

SOLUCIONES VERSION 2 - Examen - 17 de Diciembre de 2020

Ejercicio 1

En una urna tenemos 40 bolillas de 4 colores: verde, rojo, azul, y negro. Hay 10 bolillas de cada color, y están numeradas del 1 al 10. Se inventa el siguiente juego de un jugador: El jugador saca una bolilla al azar y dice UNO. Si el número de la bolilla que sacó coincide con el número mencionado, entonces el jugador pierde en el primer turno. En caso contrario, el jugador pasa al segundo turno. En este segundo turno, la bolilla sacada en el primer turno se repone en la urna, y se repite lo anterior pero ahora diciendo DOS.

1. Calcular la probabilidad de perder en dos turnos o menos.
2. Calcular la probabilidad de jugar 3 veces al mismo juego, y perder una sola vez en dos turnos o menos.
3. Ahora se modifica una regla del juego anterior. Para el segundo turno, en lugar de devolver la bolilla sacada en el primer turno, la misma se elimina. ¿Cual es ahora la probabilidad de perder en el segundo turno?

Solución: (1) Tenemos que

$$P(\text{perder en el 2do turno}) = P(\text{no perder en el 1er turno}) \\ P(\text{perder en el 2do turno} | \text{no perder en el 1er turno})$$

Para el primer término, $P(\text{no perder en el 1er turno}) = \frac{36}{40}$ porque hay 4 unos. Para el segundo término, $P(\text{perder en el 2do turno} | \text{no perder en el 1er turno}) = \frac{4}{40}$ y por lo tanto

$$P(\text{perder en el 2do turno}) = \frac{36}{40} \frac{4}{40} = 0,09$$

$$P(\text{perder en el primer turno}) = \frac{4}{40}$$

Por lo tanto el resultado final de la parte 1 es:

$$9/100 + \frac{4}{40} =: p = 0,19$$

(2) Tenemos ahora una variable X con distribución binomial de parámetros $3, p$ y queremos $P(X = 1) = 3p(1 - p)^2 \approx 0,374$

(3) La diferencia es que un DOS podría salir en el primer turno. La probabilidad se calcula entonces como:

$$P(\text{perder en el 2do turno}) = \\ P(\text{DOS en 1er turno})P(\text{DOS 2do turno}|\text{DOS en 1er turno}) + \\ P(\text{ni UNO ni DOS en 1er turno})P(\text{DOS 2do turno}|\text{ni UNO ni DOS en 1er turno})$$

Tenemos que $P(\text{DOS en 1er turno}) = \frac{4}{40}$, $P(\text{DOS 2do turno}|\text{DOS en 1er turno}) = \frac{3}{39}$, $P(\text{ni UNO ni DOS en 1er turno}) = \frac{32}{40}$ y $P(\text{DOS 2do turno}|\text{ni UNO ni DOS en 1er turno}) = \frac{4}{39}$. Por lo tanto,

$$P(\text{perder en el 2do turno}) \approx 0,09.$$

Ejercicio de regresión lineal

1. Cuando hacemos el test de hipótesis $H_0 : \beta_1 = 0$ contra $H_1 : \beta_1 \neq 0$ a nivel $\alpha = 0,05$, vemos que rechazamos la hipótesis nula. Eso indica que existe una dependencia lineal significativa entre X e Y , por lo tanto X contiene información que ayuda a predecir Y .
2. Cuando hacemos el test de hipótesis $H_0 : \beta_0 = 0$ contra $H_1 : \beta_0 \neq 0$ a nivel $\alpha = 0,05$, vemos que no rechazamos la hipótesis nula. Por lo tanto, no podemos asumir que β_0 no es cero.
3. El coeficiente R^2 está cerca de 1, lo cual indica que el ajuste del modelo es bueno.
4. La mediana de los residuos está alejada de cero, y los cuartiles no son simétricos. Eso es indicio que los residuos no son normales.