**Universidad de la República**
**Facultad de Ciencias**
**Centro de Matemática**

**Grupos y Teoría de Galois**
**Primer semestre de 2020**

# Práctico 5

1. *a*) Probar que si un grupo $G$ está generado por un conjunto $S$ entonces $g \in Z(G)$ (el centro de $G$) si y solo si $gs = sg$, para todo $s \in S$.
   *b*) Determinar el centro del grupo diedral $D_n$. *Pista*: depende de la paridad de $n$.

2. El *centralizador* de un subgrupo $H$ de $G$ es $C_G(H) := \{g \in G : \ hg = gh, \ \forall h \in H\}$. Probar.
   *a*) Vale $Z(G) \subset C_G(H) \subset N_G(H)$. ¿Cuándo vale $H \subset C_G(H)$?
   *b*) $C_G(H)$ es un subgrupo normal del normalizador $N_G(H)$ y $N_G(H)/C_G(H)$ es isomorfo a un subgrupo de $\mathrm{Aut}(H)$. *Sugerencia:* probar $\mathrm{Int}_g(H) = H$, para todo $g \in N_G(H)$.

3. Sea $G = \langle a, b : \ a^2 = b^n = 1, \ ba = ab^{n-1} \rangle$ el grupo diedral. Consideramos $H = \langle a \rangle$. Determinar $C_G(H)$ y $N_G(H)$, para $n = 3$ y $n = 4$. Hacer lo mismo para $H = \{1, a, b^2, ab^2\}$ y $n = 4$.

4. Sea $G$ un grupo que contiene un subgrupo $H$ tal que $H \neq G$ y $[G : H] < \infty$. Probar que $G$ contiene un subgrupo normal $N$ tal que $N \neq G$ y $[G : N] < \infty$.

5. Sea $G$ un grupo que contiene subgrupos normales finitos $K_1, \dots, K_r$ que tienen órdenes primos dos a dos. Probar que $K_1 \cdots K_r = \{k_1 \cdots k_r : \ k_i \in K_i, \ \forall i = 1, \dots, r\}$ es un subgrupo normal de $G$ y que $K_1 \cdots K_r \simeq K_1 \times \cdots \times K_r$ como grupos. *Sugerencia:* probarlo primero para $r = 2$ y luego usar inducción; recordar el ejercicio 5b) del Práctico 2.

6. Sean $N$ y $K$ dos grupos. Sea $\alpha : K \to \mathrm{Aut}(N)$ un morfismo y $K \times N \xrightarrow{\cdot} N$ la acción asociada a $\alpha$.
   *a*) Probar que valen $k \cdot (n_1 n_2) = (k \cdot n_1)(k \cdot n_2)$ y $k \cdot 1 = 1$, para todo $k \in K, \ n_1, n_2 \in N$.
   *b*) Se define un producto $*$ en $N \times K$ mediante $(n_1, k_1) * (n_2, k_2) = \big(n_1\,(k_1 \cdot n_2), k_1\,k_2\big)$.
      1) Probar que $N \times K$ con este producto es un grupo que escribimos $N \rtimes_\alpha K$.
      2) Probar que si $N_0 = \{(n, 1) : \ n \in N\}$ y $K_0 = \{(1, k) : \ k \in K\}$, entonces
      $$N_0 \lhd N \rtimes_\alpha K, \quad K_0 < N \rtimes_\alpha K, \quad N \simeq N_0, \quad K \simeq K_0, \quad N \rtimes_\alpha K = N_0 K_0, \quad N_0 \cap K_0 = \{(1,1)\}.$$

7. Sean $\mathcal{M}$ el grupo de los movimientos del plano $\mathbb{R}^2$ y $\mathcal{M}_+$ el subgrupo de los movimientos directos.
   *a*) Probar $[\mathcal{M} : \mathcal{M}_+] = 2$. Deducir $\mathcal{M}_+ \lhd \mathcal{M}$.
   *b*) La *traslación* de vector $u \in \mathbb{R}^2$ es la función $\tau_u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $\tau_u(v) = u + v$, para todo $v \in \mathbb{R}^2$. Notar que el conjunto de las traslaciones del plano $\mathcal{T}$ es un subgrupo de $\mathcal{M}$. Sea $O(\mathbb{R}^2)$ el subgrupo de $\mathcal{M}$ formado por los operadores ortogonales[1] de $\mathbb{R}^2$. Probar $\mathcal{M} = \mathcal{T}\, O(\mathbb{R}^2)$. *Sugerencia:* recordar el ejercicio 11 del práctico 1.
   *c*) Sea $\varphi_0 \in O(\mathbb{R}^2)$ y $u \in \mathcal{T}$. Probar $\varphi_0 \circ \tau_u = \tau_{u'} \circ \varphi_0$, siendo $u' = \varphi_0(u)$. Deducir $\mathcal{T} \lhd \mathcal{M}$.
   *d*) Probar $\mathcal{M} \simeq \mathcal{T} \rtimes_\alpha O(\mathbb{R}^2)$ para cierto morfismo $\alpha : O(\mathbb{R}^2) \to \mathrm{Aut}(\mathcal{T})$ que se determinará.

   Notar que todo esto vale en general para $\mathbb{R}^n$.

8. Determinar (a menos de isomorfismo) todos los grupos de orden $2p$, con $p$ primo impar.

[1]Los operadores *ortogonales* son las isometrías de $\mathbb{R}^2$ en sí mismo, respecto al producto escalar de $\mathbb{R}^2$.