Bioestadística
Curso 2017

Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Nombre:	**CI:**	**Carrera**

Primer parcial de Bioestadística - 14 de octubre de 2017

Ejercicio 1 (15 puntos). Los exámenes de pulmón en los años 1980 eran capaces de detectar infecciones de tuberculosis (TB) en el 90 % de los casos (es decir que al 90 % de las personas con tuberculosis el examen le daba *positivo* cuando se hacían el examen). Además, al 1 % de la población el examen le daba un *falso positivo* (es decir que el examen le decía que tenía TB cuando en realidad no tenía).

En esa época la *proporción* de la población infectada con TB era de 5×10^{-4}, es decir que:

$$\frac{\text{Total del personas con TB}}{\text{Total de personas}} \approx 5 \times 10^{-4}$$

(a) ¿Cuál era la probabilidad de que el examen diera positivo si la persona examinada estaba enferma?

(b) ¿Cuál era la probabilidad de que el examen diera negativo si la persona estaba sana?

(c) ¿Cuál era la probabilidad de que un examen positivo detectara efectivamente la TB? (es decir que la persona tuviera efectivamente TB si el examen le dio positivo).

(d) ¿Es cierta la siguiente frase? (Justifique): *"En promedio, de un grupo de* 23 *personas a las que el examen les da positivo sólo uno de ellos tiene TB."*

Ejercicio 2 (12 puntos). Una partícula inestable se desintegra a una distancia X de una fuente, ubicada en $x = 0$. Dicha partícula es detectada únicamente en una ventana de la forma $V = \{10 \leq x < \infty\}$. Se asume que X tiene una distribución exponencial de parámetro $\lambda = 0{,}055$.

(a) Calcular la probabilidad de que la partícula se desintegre fuera de la ventana.

(b) Determinar la esperanza μ y la varianza σ^2 de la distancia de desintegración X.

(c) ¿Se cumple que el intervalo $[\mu - \sigma, \mu + \sigma] \subset V$? Justifique.

Ejercicio 3 (8 puntos). Se supone que la duración de un embarazo en humanas tiene una distribución normal, con una media de 280 días y un desvío estándar de 10 días.

(a) ¿Qué porcentaje de bebés nacen una semana antes de la media?

(b) El 10 % de los bebés que nacen por último, se llaman *bebés tardíos.* ¿Cuántos días más tarde que la media nace un *bebé tardío*?

SOLUCIONES

Ejercicio 1. Hacemos una tabla con las probabilidades que nos da la letra:

Examen	SANO	TB
POSITIVO (+)	0,01	0,90
NEGATIVO (−)	0,99	0,10

(a) $\mathbf{P}(+ \mid TB) = 0{,}90$. **(b)** $\mathbf{P}(- \mid S) = 0{,}99$.
(c) Se pide $\mathbf{P}(TB \mid +)$, que se calcula con la regla de Bayes. Comenzamos calculando

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(+) &= \mathbf{P}(+ \mid TB)\mathbf{P}(TB) + \mathbf{P}(+ \mid SANO)\mathbf{P}(SANO)\\ &= 0{,}9 \times 5 \times 10^{-4} + 0{,}01 \times (1 - 5 \times 10^{-4})\\ &= 0{,}010445.\end{aligned}$$

Ahora

$$\mathbf{P}(TB \mid +) = \frac{\mathbf{P}(+ \mid TB) \times \mathbf{P}(TB)}{\mathbf{P}(+)} = \frac{0{,}90 \times 5 \times 10^{-4}}{0{,}010445} = 0{,}043$$

(d) Es cierta la frase, porque

$$\frac{1}{23} = 0{,}0434 \sim \mathbf{P}(TB \mid +).$$

Ejercicio 2. (a) La probabilidad de que la partícula se desintegre fuera de la ventana es

$$\mathbf{P}(X \notin V) = \mathbf{P}(X < 10) = 1 - \exp(-\lambda \times 10) = 0{,}423.$$

(b) La esperanza de una variable exponencial de parámetro λ es $\frac{1}{\lambda}$, y la varianza es $\frac{1}{\lambda^2}$. Por eso

$$\mathbf{E}X = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0{,}055} = 18{,}18, \qquad \mathbf{var}X = \frac{1}{0{,}055^2} = 330{,}58.$$

(c) Tenemos $\mu = \sigma$, por lo que $[\mu - \sigma, \mu + \sigma] = [0\,,\, 36{,}36] \not\subset V$.

Ejercicio 3. Tenemos $X \sim \mathcal{N}(280, 100)$.
(a) Estandarizando

$$\mathbf{P}(X < 280 - 7) = \mathbf{P}\left(\frac{X - 280}{10} < -\frac{7}{10}\right) = \mathbf{P}(Z < -0{,}7) = 0{,}24.$$

donde Z es $\mathcal{N}(0,1)$.
(b) Ahora tenemos que hallar x tal que

$$\mathbf{P}(X < x) = 0{,}90$$

Entonces

$$\mathbf{P}\left(\frac{X - 280}{10} < \frac{x - 280}{10}\right) = 0{,}9.$$

De la tabla $z_{0,9} = 1{,}28$, entonces

$$\frac{x - 280}{10} = 1{,}28,$$

de donde $x = 292{,}8$. Los bebés tardíos nacen 13 días mas tarde que la media.