Repartido 2. Herramientas matemáticas y notación de Dirac

1. Pruebe las siguientes propiedades de los operadores lineales.

a) Si A y B son hermíticos, entonces $i[A,B]$ también lo es

b) $[AB,C] = A[B,C] + [A,C]B$

c) $[A,[B,C]] + [B,[C,A]] + [C,[A,B]] = 0$ (Identidad de Jacobi)

d) Probar, expandiendo las exponenciales, que se verifica la siguiente igualdad:

$$e^A B e^{-A} = B + [A,B] + \frac{1}{2!}[A,[A,B]] + \frac{1}{3!}[A,[A,[A,B]]] + \dots$$

2. Sea $F(z)$ una función analítica que en un cierto dominio puede ser desarrollada como $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$. Si A es una matriz, la función $F(A)$ se define como el desarrollo en potencias de A con los mismos coeficientes de $F(z)$:

$$F(A) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n A^n.$$

Si $|\varphi\rangle$ es un vector propio de A con $A|\varphi\rangle = a|\varphi\rangle$, muestre que $F(A)|\varphi\rangle = F(a)|\varphi\rangle$. Si $\{|\varphi_j\rangle\}$ es una base de vectores propios de A con valores propios a_j (que existe si A es hermítica, por ejemplo), obtenga la representación siguiente para $F(A)$:

$$F(A) = \sum_{j=1}^{N} F(a_j)|\varphi_j\rangle\langle\varphi_j|.$$

3. Como los operadores hermíticos tienen autovalores reales, si A es hermítico, su valor esperado para cualquier función de onda coincide con su conjugado, $\langle A\rangle = \langle A\rangle^*$.

a) Utilizando estra propiedad, probar que para un operador hérmítico A se verifica que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \phi^*(x) A\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, (A\phi)^*(x)\psi(x)$$

Sugerencia: Aplique la propiedad a $\Psi = \phi + \lambda\psi$ con λ un número complejo arbitrario.

b) Demuestre la desigualdad de Schwartz:

$$\Big(\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \phi^*(x)\phi(x)\Big)\Big(\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \psi^*(x)\psi(x)\Big) \geq \Big|\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \phi^*(x)\psi(x)\Big|^2$$

Sugerencia: Utilice $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, |\Psi(x)|^2 \geq 0$ para $\Psi = \phi + \lambda\psi$ y halle el valor mínimo.

4. Operadores hermíticos.

a) Demuestre que si A y B son operadores hermíticos, $(A+B)^n$ también será un operador hermítico.

b) Si A es un operador hermítico, probar que $\langle A^2 \rangle$ es real.

c) Probar que si H es hermítico, entonces $e^{iH} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{iH^n}{n!}$ es el hermítico conjugado de e^{iH}.

d) Si A es una matriz hermítica $A^\dagger = A$, muestre que $\det(e^A) = e^{\mathrm{tr}(A)}$.

5. Considere un operador hermítico H que verifica $H^4 = I$. ¿Cuáles serán los autovalores de posibles H? ¿Cuáles serían los autovalores posibles si H no fuera hermítico?

6. Se dice que un operador U es unitario si verifica $UU^\dagger = U^\dagger U = I$.

a) Considere dos matrices H y U relacionadas por: $U = e^{iaH}$, $a \in \mathbb{R}$. Demuestre que H es hermítica si y sólo si U es unitaria.

b) Demuestre que si U y V son operadores unitarios, entonces UV también será unitario.

7. *a*) Demostrar que un autovalor λ de un operador unitario U debe ser de la forma e^{ia}. Sugerencia: Escribir $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, (U\psi)^*(x)(U\psi)(x)$ de dos maneras distintas.

b) Demostrar que si $\psi(x)$ es una función de onda normalizada y U es un operador unitario, entonces $\phi(x) = U\psi(x)$ también estará normalizada.

c) Considere un conjunto completo de autofunciones normalizadas y ortogonales de un operador A, $u_a(x)$. Dado un operador unitario U, podemos construir un conjunto $v_a(x) = Uu_a(x)$. Demuestre que el nuevo conjunto de autofunciones también es ortonormal, es decir que $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, v_a^*(x) v_b(x) = \delta_{ab}$

8. El espacio de estados de un sistema físico es tridimensional y $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$ es una base ortonormal de ese espacio. Se definen los ket $|\psi_1\rangle$ y $|\psi_2\rangle$ como

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|u_1\rangle + \frac{i}{2}|u_2\rangle + \frac{1}{2}|u_3\rangle, \qquad |\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|u_1\rangle + \frac{i}{\sqrt{3}}|u_2\rangle + \frac{1}{2}|u_3\rangle$$

a) ¿Están normalizados los ket $|\psi_1\rangle$ y $|\psi_2\rangle$?

b) Calcule las matrices ρ_1 y ρ_2 que representan los proyectores sobre $|\psi_1\rangle$ y sobre $|\psi_2\rangle$ en la base $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$. Verifique que se trata de una matríz hermítica.

9. Considere el operador K definido por $K = |\varphi\rangle\langle\psi|$ siendo $|\varphi\rangle$ y $|\psi\rangle$ dos vectores del espacio de estados.

a) ¿Bajo qué condiciones K es hermítico?

b) Calcule K^2. ¿Bajo qué condiciones K es un proyector?

c) Muestre que K siempre puede ser escrito en la forma $K = \lambda P_1 P_2$ donde λ es una constante a ser calculada y P_1, P_2 son proyectores.

10. Considere un sistema cuyo espacio de estados tridimensional es generado por la base ortonormal $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$. En esta base se definen los operadores H y B dados por

$$H = \hbar\omega_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = b \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

donde ω_0 y b son reales constantes.

a) ¿Son H y B hermíticos?

b) Muestre que H y B conmutan. Encuentre una base de autovectores comunes de H y B.

c) De los conjuntos de operadores $\{H\}$, $\{B\}$, $\{H, B\}$ y $\{H^2, B\}$ ¿cuáles forman un conjunto completos de operadores que conmutan?

11. Usando la relación $\langle x|p\rangle = e^{ipx/\hbar}/\sqrt{2\pi\hbar}$ encuentre una expresión para $\langle x|XP|\psi\rangle$ y $\langle x|PX|\psi\rangle$ en términos de $\psi(x)$. ¿Puede encontrar los mismos resultados usando que el operador P actúa como $\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}$ en la representación $\{|x\rangle\}$?