Andrei Nicolaievich Kolmogorov (1903-1987, Rusia)

Figura: Fundador de la probabilidad moderna: propuso un sistema axiomático en 1933

Clase 10 de Bioestadística

Ley fuerte de los grandes números

Ernesto Mordecki

CMAT, Facultad de Ciencias, Universidad de la República.

Uruguay

Contenidos de la clase

Esperanza (repaso)

Variables aleatorias independientes

Variables aleatorias idénticamente distribuídas

Ley fuerte de los grandes números

Esperanza (repaso)

Definición: Llamamos esperanza matemática de una variable aleatoria X al número $E(X)$ definido como

$$E(X) = \sum_k x_k P(X = x_k)$$

si X es una variable discreta y

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

donde f es la densidad de X

La esperanza (o valor esperado) es un número representativo o central de todos los resultados posibles de una variable aleatoria X

Ejemplos (repaso)

- Si X es el resultado de tirar un dado, $E(X) = 3,5$
- Si X es una variable uniforme discreta en $1, 2, \ldots, N$ entonces $E(X) = \frac{N+1}{2}$
- Si X es una variable de Bernoulli, con parámetro p, entonces $E(X) = p$
- Si X es una variable binomial, con parámetros n, p entonces $E(X) = np$

- Si X es una variable geométrica de parámetro p entonces[1]:

$$\boxed{E(X) = \frac{1-p}{p}}$$

  - Si p es pequeño (tengo poca suerte) $E(X)$ es grande, y tengo que esperar bastante
  - Si $p \sim 1$ entonces $E(X) \sim 0$ (ya el primer experimento es éxito)

- Para una variable de Poisson de parámetro λ, entonces $E(X) = \lambda$
- Por último creemos que si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ entonces $E(X) = \mu$

[1] Ojo: la clase pasada me equivoqué, esta es la fórmula correcta.

Variables aleatorias independientes

Definición: Dos variables X e Y son independientes cuando generan sucesos independientes. Es decir, cuando todos los sucesos de la forma

$$a < X \leq b, \qquad c < Y \leq d$$

son independientes.

- Por ejemplo si N es el resultado del **dado negro**, e R el del dado rojo, son variables aleatorias independientes.

- Si tiramos un tercer dado azul y llamamos Z al resultado, tenemos (es sencillo de probar) que todos los sucesos de la forma

$$a_1 < X \leq b_1, \qquad a_2 < Y \leq b_2, \qquad a_3 < Z \leq b_3$$

son independientes, es decir

$$\begin{aligned} &P(a_1 < X \leq b_1, a_2 < Y \leq b_2, a_3 < Z \leq b_3) \\ &= P(a_1 < X \leq b_1) \times P(a_2 < Y \leq b_2) \times P(a_3 < Z \leq b_3) \end{aligned}$$

- Análogamente podemos definir que las v.a. $X_1, \ldots, X_n$ son independientes
- Y si tenemos una sucesión infinita $X_1, X_2, \ldots$ decimos que son independientes cuando cualquier conjunto finito de ellas es independiente.
- Por ejemplo, si tiramos un dado (hasta aburrirnos) tenemos una sucesión de variables aleatorias independientes, al ir anotando los resultados.

Variables aleatorias idénticamente distribuídas

Definición: Decimos que un conjunto de variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots$ son idénticamente distribuídas cuando todas son resultados de experimentos diferentes que tienen los mismos resultados posibles con las mismas probabilidades.

- Por ejemplo N y R (los dados negro y rojo) son tienen la misma distribución.
- Las variables con la misma distribución:
  - No dan los mismos resultados
  - Tienen la misma esperanza

- Un objeto central (abstracto) en estadística es una sucesión
$$X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$$
de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuídas
- Representa los resultados de una serie arbitrariamente larga de experimentos que somos capaces de realizar
  - en forma independiente
  - bajo las mismas condiciones experimentales (idéntica distribución)
- Usamos la notación (X_n) v.a.i.i.d.
- Se lee "variables aleatorias independientes e idénticamente distribuídas"
- ¿Ejemplos?

Ley fuerte de los grandes números[3]

Teorema

- Consideremos una sucesión de v.a.i.i.d:

$$X_1, X_2, \ldots$$

- Supongamos que la esperanza de $E(X_1)$ es finita[2].
- Entonces

$$\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} \to E(X_1).$$

  cuando n es arbitrariamente grande, tiende a infinito, $(n \to \infty)$

[2] Recordar que las esperanzas son todas iguales por tener la misma distribución

[3] 1930, Kolmogorov

Comentarios

- Se puede abreviar los promedios observados:
$$\overline{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$
- Si bien los promedios observados son diferentes el límite siempre es el mismo
- Además, ese límite es la esperanza $E(X_1)$:
$$\overline{X}_n \to E(X_1), \qquad (n \to \infty)$$
- Esto tiene una aplicación estadística: para conocer $E(X_1)$ (desconocido) podemos aproximarlo por el promedio de experimentos (que podemos realizar)
- Por último, no todas las variables aleatorias tienen esperanza finita.

Veamos una ilustración: