

PRUEBA PARCIAL - SOLUCIONES

19 de Octubre de 2019

Ejercicio 1

Sólo 1 de 1000 adultos se ve afectado por una enfermedad para la cuál se ha desarrollado una prueba diagnóstica. La prueba es tal que cuando un individuo está afectado por dicha enfermedad, la prueba indica un resultado positivo el 98% de los casos, en tanto que si el individuo no está afectado la prueba indica un resultado positivo el 1% de las veces.

1. Sabiendo que el individuo está afectado por la enfermedad ¿Cuál es la probabilidad de que la prueba diagnóstica haya dado negativa?

Denotemos $+$ = { el test da positivo }, $-$ = { el test da negativo }, E = { Enfermo }, S = { Sano }

Sabemos que $P(E) = 1/1000$, $P(S) = 1 - 1/1000$, $P(+|E) = 0,98$, $P(+|S) = 0,01$ Lo que se pide es $P(-|E) = 1 - 0,98 = 0,02$

2. ¿Cuál es la probabilidad de que el resultado de la prueba sea positiva para un individuo elegido al azar?

Por la fórmula de la probabilidad total

$$P(+)=P(+|S)P(S)+P(+|E)P(E)=0,01(1-1/1000)+0,98(1/1000)=0,01097$$

3. Si se aplica la prueba a un individuo seleccionado al azar y el resultado es positivo, ¿Cuál es la probabilidad de que el individuo esté afectado por la enfermedad? **Fórmula de Bayes**

$$P(E|+)=\frac{P(+|E)P(E)}{P(+)}=\frac{0,98\times 1/1000}{0,01097}=0,08933$$

4. Si se realiza la prueba hasta encontrar la primer persona cuya prueba da positivo, ¿Cuál es la probabilidad de que haya que realizar más de 2 pruebas?

$$P(\text{Geo}(0,01097) > 2) = (1 - 0,01097)^2 = 0,978180$$

Ejercicio 2

Se considera una variable aleatoria discreta X que toma únicamente los valores $-2, -1, 0, 1, 2$ cuya función de probabilidad puntual $p_X(x) = P(X = x)$ es:

$$p_X(-2) = p_X(2) = \frac{\alpha}{6}, \quad p_X(-1) = \frac{1}{8}, \quad p_X(1) = \frac{\alpha}{8}, \quad p_X(0) = \frac{\beta}{8}$$

1. Hallar α para que $P(|X| > 3/2) = 1/3$. $2\alpha/6 = 1/3$ entonces $\alpha = 1$
2. Hallar β para que efectivamente p_X defina una probabilidad. **La suma de las probabilidades da 1, por lo tanto usando $\alpha = 1$ se obtiene $\beta = 10/3$**
3. Hallar la esperanza de X . **La función de cuantía P_X es simétrica respecto de 0 por lo tanto $E(X) = 0$**

4. Hallar la función de distribución de X .

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -2 \\ 1/6 & \text{si } x \in [-2, -1) \\ 7/24 & \text{si } x \in [-1, 0) \\ 17/24 & \text{si } x \in [0, 1) \\ 5/6 & \text{si } x \in [1, 2) \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

5. Hallar la mediana de X .

$$\{x : F(x) \geq 1/2\} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \text{ por lo tanto, mediana}(X)=0$$