Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Cálculo diferencial e integral I
Primer semestre 2022

Examen teórico: agosto de 2022

Nombre: ....

1. Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función y $[a, b]$ un intervalo, $a < b$.

   (a) Explicar qué significa que f sea integrable en $[a, b]$ (o sea, hay que explicar qué tiene que cumplir f para que ello ocurra).

   (b) Si c es un número real y f es integrable en $[a, b]$, probar que la función cf también es integrable y que $\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$.

2. Considere la serie geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$, donde $a \neq 0$ y $r \neq 0$.

   (a) Explique cómo se obtiene la sucesión de sumas parciales $s_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$.

   (b) Explique en qué casos la serie converge y en qué casos diverge (hay que justificar).

   (c) Dé un ejemplo de una serie convergente $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ que verifique las siguientes propiedades:

      (i) $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 5$

      (ii) $a_n \neq 0$ para todo $n \geq 4$

      (iii) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 10$.

Examen práctico: agosto de 2022

Nombre: ....

1. Considere la función $F : [-1, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \int_{-1}^{x^2+1} (t-5)e^{\operatorname{sen} t}\, dt$.
   (a) Probar que F es derivable y calcular $F'(x)$.
   (b) Determinar si F presenta máximo o mínimo relativo en su dominio, indicando en qué punto.

2. Hallar la solución general de la siguiente ecuación diferencial de variables separables:

$$\frac{y'}{x \operatorname{sen} x} = \frac{(1 + \operatorname{sen}^2 y)}{2 \operatorname{sen} y \cos y}.$$

3. Resuelva el siguiente problema de valores iniciales:

$$\begin{cases} y'' + 4y' + 4y = 2x + 4 \\ y(0) = -1, y'(0) = 1 \end{cases}$$

4. Considere la sucesión $\{a_n\}$ definida por

$$a_n = \frac{n-1}{2n+1}, n \geq 1.$$

   a) Demuestre que la sucesión es creciente.
   b) Calcular $\lim a_n$ y $\lim b_n$, donde b_n está definido por

$$b_n = 4(a_n)^2 - 6a_n + \frac{a_n}{n+1}.$$

Solución de la parte práctica

1.

(a) $f(t) = (t-5)e^{\operatorname{sen} t}$ es continua, entonces $G(u) = \int_{-1}^{u} f(t)\,dt$ es derivable por el TFC. Como $u = x^2+1$ es derivable, la función compuesta $F(x) = G(x^2+1)$ también lo es. Además, el TFC implica $F'(x) = 2x(x^2-4)e^{sen(x^2+1)}$.

(b) F' se anula en $0, 2 \in [-1, +\infty)$ y tiene signos $+, -, +$ entre -1 y 0, entre 0 y 2, y en $(2, +\infty)$, respectivamente. Luego presenta máximo relativo en 0 y mínimo relativo en 2.

2.
Separando variables, tenemos:

$$\frac{2\operatorname{sen} y \cos y\, dy}{1+\operatorname{sen}^2 y} = x \operatorname{sen} x.$$

Integrando, deducimos $1+\operatorname{sen}^2 y = Ce^{-x\cos x + \operatorname{sen} x}$.

3. La ecuación carácteristica de la homogénea asociada es $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda+2)^2 = 0$. La solución general de dicha ecuación es $y_h(x) = \alpha_1 e^{-2x} + \alpha_2 x e^{-2x}$.

Buscamos solución particular de la forma $y_p(x) = ax + b$. Entonces

$$2a = 2, 4a + 2b = 6,$$

de donde se deduce $a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}$.

Las condiciones iniciales implican $\alpha_1 = -\frac{3}{2}$ y $\alpha_2 = -\frac{5}{2}$, por lo tanto la solución del problema de valores iniciales es

$$y(x) = -\frac{3}{2}e^{-2x} - \frac{5}{2}xe^{-2x} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}.$$

4.

(a) $a_n = \frac{n-1}{2n+1} < a_{n+1} = \frac{n+1-1}{2(n+1)+1}$ equivale a $(n-1)(2n+3) < n(2n+1)$, o sea, equivale a $2n^2 + n - 3 < 2n^2 + n$, lo que es verdadero para todo n. Luego la sucesión es creciente.

(b) $\lim a_n = \lim \frac{n}{2n} = 1/2$. En particular a_n es acotada y por lo tanto $\lim \frac{a_n}{n+1} = 0$. Por el teorema sobre operaciones con límites de sucesiones, concluimos

$$\lim b_n = 4\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 6\left(\frac{1}{2}\right) - 0 = -2.$$