6} \\
&= \frac{1}{6}(1 + \cdots + 6) = \frac{1}{6}\left(\frac{6 \times 7}{2}\right) = 3{,}5
\end{aligned}
$$



Esperanza de una variable uniforme

En el caso de una variable X uniforme discreta, que toma los valores

$$1, 2, \ldots, N$$

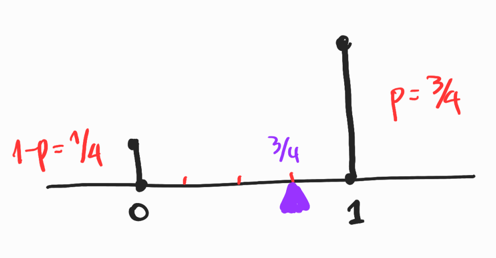
con probabilidad $1/N$ cada uno, tenemos

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=1}^{k=N} k\ P(X = k) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{k=N} k \\ &= \frac{1}{N} (1 + \cdots + N) = \frac{1}{N} \frac{N \times (N+1)}{2} = \frac{N+1}{2} \end{aligned}$$

Esperanza de una variable de Bernoulli

Si X tiene distribución de Bernoulli, toma los valores 0 y 1 con probabilidades $1 - p$ y p. Entonces

$$E(X) = 0 \times (1 - p) + 1 \times p = p.$$



Esperanza de una variable aleatoria Binomial

- X cuenta los éxitos en una serie de n experimentos de Bernoulli independientes.

- Entonces toma los valores $0, 1, \ldots, n$, con probabilidades

$$\boxed{P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n}$$

- Nuestra fórmula nos da

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^{k=n} k \; P(X = k) \\ &= \sum_{k=0}^{k=n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{k=n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}. \end{aligned}$$

Calculemos

- Primero vemos que

$$
\begin{aligned}
k\binom{n}{k} &= k\,\frac{n!}{k!(n-k)!} = k\,\frac{n!}{k(k-1)!(n-k)!} \\
&= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{n(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \\
&= \frac{n(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} \\
&= n\binom{n-1}{k-1}
\end{aligned}
$$

Entonces

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{k=0}^{k=n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= np \sum_{k=1}^{k=n} \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-k} \\
&\overset{\ell=k-1}{=} np \boxed{\sum_{\ell=0}^{\ell=n-1} \binom{n-1}{\ell} p^{\ell} (1-p)^{n-k}} \\
&= np.
\end{aligned}$$

Cálculo alternativo

- Supongamos que $Y_1, \ldots, Y_n$ toman valores $0, 1$ según el experimento sea fracaso o éxito.
- Tenemos
$$X = Y_1 + \cdots + Y_n$$
para contar los éxitos.
- Si fuese cierto que
$$E(X) = E(Y_1 + \cdots + Y_n) \stackrel{?}{=} E(Y_1) + \cdots + E(Y_n)$$
- Como tenemos $E(Y_k) = p$ siendo n sumandos, obtenemos
$$E(X) = np.$$

Esperanza de una variable geométrica

- Una variable geométrica cuenta los fracasos antes de un éxito.
- Verifica
$$P(X = k) = (1-p)^k p, \qquad k = 0, 1, \ldots$$
- Sumando una serie[1]
$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k P(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} k(1-p)^k p \stackrel{1}{=} \frac{1-p}{p}.$$

[1] La suma de esta serie requiere estudio de series de potencias

Esperanza de una variable de Poisson

- La variable de Poisson tiene probabilidades

$$P(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

- Asumamos la suma de la serie

$$\boxed{e^{\lambda} = \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = 1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^3}{3!} + \cdots}$$

- Mutliplicando por $e^{-\lambda}$ obtenemos

$$1 = e^{-\lambda}e^{\lambda} = \sum_{k=0}^{k=\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = \sum_{k=0}^{k=\infty} P(X = k).$$

- Calculemos la esperanza

$$E(X) = \sum_{k=0}^{k=\infty} k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \sum_{k=1}^{k=\infty} k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$= \sum_{k=1}^{k=\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda \lambda^{k-1}}{(k-1)!} \overset{\ell=k-1}{=} \lambda \sum_{\ell=0}^{\ell=\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^\ell}{\ell!} = \lambda$$

- Como conclusión el parámetro λ es la esperanza de una variable exponencial.