Centro de Matemática. Diciembre 2017

Examen de Bioestadística

Nombre:	CI:	Carrera	Año ingreso

Ejercicio 1 (45 puntos). Tres tiradores de ballesta A, B y C tienen probabilidades respectivas de acertar a una manzana de 1/4, 1/2 y 3/4. Eligen quién tira con un dado de la siguiente forma: Si sale un número par tira A, si sale 1 o 3 tira B, si sale 5 tira C.

(a) Calcular la probabilidad de que al sortear quien tira y efectuar el tiro éste sea exitoso.

(b) Calcular la probabilidad de que haya tirado C dado que el tiro fue exitoso.

(c) Se tiran tres tiros con este procedimiento. Calcular la probabilidad de que no hayan éxitos.

(d) Se tiran 10 tiros con este procedimiento. Calcular la esperanza y la varianza del número de aciertos.

(e) Se tira ahora con este procedimiento hasta el primer éxito. Calcular la esperanza del número de tiros necesario.

Ejercicio 2 (20 puntos). (a) Los siguientes datos tienen distribución normal:

$$1.95 \quad 0.41 \quad 2.82 \quad -1.06 \quad 4.43$$

Construir un intervalo de confianza exacto del 99% de confiabilidad.

(b) Una muestra aleatoria simple de 50 datos presentó los siguientes estimadores:

$$\bar{X}_{50} = 1.656, \quad s^2 = 11.05$$

Hacer un test de hipótesis para determinar si se puede asumir que la media teórica de la muestra es $\mu = 2$. Utilizar un nivel de confianza del 90%.

Ejercicio 3 (35 puntos). (a) El tiempo de una reacción química (en segundos) se modela mediante una variable aleatoria exponencial. Se midieron tiempos de reacciones, de los que resultaron los siguientes datos:

$$0.10 \quad 0.99 \quad 0.27 \quad 0.08 \quad 0.35 \quad 0.05$$

(i) Dar una estimación del parámetro de la variable exponencial

(ii) Con el parámetro estimado, calcular la probabilidad de que la duración de la reacción sea mayor que 2 segundos.

(b) Una tira de ADN tiene la siguiente composición:

GGCACGCGGCTGTCTCTATCTATACCGCAATCTAGAGTGC

Realizar un test Chi cuadrado para determinar si las letras aparecen en forma equiprobable. Utilizar un nivel de confianza del 95%.

Soluciones

Ejercicio 1 (45 puntos). Tres tiradores de ballesta A, B y C tienen probabilidades respectivas de acertar a una manzana de 1/4, 1/2 y 3/4. Eligen quién tira con un dado de la siguiente forma: Si sale un número par tira A, si sale 1 o 3 tira B, si sale 5 tira C.

(a) Calcular la probabilidad de que al sortear quien tira y efectuar el tiro éste sea exitoso.

$$P(\text{éxito}) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{6} = \frac{5}{12}.$$

(b) Calcular la probabilidad de que haya tirado C dado que el tiro fue exitoso.

$$P(C \mid \text{éxito}) = \frac{P(\text{éxito} \mid C)P(C)}{P(\text{éxito})} = \frac{3/4 \times 1/6}{5/12} = \frac{3}{10}.$$

(c) Se tiran tres tiros con este procedimiento. Calcular la probabilidad de que no hayan éxitos.

$$P(\text{tres fracasos}) = \left(1 - \frac{5}{12}\right)^3 \sim 0,198.$$

(d) La esperanza es $10 \times 5/12 \sim 4,17$ y la varianza es $10 \times 5/12 \times 7/12 = 2,43$

(e) La esperanza es $12/5 = 2,4$.

Ejercicio 2 (20 puntos). (a) Los siguientes datos tienen distribución normal:

1.95 0.41 2.82 -1.06 4.43

Construir un intervalo de confianza exacto del 99% de confiabilidad.

Tenemos $\bar{x} = 1.71$ y $s = 2.124$. Ademas $t_{4,0.995} = 4.6$. El intervalo es $1.71 \pm 2.124 \times 4.6/\sqrt{5} = (-2.659, 6.079)$.

(b) $n = 50$, $\bar{x}_{50} = 1.656$ y $s_n^2 = 11.05$ (i.e. $s_n = 3.324$). Queremos testear:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 2 \\ H_1 : \mu \neq 2 \end{cases}$$

a nivel $\alpha = 0.1$. La región crítica para este test es:

$$RC = \{ \left| \sqrt{n} \frac{\bar{x}_n - 2}{s_n} \right| > z_{0.75} \}$$

Como $\left| \sqrt{n} \frac{\bar{x}_n - 2}{s_n} \right| = 0.73$ y $z_{0.75} = 1.64$, se tiene que la muestra no pertenece a la región crítica. Por lo tanto, no se rechaza H_0.

Ejercicio 3 (35 puntos). (a)

(i) Como $\bar{x}_n \to \mu = \mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$, entonces estimamos λ por $\hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{x}_n} = \frac{1}{0.31} = 3.23$.

(ii) $\mathbb{P}(X > 2) = 1 - F_X(2) = 1 - (1 - e^{-\hat{\lambda}2}) = e^{-\hat{\lambda}2} = 0.0016.$

(b) Observar que $\#A = 8$, $\#C = 12$, $\#G = 10$ y $\#T = 10$. Queremos testear:

$$\begin{cases} H_0 : p_A = p_B = p_G = p_T = \frac{1}{4} \\ H_1 : \text{ no } H_0 \end{cases}$$

El estadístico para este test es:

$$\chi^2_{obs} = \frac{(e_A - o_A)^2}{e_A} + \frac{(e_C - o_C)^2}{e_C} + \frac{(e_G - o_G)^2}{e_G} + \frac{(e_T - o_T)^2}{e_T} = \frac{4}{10} + \frac{4}{10} + 0 + 0 = 0.8,$$

ya que bajo H_0: $e_A = 40 \times p_A = 10$ (análogo con los otros). Puesto que bajo H_0:

$$\chi^2_{obs} = \frac{(e_A - o_A)^2}{e_A} + \frac{(e_C - o_C)^2}{e_C} + \frac{(e_G - o_G)^2}{e_G} + \frac{(e_T - o_T)^2}{e_T} \sim \chi^2(3),$$

$$p - valor = \mathbb{P}(\chi^2(3) \geq 0.8) > 0.5 > \alpha = 0.05$$

Como $p - valor > \alpha$, NO rechazamos H_0.