APLICACIONES DE ÁLGEBRA LINEAL

STANLEY I. GROSSMAN

Grupo Editorial Iberoamérica

Aplicaciones de Álgebra Lineal

Stanley I. Grossman

Traductor:
Mát. Alfonso Leal Guajardo
Instituto Tecnológico y de Estudios
Superiores de Monterrey (ITESM)
Monterrey, México
Profesor - Departamento de Matemáticas
Universidad Panamericana - México, D.F.

Revisor Técnico:
Ing. Francisco Paniagua Bocanegra
Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM)

Grupo Editorial Iberoamérica
Río Ganges No. 64 - 06500 México, D.F. - Tels. 5112517, 5530798

APLICACIONES DE ÁLGEBRA LINEAL

Versión en español de la obra *Applications for Elementary Linear Algebra* - Third Edition, por Stanley I. Grossman.
Edición original en inglés publicada por Wadsworth, Inc.,

ISBN 0-534-07425-1

ISBN 968-7270-40-3
Impreso en México

Editor: Nicolás Grepe P.
Proeditor: Francisco Paniagua B.
Productor: Oswaldo Ortiz R.
Cubierta: Louis Neiheisel

Grupo Editorial Iberoamérica, S.A. de C.V.
Río Ganges No. 64 - Col. Cuauhtémoc - 06500 México, D.F.
Apdo. 5-192 - Tels. 5112517, 5530798
Reg. CNIEM 1382

Prólogo

El estudio del Álgebra Lineal tiene una importancia central en el plan de estudios de matemáticas a nivel de licenciatura, al menos por dos razones. La primera es que el álgebra lineal llena el vacío entre el estudio del cálculo de una variable y el estudio de las funciones de varias variables. Es necesario entender lo que sucede en espacios distintos de los conocidos: $\mathbb{R}^2$ (el plano) y $\mathbb{R}^3$ (el espacio de tres dimensiones). Además, el curso de álgebra lineal es frecuentemente el primero que se imparte de matemáticas "puras". Es un curso en el que las demostraciones son tan importantes como la manipulación de ecuaciones.

Segundo, un conocimiento de las herramientas básicas del álgebra lineal es necesario para una gran variedad de aplicaciones. Estas aplicaciones se pueden encontrar en administración, economía, biología, psicología, física, química, y en las ciencias sociales. Por eso, se requiere que estudiantes de disciplinas muy distintas tomen un curso en álgebra lineal.

Debido a que el álgebra lineal es una materia muy amplia, y a que muchos cursos de tal materia sólo duran un trimestre o un semestre, a menudo se necesita minimizar el aspecto de las "aplicaciones". Muchos textos le dedican poco más que un somero muestreo a tales aplicaciones.

Por todo lo anterior, este libro trata de ser puente entre la teoría y la aplicación. Originalmente se pensó como complemento de la obra del suscrito *Álgebra Lineal*, 2a. edición (Grupo Editorial Iberoamérica, 1988), pero puede usarse como complemento de cualquier texto estándar de álgebra lineal. Por supuesto, las aplicaciones que contiene no son exhaustivas. Pero he tratado de incluir una muestra suficientemente grande para estimular las inquietudes del lector.

Los requisitos previos se han mantenido en un mínimo. La mayoría de los capítulos son, excepto cuando se indica lo contrario, autosuficientes, y la mayor parte sólo requiere nociones básicas de las matrices, tales como reducción por renglones, productos de matrices e inversión de matrices. El concepto más difícil de los valores y vectores característicos se necesita únicamente en los Capítulos 5 y 12.

Veamos algunas observaciones sobre la notación utilizada.

Ejemplo 2.3.4 — hace referencia al Ejemplo 4 de la Sección 2.3.

 — **Indica que se usó una calculadora o que se necesita en el ejemplo o problema en cuestión.**

$M_i(c)$ — Se usa en la reducción por renglones de una matriz: multiplíquese el renglón i por c. Por ejemplo, $M_2(-3)$ significa que el renglón 2 se multiplica por -3.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{M_2(-3)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -12 & -15 & -18 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$A_{i,j}(c)$ — Se usa en la reducción por renglones de una matriz: multiplíquese el renglón i por c y súmese el resultado al renglón j. Por ejemplo, $A_{2,3}(-4)$ significa multiplicar el renglón 2 por -4 y sumar el resultado al renglón 3:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_{2,3}(-4)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -4(4)+7 & -4(5)+8 & -4(6)+9 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -9 & -12 & -15 \end{pmatrix}$$

P_{ij} — Se usa en la reducción por renglones de una matriz: permútense los renglones i y j. Por ejemplo, P_{23} quiere decir permutar (o sea, intercambiar) los renglones 2 y 3.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_{23}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Se coloca una marca de estrella (★) antes de un problema para indicar que se trata de uno más difícil.

Reconocimientos. Parte del material en los Capítulos 1, 2, 5 y 9 apareció por primera vez en el libro titulado *Mathematics for the Biological Sciences* (Macmillan, Nueva York, 1974), en el que figuraban como autores James E. Turner y el suscrito. Estoy muy agradecido al profesor Turner por su autorización para usar ese material.

Espero que al utilizar esta obra, el lector se vea animado a aplicar las técnicas del álgebra lineal a sus propias áreas de interés. Por lo menos, conviene que ahora mismo comience a apreciar la extensa aplicabilidad de una disciplina que tuvo su inicio hace poco más de cien años con la labor del gran matemático británico Sir William Rowan Hamilton (1805-1865).

STANLEY I. GROSSMAN

Tabla de contenido

Al estudiante

***Grupo Editorial Iberoamérica** en su esfuerzo permanente de producir cada vez mejores textos, pone en tus manos esta nueva obra, en la que se ha puesto la más alta calidad en los aspectos teórico y didáctico, así como en diseño y presentación, con el objetivo de proporcionarte la mejor herramienta, no sólo para facilitarte el aprendizaje sino también para hacértelo más estimulante.*

Éste, como cualquiera de nuestros libros, ha sido cuidadosamente seleccionado para que encuentres en él un pilar de tu preparación, y un complemento ideal a la enseñanza del maestro. Lo didáctico de la presentación de sus temas hará que lo consideres el mejor auxiliar, y el que lleves a todas partes.

Lo anterior es parte de nuestro propósito de ser partícipes en una mejor preparación de profesionales, contribuyendo así a la urgente necesidad de un mayor desarrollo de nuestros países hispanohablantes.

Sabemos que esta obra será fundamental en tu biblioteca, y tal vez la más inmediata y permanente fuente de consulta.

Como uno de nuestros intereses principales es hacer mejores libros en equipo con profesores y estudiantes, agradeceremos tus comentarios y sugerencias o cualquier observación que contribuya al enriquecimiento de nuestras publicaciones.

Grupo Editorial Iberoamérica
. . .presente en tu formación profesional

32 hojas

CAPÍTULO 1

Programación lineal

1.1 Desigualdades lineales en dos variables

En esta sección se mostrará una manera de representar desigualdades lineales en dos variables. Las técnicas que aquí se presentan serán muy útiles para discutir la programación lineal en el resto de las secciones de este capítulo.

Antes de enunciar las reglas generales, se presentan tres ejemplos.

Ejemplo 1 Representar el conjunto de puntos que cumplen la desigualdad $y > -2x + 3$.

Solución Empezamos por dibujar la gráfica de la recta $y = -2x + 3$. Puesto que la recta se extiende indefinidamente en ambas direcciones, se puede considerar que esta recta (o cualquier otra recta) divide el plano xy en dos semiplanos. En la Figura 1 se marcaron estos dos **semiplanos** como *semiplano superior* y *semiplano inferior*. El conjunto $L = \{(x, y) : y = -2x + 3\}$ es el que contiene a los puntos que están en la recta. Definimos otros dos conjuntos por medio de

$$A = \{(x, y) : y > -2x + 3\} \quad \text{y} \quad B = \{(x, y) : y < -2x + 3\}$$

Ya que para cualquier pareja (x, y) se cumple que $y = -2x + 3$, o bien $y > -2x + 3$, o $y < -2x + 3$, se ve que cada punto en $\mathbb{R}^2$ está exactamente en uno de los conjuntos L, A o B. Es decir,

$$\mathbb{R}^2 = L \cup A \cup B$$

Puede verse que A es precisamente el semiplano superior en la Figura 1. Para ver la razón, obsérvese la Figura 2. Sea (x^*, y^*) un punto en A. Entonces, por

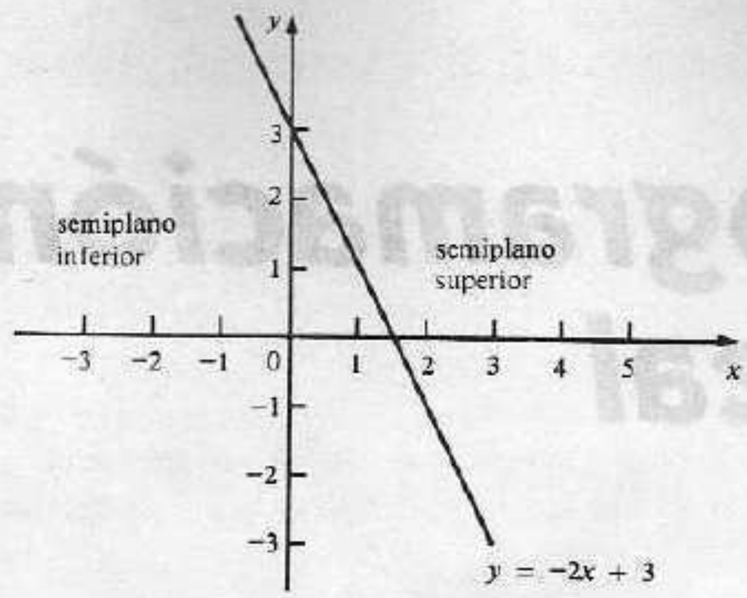


Figura 1
(Secc. 1.1)

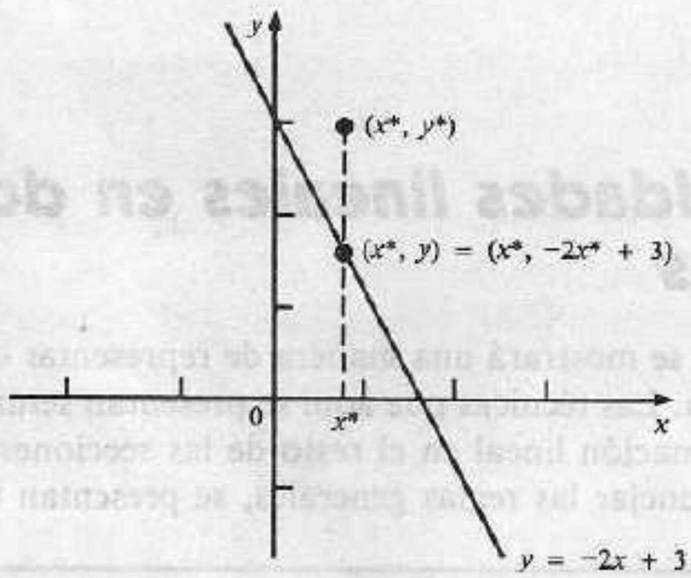


Figura 2
(Secc. 1.1)

la definición de A, $y^* > -2x^* + 3$, de donde el punto (x^*, y^*) está arriba de la línea $y = -2x + 3$. Esto es así porque la coordenada y del punto (x^*, y^*) es mayor (es más alta) que la coordenada y del punto $(x^*, -2x^* + 3)$, que está en la recta. Entonces el conjunto de los puntos que satisfacen $y > -2x + 3$ con-

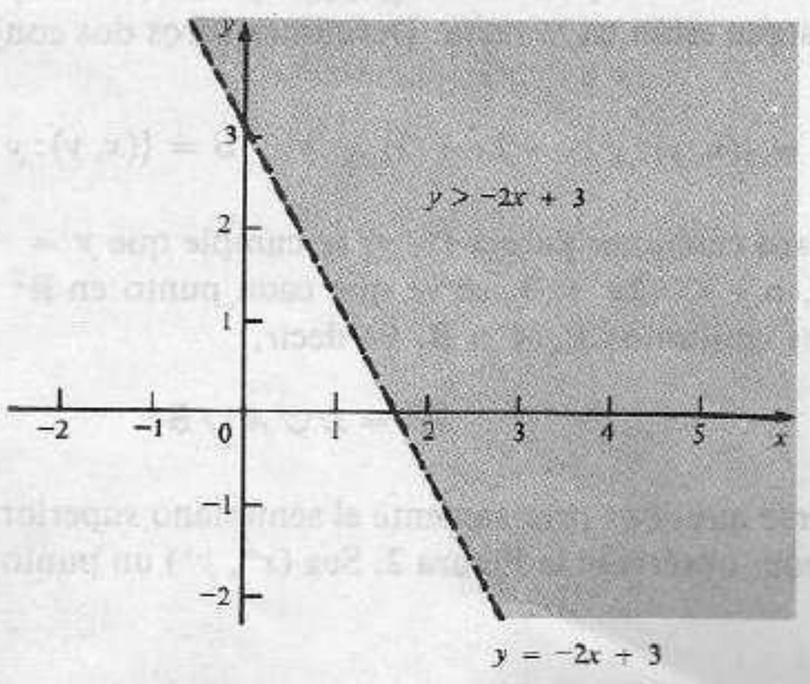


Figura 3
(Secc. 1.1)

siste precisamente en los puntos del semiplano superior, sombreado en la Figura 3. La línea punteada en la figura indica que los puntos de la recta *no* satisfacen la desigualdad.

Ejemplo 2 Representar gráficamente el conjunto de los puntos que cumplen la desigualdad $y \geq -2x + 3$.

Solución La única diferencia entre este conjunto y el del Ejemplo 1 está en que en el nuevo ejemplo el conjunto incluye los puntos de la recta $y = -2x + 3$. Esto se indica como en la Figura 4, por medio de una recta continua.

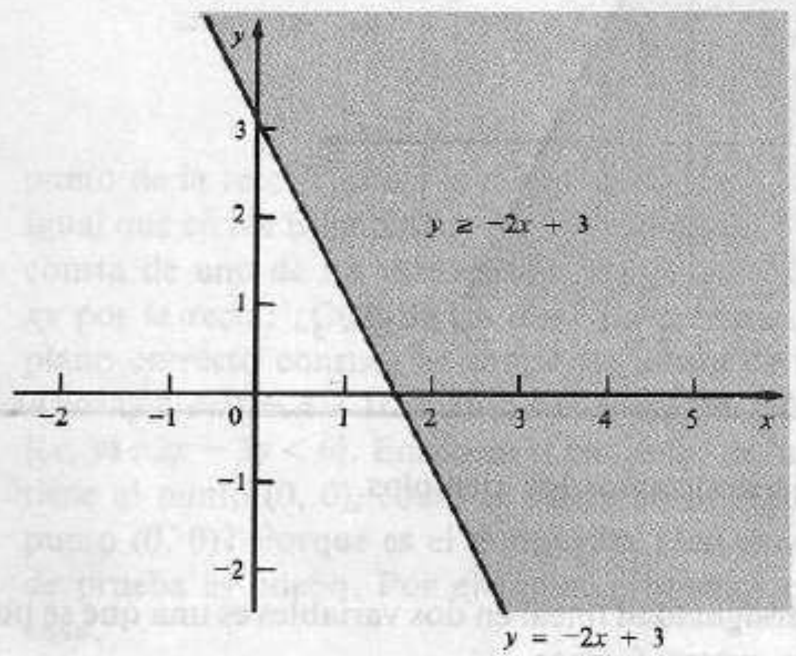


Figura 4 (Secc. 1.1)

Ejemplo 3 Representar el conjunto de los puntos que cumplen la desigualdad $y < -2x + 3$.

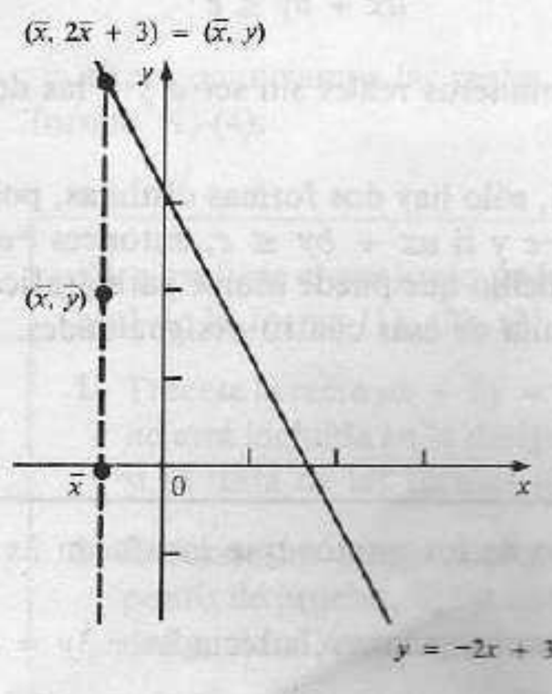


Figura 5 (Secc. 1.1)

Solución Igual que en el Ejemplo 1, sea $B = \{(x, y) : y < -2x + 3\}$ y sea $(\bar{x}, \bar{y})$ un punto de B. Entonces, como en la Figura 5, $\bar{y} < -2\bar{x} + 3$, de tal manera que el punto $(\bar{x}, \bar{y})$ está *debajo* de la recta $y = -2x + 3$. Así que el conjunto de los puntos que satisfacen $y < -2x + 3$ es el conjunto de los puntos del semiplano inferior que se muestra en la Figura 6. Aquí también la línea punteada indica que los puntos de la recta no se incluyen en el conjunto.

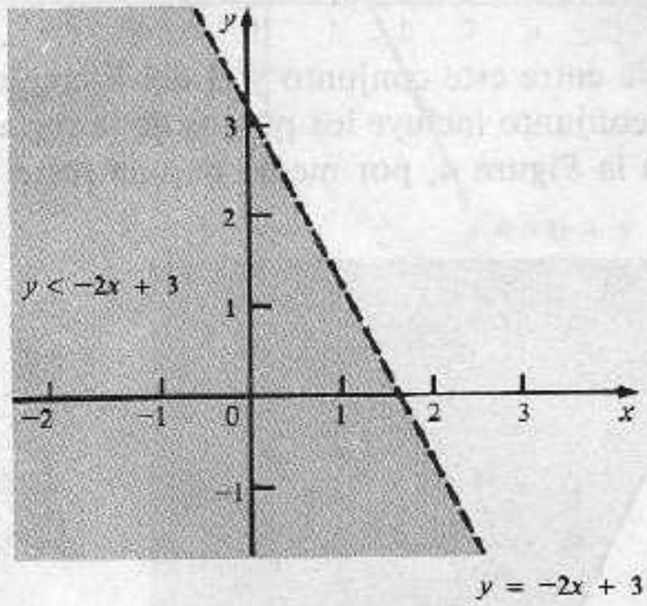


Figura 6 (Secc. 1.1)

Ahora generalizamos los ejemplos.

Desigualdad lineal en dos variables Una **desigualdad** lineal en dos variables es una que se puede escribir en alguna de las cuatro formas

$$ax + by > c \tag{1}$$

$$ax + by \geq c \tag{2}$$

$$ax + by < c \tag{3}$$

$$ax + by \leq c \tag{4}$$

en donde a, b y c son números reales sin ser a y b las dos iguales a cero.

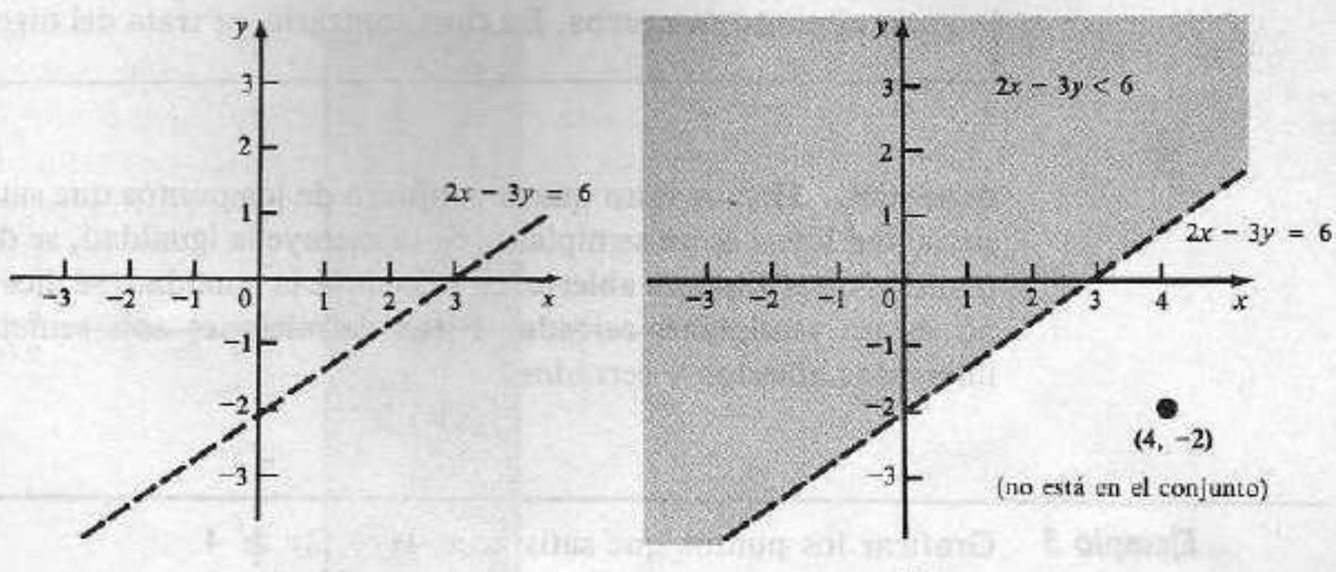
Observación. En realidad, sólo hay dos formas distintas, porque si $ax + by < c$, entonces $-ax - by > -c$ y si $ax + by \leq c$, entonces $-ax - by \geq -c$.

Existe un método sencillo que puede usarse para graficar el conjunto de los puntos que satisfacen una de esas cuatro desigualdades. Mostramos esto por medio de un ejemplo.

Ejemplo 4 Representar el conjunto de los puntos que satisfacen $2x - 3y < 6$.

Solución En la Figura 7(a) graficamos primero la recta $2x - 3y = 6$. Dado que ningún

Figura 7
(Secc. 1.1)



(a) (b)

punto de la recta cumple la desigualdad dada, trazamos una recta punteada. Igual que en los Ejemplos 1, 2 y 3, el conjunto de los puntos que nos interesan consta de uno de los dos medios planos en los que queda dividido el plano xy por la recta. ¿Cuál de los dos? La manera más sencilla de elegir el semiplano correcto consiste en tomar un **punto de prueba**, que puede ser (0, 0). Ahora, $2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 = 0 < 6$, así que (0, 0) se encuentra en el conjunto $\{(x, y) : 2x - 3y < 6\}$. Entonces el conjunto de interés es el semiplano que contiene al punto (0, 0), como se indica en la Figura 7(b). ¿Por qué se eligió el punto (0, 0)? Porque es el punto más fácil de probar. Pero cualquier punto de prueba es bueno. Por ejemplo, probemos con el punto (4, −2). En este caso,

$$2(4) - 3(-2) = 14 > 6.$$

Entonces, el semiplano que contiene al punto (4, −2) *no* es el semiplano que interesa. Los dos puntos de prueba nos conducen a la misma gráfica.

Ahora enunciamos las reglas para graficar una desigualdad de una de las formas (1)-(4).

Para graficar el conjunto de los puntos que cumplen una desigualdad lineal de la forma (1), (2), (3) o (4):

1. Trácese la recta $ax + by = c$. Hágase un trazo punteado si la igualdad no está incluida en la desigualdad dada ((1) o (3)), o un trazo continuo si se trata de las formas ((2) o (4)).
2. Escójase un punto cualquiera de $\mathbb{R}^2$ que no esté en la recta como punto de prueba. Si las coordenadas del punto de prueba cumplen la desigualdad, entonces el conjunto buscado es el semiplano que contie-

ne al punto de prueba. En caso contrario, se trata del otro semiplano.

Observación. Hemos visto que el conjunto de los puntos que satisfacen una desigualdad lineal es un semiplano. Si se excluye la igualdad, se dice que el semiplano es un **semiplano abierto.** Si se incluye la igualdad, se dice que el semiplano es un **semiplano cerrado**. Estas definiciones son semejantes a las de intervalos abiertos y cerrados.

Ejemplo 5 Graficar los puntos que satisfacen $4x + 2y \geq 4$.

Solución Trazamos primero la gráfica de la recta $4x + 2y = 4$, usando trazo continuo porque se incluye la igualdad, Figura 8(a). Entonces, si (0, 0) es punto de prueba, se ve que $4(0) + 2(0) = 0$, que no es mayor o igual que 4, por lo que (0, 0) no está en el conjunto solución. Entonces nuestro conjunto solución es el semiplano que se muestra en la Figura 8(b).

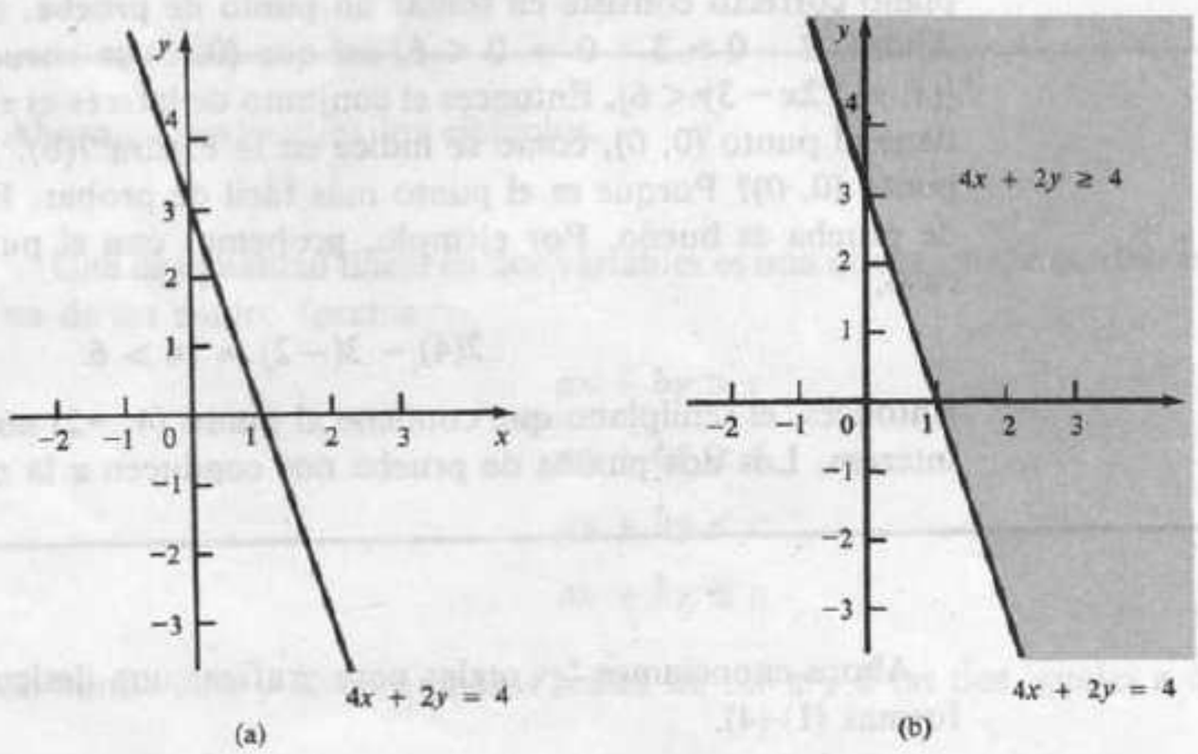
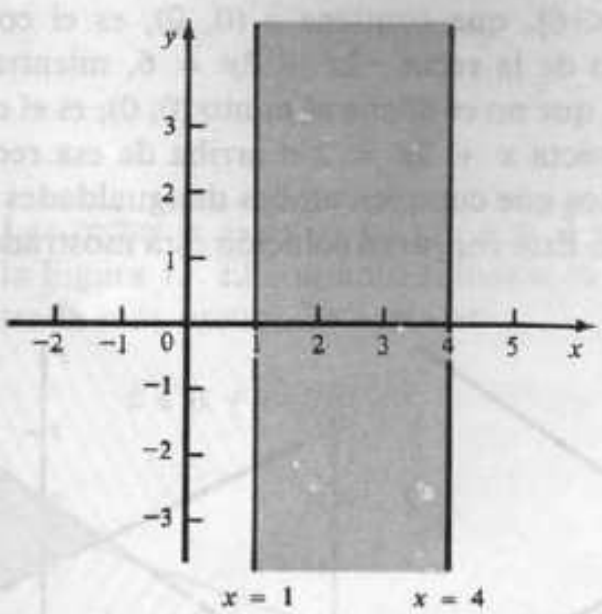


Figura 8 (Secc. 1.1)

Ejemplo 6 Graficar los puntos del plano cuyas coordenadas x cumplan $1 \leq x \leq 4$.

Solución Este conjunto es la intersección de dos semiplanos. La gráfica del conjunto $x \leq 4$ es el semiplano que está a la izquierda de la recta $x = 4$ (sin incluirla). De manera similar, la gráfica de $x \geq 1$ es el semiplano que está a la derecha de la recta $x = 1$. Juntando esta información con la anterior, obtenemos la *cinta* infinita que se muestra en la Figura 9.

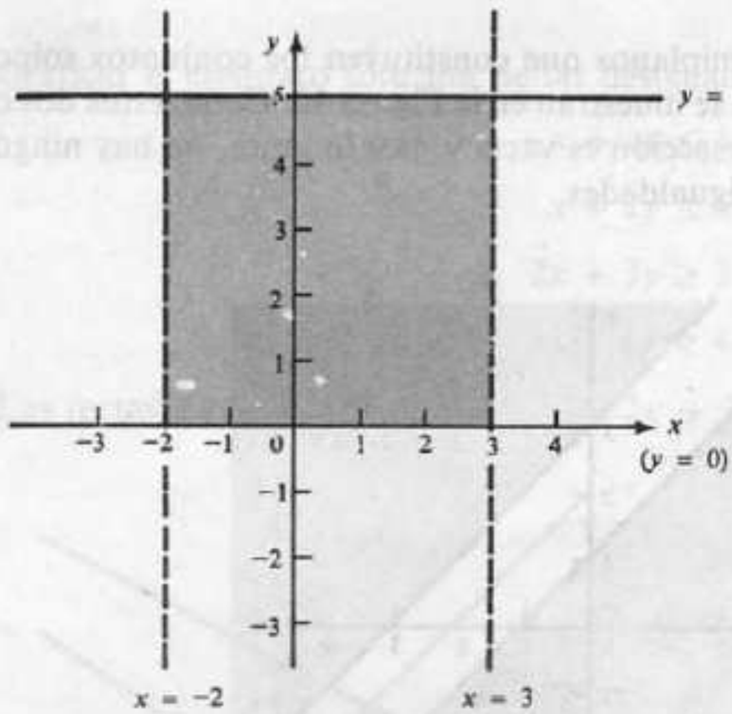
Figura 9
(Secc. 1.1)



Ejemplo 7 Representar el conjunto de los puntos que cumplen las condiciones $-2 < x < 3$ y $0 < y \leq 5$.

Solución Este conjunto es la intersección de los cuatro semiplanos definidos por las desigualdades $x > -2$, $x < 3$, $y > 0$ y $y \leq 5$. Los tres primeros de estos semiplanos son abiertos y el cuarto es cerrado. Su intersección es el rectángulo de la Figura 10.

Figura 10
(Secc. 1.1)



Ejemplo 8 Graficar el conjunto de los puntos que satisfacen las desigualdades $x + 2y \geq 2$ y $-2x + 3y < 6$.

Solución Empezamos con el trazo, en la Figura 11(a), de las rectas cuyas ecuaciones son $x + 2y = 2$ y $-2x + 3y = 6$. Las coordenadas (0, 0) cumplen la segunda desigualdad, pero no la primera. Lo anterior quiere decir que el semiplano

$\{(x, y): -2x + 3y < 6\}$, que contiene a $(0, 0)$, es el conjunto de los puntos que están debajo de la recta $-2x + 3y = 6$, mientras que el semiplano $\{(x, y): x + 2y \geq 2\}$, que no contiene al punto $(0, 0)$, es el conjunto de los puntos que están en la recta $x + 2y = 2$ o arriba de esa recta. Por lo tanto, el conjunto de los puntos que cumplen ambas desigualdades es la intersección de estos dos semiplanos. Este conjunto solución está mostrado en la Figura 11(b).

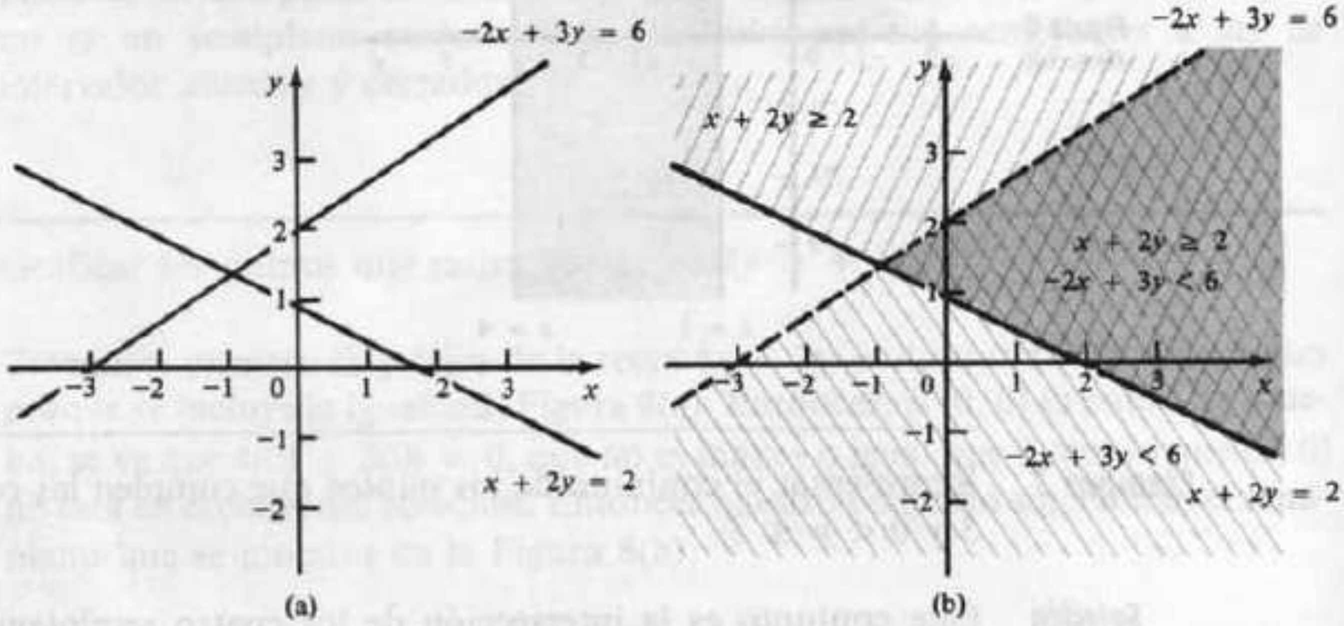


Figura 11 (Secc. 1.1)

Ejemplo 9 Graficar el conjunto de los puntos que cumplen las desigualdades $x + y \leq 1$ y $2x + 2y \geq 6$.

Solución Los dos semiplanos que constituyen los conjuntos solución de estas dos desigualdades se muestran en la Figura 12. Como estos dos conjuntos son disjuntos, su intersección es vacía y, por lo tanto, *no* hay ningún punto que cumpla las dos desigualdades.

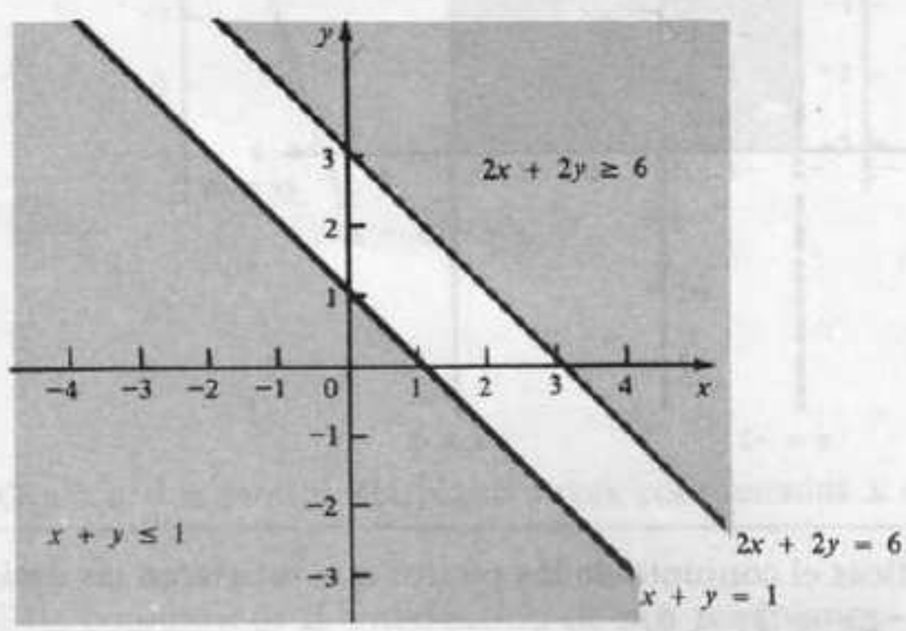


Figura 12 (Secc. 1.1)

Ejemplo 10 Graficar los puntos que satisfacen las desigualdades

$$x + 3y \leq 6$$
$$x - y \leq 2$$
$$x \geq 0.$$

Solución Las rectas $x + 3y = 6$, $x - y = 2$ y $x = 0$ (en el eje y) están mostradas en la Figura 13. El conjunto solución es la región limitada por esas líneas y mostrada más oscura.

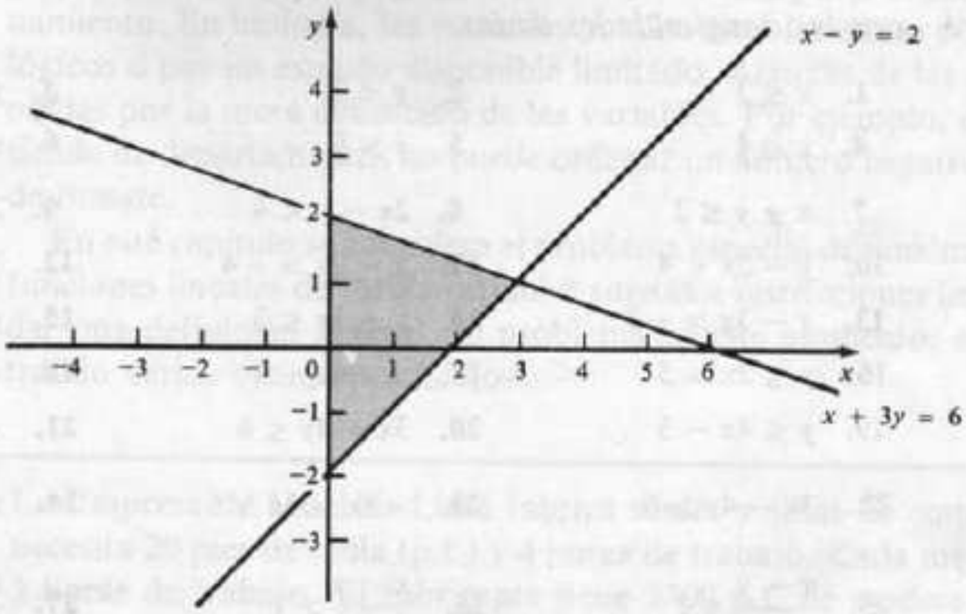


Figura 13 (Secc. 1.1)

Ejemplo 11 Graficar el conjunto solución de las desigualdades

$$-x + y \leq 1$$
$$x + 2y \leq 6$$
$$2x + 3y \geq 3$$
$$-3x + 8y \geq 4.$$

Solución Las rectas $-x + y = 1$, $x + 2y = 6$, $2x + 3y = 3$, y $-3x + 8y = 4$ se ven

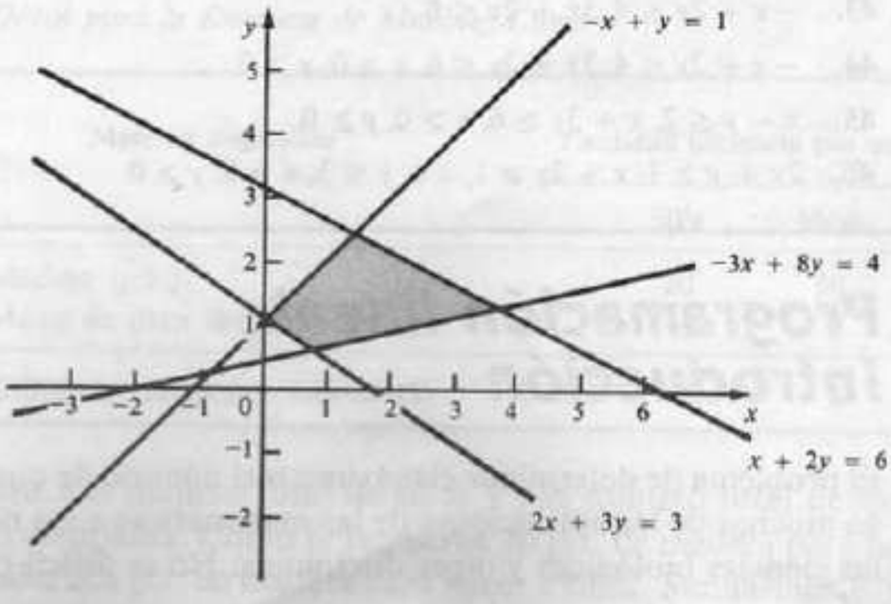


Figura 14 (Secc. 1.1)

en la Figura 14. El conjunto solución de las cuatro desigualdades es la región sombreada en la figura. Obsérvese que en este caso la solución es una región limitada por cuatro rectas y que tiene cuatro "esquinas".

Problemas 1.1

En los siguientes problemas, grafíquense los conjuntos de puntos que satisfacen las desigualdades dadas.

1. $x \leq 3$ **2.** $y < 2$ **3.** $y \geq -4$

4. $x \leq \frac{3}{2}$ **5.** $y > \frac{2}{3}$ **6.** $x + y > 2$

7. $x + y \leq 2$ **8.** $2x - y < 4$ **9.** $2x - y \geq 4$

10. $y - 2x < 4$ **11.** $x - 2y > -4$ **12.** $3x - y < 3$

13. $y - 3x > -3$ **14.** $y - 3x \leq 3$ **15.** $y + 3x \geq 3$

16. $y \leq 2x - 5$ **17.** $y > 4x - 3$ **18.** $x < -2y + 7$

19. $y \leq 4x - 3$ **20.** $3x + 4y \leq 6$ **21.** $-3x + 4y > 6$

22. $3x - 4y \geq 6$ **23.** $-3x - 4y > 6$ **24.** $x - \frac{y}{2} > 4$

25. $\frac{x - y}{3} \leq 2$ **26.** $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} \geq 1$ **27.** $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} < -1$

28. $\frac{x}{3} - \frac{y}{5} \geq \frac{1}{2}$ **29.** $-3 \leq x < 0$ **30.** $1 < y \leq 6$

31. $0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 3$ **32.** $-1 \leq x < 4, -2 \leq y < 2$

33. $-\frac{1}{2} < x < 1, \frac{1}{2} \leq y < 2$ **34.** $|x| < 2, |y| < 3$

★ **35.** $|x - 1| < 4, |y + 2| \leq 3$ **36.** $x + y \geq 1, 2x - 3y \leq 6$

37. $x + y \leq 1, 2x + 3y \geq 5$ **38.** $x - y \leq 2, 2y - 3x > 6$

39. $x + 2y \leq 2, 2x + 4y \geq 4$ **40.** $x + 2y < 2, 2x + 4y > 4$

41. $x + y \leq 2, 5x + 2y \geq 4$ **42.** $3x - 4y \leq 6, 2x + 3y > 3$

43. $-x + 2y \leq 4, 3x + 2y \leq 6$

44. $-x + 2y \leq 4, 3x + 2y \leq 6, x \geq 0, y \geq 0$

45. $x - y \leq 2, x + 3y \geq 6, x \geq 0, y \geq 0$

46. $2x + y \geq 1, x + 2y \geq 1, x + y \leq 3, x \geq 0, y \geq 0$

1.2 Programación lineal: Introducción

El problema de determinar el máximo o el mínimo de una función dada ocurre en muchas de las aplicaciones de las matemáticas a los negocios, la economía, las ciencias biológicas y otras disciplinas. No es difícil encontrar ejemplos de problemas de esa índole. ¿Qué hace un hombre de negocios para maximizar las utilidades o para minimizar los costos? ¿A qué tasa de cambio será más favorable el saldo de los pagos? ¿Cómo se pueden satisfacer los requerimientos de alimento de un animal con un mínimo gasto de energía?

Los problemas de maximización y minimización están sujetos a menudo a restricciones o límites en las variables. Por ejemplo, un hombre de negocios tiene siempre la limitación que proviene de una cantidad finita de capital. Si tuviera sumas ilimitadas para invertir, podría obtener utilidades virtualmente ilimitadas. El supervisor de un almacén tiene un espacio limitado para almacenamiento. En biología, las variables pueden estar limitadas por factores psicológicos o por un espacio disponible limitado. Algunas de las restricciones son obvias por la mera definición de las variables. Por ejemplo, el gerente de una tienda de departamentos no puede ordenar un número negativo de kilogramos de tomate.

En este capítulo se considera el problema especial de maximizar o minimizar funciones lineales de varias variables sujetas a restricciones lineales. En vez de dar una definición general del problema en este momento, empezamos mostrando varios ejemplos sencillos.

Ejemplo 1 La Empresa de Muebles Lima fabrica mesas y sillas de comedor. Cada silla necesita 20 pies de tabla (p.t.) y 4 horas de trabajo. Cada mesa, 50 p.t. y sólo 3 horas de trabajo. El fabricante tiene 3300 p.t. de madera disponible y un equipo humano capaz de proporcionar 380 horas de trabajo. Por último, el fabricante ha determinado que hay una utilidad de \$3 por cada silla vendida y \$6 por cada mesa vendida. Para simplificar, supongamos que los materiales necesarios (como clavos o barniz) se tienen en cantidades suficientes. ¿Cuántas mesas y sillas se deben producir para maximizar las utilidades, suponiendo que se vende todo objeto producido?

Solución El problema, tal como está planteado parece difícil —hay muchas cosas relacionadas en él—. Empezamos la simplificación del problema anotando toda la información en una tabla.

Tabla 1 (Secc. 1.2) *Datos para la Empresa de Muebles Lima*

Material disponible	Cantidad necesaria por unidad		Total disponible
	Silla	Mesa	
Madera (p.t.)	20	50	3300
Mano de obra (horas)	4	3	380
Utilidades netas por unidad (\$)	3	6	

Sea x el número total de sillas y y el número total de mesas producidas por la compañía. Como se requieren 20 p.t. de madera para hacer una silla, hacen falta $20x$ p.t. de madera para hacer x sillas. Similarmente, se requieren $50y$ p.t.

de madera para producir y mesas. Así que los datos del primer renglón de la Tabla 1 se pueden expresar algebraicamente por medio de la desigualdad lineal

$$20x + 50y \leq 3300. \qquad \text{Desigualdad de la madera}$$

De manera similar, la desigualdad lineal que representa la información del segundo renglón de la Tabla 1 es

$$4x + 3y \leq 380. \qquad \text{Desigualdad de la mano de obra}$$

Estas dos desigualdades representan dos de las **restricciones** en este problema. Expresan en términos matemáticos el hecho evidente de que la materia prima y la mano de obra son cantidades finitas (limitadas). Existen dos restricciones adicionales. Ya que la empresa no puede fabricar cantidades negativas de los artículos, se debe cumplir que

$$x \geq 0 \quad \text{y} \quad y \geq 0.$$

Las utilidades obtenidas P cuando se producen x sillas y y mesas se expresan por (del tercer renglón de la Tabla 1)

$$P = 3x + 6y. \qquad \text{Ecuación de las utilidades}$$

Juntando toda esta información, se puede enunciar el problema en una forma que pronto se podrá reconocer como un **problema de programación lineal estándar**. Maximizar

$$P = 3x + 6y \tag{1}$$

sujeto a las restricciones

$$20x + 50y \leq 3300 \tag{2}$$

$$4x + 3y \leq 380 \tag{3}$$

$$x \geq 0, y \geq 0. \tag{4}$$

En este problema, la función lineal* mostrada en (1) se llama la **función objetivo**. Cualquier punto del conjunto definido por las restricciones se llama **solución factible**. Nuestro problema consiste en encontrar el punto (o puntos) del conjunto de las restricciones en el que la función objetivo toma su valor máximo. Nuestro primer método para resolver este problema va a emplear técnicas de la sección anterior. Empezamos encontrando una solución graficando el **conjunto de las restricciones**, que es el conjunto solución de las desigualdades. Esto se muestra en la Figura 1. Considérense las rectas $3x + 6y = C$ para valores distintos de la constante C. En la Figura 2 se trazan algunas de las rectas. Cada una de las rectas $3x + 6y = C$ se llama **recta de utilidades constantes** para este problema. Para ver por qué, considérese la recta $3x + 6y = 30$. Para cada punto (x, y) que se encuentre en esta recta y en el conjunto definido por las restricciones, el fabricante obtiene una utilidad de \$30. Algunos son (10, 0) (10 sillas y ninguna mesa), (6, 2) (6 sillas y dos mesas),

* Véase Sección 2.2.

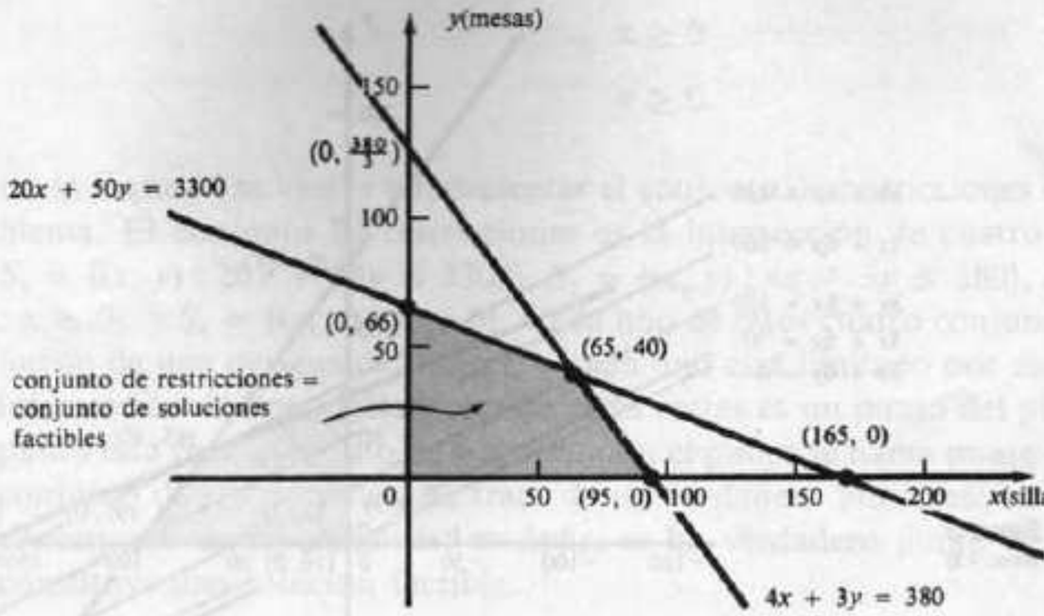


Figura 1
(Secc. 1.2)

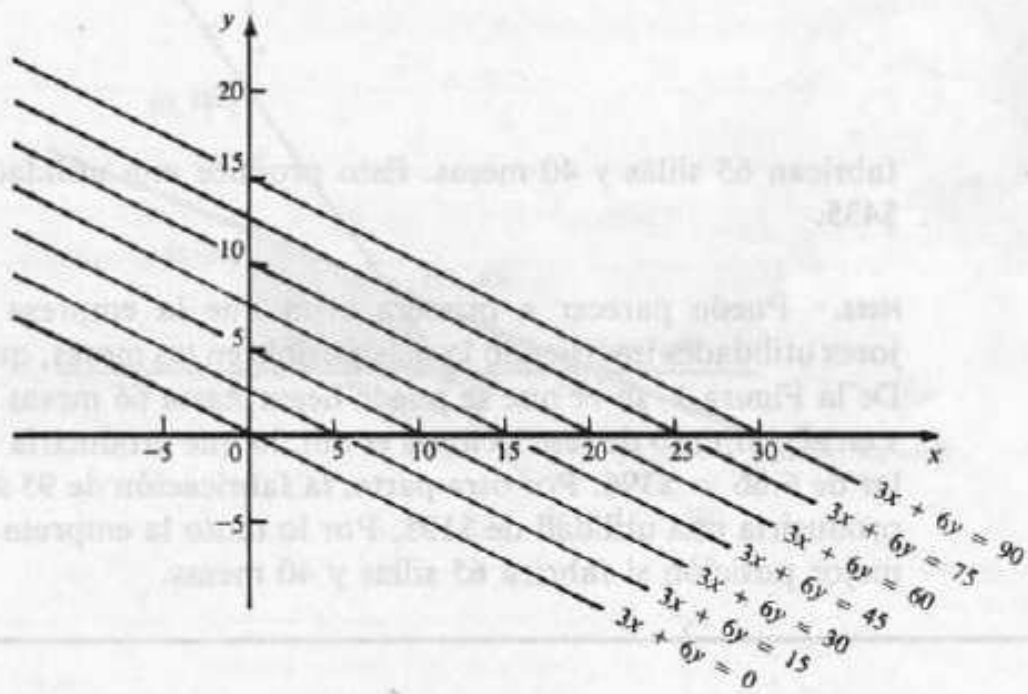


Figura 2
(Secc. 1.2)

y (0, 5) (ninguna silla y 5 mesas). Véase la Figura 3. Desde el punto de vista del fabricante, porque cada uno produce la misma utilidad de $30.

Considérese ahora la recta de utilidades $3x + 6y = 60$. Esta se encuentra a la derecha de la recta $3x + 6y = 30$ y es una línea "más agradable" para el fabricante ya que cada punto de ella que esté en el conjunto de restricciones produce una utilidad de $60. Dos de tales puntos son (20, 0) y (12, 4).

Ahora ya pueden verse las cosas un poco más claras. Todas las rectas de utilidades constantes son paralelas entre sí (cada una tiene pendiente de $-1/2$ y las utilidades aumentan al pasar a la derecha de una recta a la siguiente. Cada nueva línea (a la derecha) produce utilidades más altas. Nuestro método consiste ahora en movernos a la derecha todo lo posible sin salirnos del conjunto de restricciones. De la Figura 3 se ve que la "última" recta de utilidades constantes es la línea que intersecta al conjunto de restricciones en un solo punto (65, 40). Esto quiere decir que se obtienen las máximas utilidades cuando se

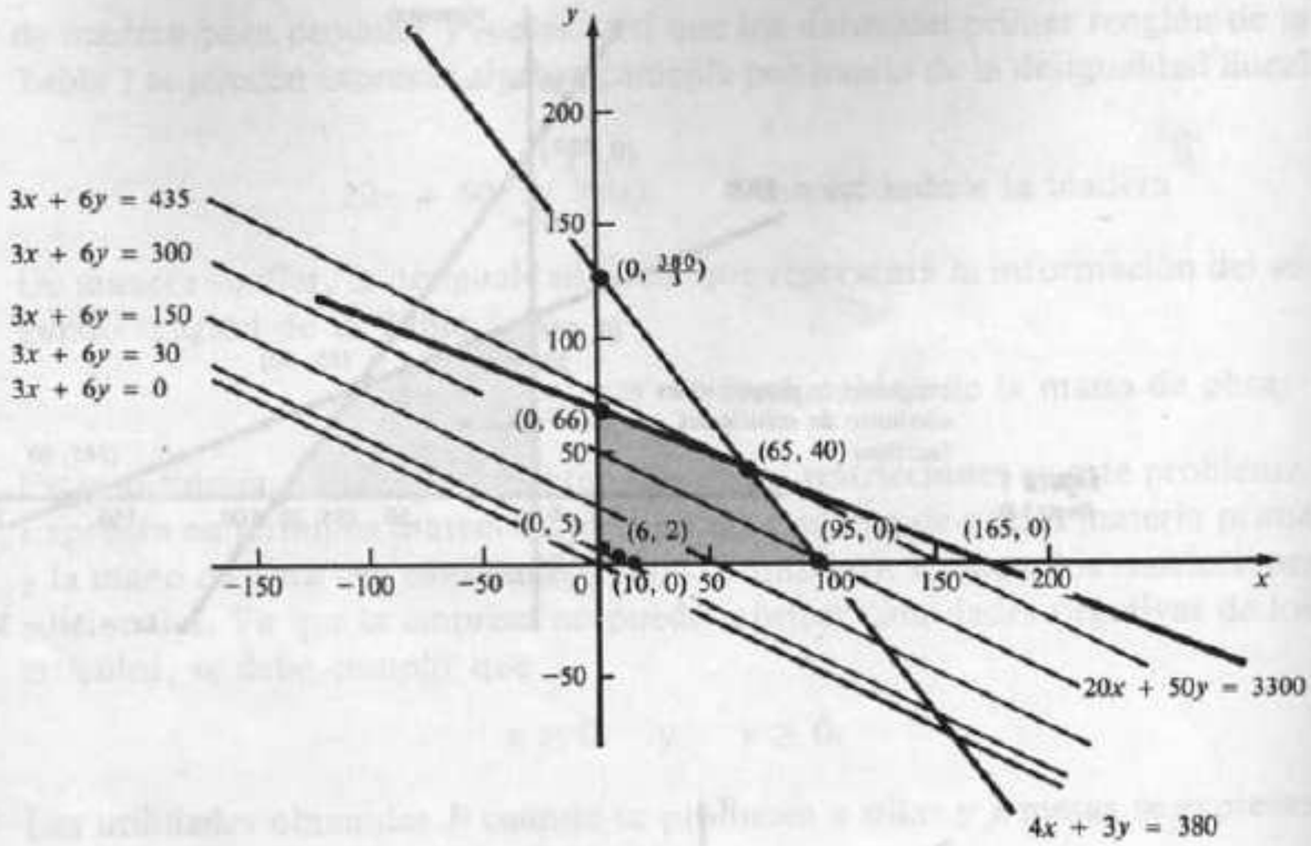


Figura 3
(Secc. 1.2)

fabrican 65 sillas y 40 mesas. Esto produce una utilidad de 3.65 + 6.40 = $435.

Nota. Puede parecer a primera vista que la empresa puede obtener mejores utilidades invirtiendo lo más posible en las mesas, que son más rentables. De la Figura 1, se ve que se puede llegar hasta 66 mesas (el máximo valor de y en el conjunto de restricciones es 66), lo que produciría utilidades por un valor de 6.66 = $396. Por otra parte, la fabricación de 95 sillas y ninguna mesa produciría una utilidad de $195. Por lo tanto la empresa se encuentra en una mejor posición si fabrica 65 sillas y 40 mesas.

El método que se usó en el Ejemplo 1 para resolver el problema de programación lineal se llama **método gráfico**. Este método muestra lo que pasa, pero es muy impráctico al usarse por dos razones: Primero, requiere la elaboración de dibujos muy precisos para obtener la solución; y segundo, sólo se puede usar con problemas en los que intervienen dos variables porque las gráficas en tres dimensiones son complicadas de hacer y no se pueden dibujar esquemas de más de tres dimensiones.

Introducimos ahora otro método. Para eso, revisamos el Ejemplo 1. El problema consistía en maximizar

$$P = 3x + 6y \tag{5}$$

sujeta a las restricciones

$$20x + 50y \leq 3300 \tag{6}$$

$$4x + 3y \leq 380 \tag{7}$$

$$x \geq 0 \tag{8}$$

$$y \geq 0. \tag{9}$$

En la Figura 4 se vuelve a representar el conjunto de restricciones de este problema. El conjunto de restricciones es la intersección de cuatro conjuntos: $S_1 = \{(x, y) : 20x + 50y \leq 3300\}$, $S_2 = \{(x, y) : 4x + 3y \leq 380\}$, $S_3 = \{(x, y) : x \geq 0\}$, y $S_4 = \{(x, y) : y \geq 0\}$. Cada uno de estos cuatro conjuntos es la solución de una desigualdad lineal, y cada uno está limitado por una recta. La intersección de dos cualesquiera de estas rectas es un punto del plano y, si el punto está en el conjunto de restricciones, el punto se llama **punto esquina** del conjunto de restricciones. Se trata de un verdadero punto esquina si está en el conjunto de restricciones; es decir, es un verdadero punto de tal clase si constituye una solución factible.

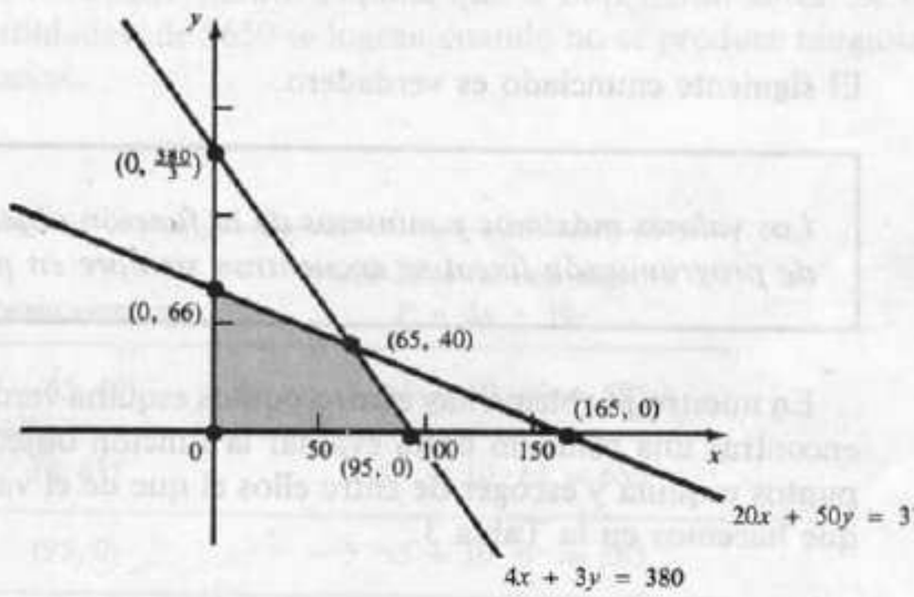


Figura 4
(Secc. 1.2)

Tabla 2
(Secc. 1.2)

Las dos rectas que determinan el punto	Punto esquina posible	¿Solución factible? (¿Verdadero punto esquina?) (¿Está en el conjunto de restricciones?)
$20x + 50y = 3300$ $4x + 3y = 380$	(65, 40)	Sí.
$20x + 50y = 3300$ $x = 0$	(0, 66)	Sí.
$20x + 50y = 3300$ $y = 0$	(165, 0)	No. (Se infringe la restricción (7) ya que $4 \cdot 165 + 3 \cdot 0 = 660$, que es > 380.)

Tabla 2 (Secc. 1.2) (*Continuación*)

Las dos rectas que determinan el punto	Punto esquina posible	¿Solución factible? (¿Verdadero punto esquina?) (¿Está en el conjunto de restricciones?)
$4x + 3y = 380$ $x = 0$	$(0, \frac{380}{3})$	No. (Se infringe la restricción (6) ya que $20 \cdot 0 + 50 \cdot \frac{380}{3} = \frac{19,000}{3}$, que es >3300.)
$4x + 3y = 380$ $y = 0$	$(95, 0)$	Sí.
$x = 0$ $y = 0$	$(0, 0)$	Sí.

El siguiente enunciado es verdadero.

> *Los valores máximos y mínimos de la función objetivo en un problema de programación lineal se encuentran siempre en puntos esquina.*

En nuestro problema hay cuatro puntos esquina verdaderos. Entonces, para encontrar una solución basta evaluar la función objetivo en cada uno de los puntos esquina y escoger de entre ellos el que dé el valor máximo. Esto es lo que hacemos en la Tabla 3.

Tabla 3 (Secc. 1.2)

Punto esquina	Valor de la función objetivo $P = 3x + 6y$	
$(65, 40)$	$3 \cdot 65 + 6 \cdot 40 = 435$	Valor máximo
$(0, 65)$	$3 \cdot 0 + 6 \cdot 65 = 390$	
$(95, 0)$	$3 \cdot 95 + 6 \cdot 0 = 285$	
$(0, 0)$	$3 \cdot 0 + 6 \cdot 0 = 0$	

Así queda claro, como se vio en el Ejemplo 1, que las máximas utilidades de \$435 se obtienen cuando se fabrican 65 sillas y 40 mesas.

Ejemplo 2 En el Ejemplo 1, supóngase que las utilidades son de \$3 por silla y \$10 por mesa y que el resto de los datos permanecen inalterados. ¿Cómo puede la empresa de muebles maximizar sus utilidades en estas condiciones?

Solución El problema consiste en maximizar

$$P = 3x + 10y$$

sujeta a las restricciones

$$20x + 50y \leq 3300$$
$$4x + 3y \leq 380$$
$$x \geq 0, y \geq 0.$$

Ahora tenemos el mismo conjunto de restricciones que en el ejemplo al principio de esta sección. En la Tabla 4 evaluamos la función objeto en cada uno de los cuatro puntos esquina que se obtuvieron antes. Se ve que las máximas utilidades, de \$650 se logran cuando no se produce ninguna silla, sino sólo 65 mesas.

Tabla 4
(Secc. 1.2)

Punto esquina	Valor de la función objetivo $P = 3x + 10y$
(65, 40)	$3 \cdot 65 + 10 \cdot 40 = 595$
(0, 65)	$3 \cdot 0 + 10 \cdot 65 = 650$
(95, 0)	$3 \cdot 95 + 10 \cdot 0 = 285$
(0, 0)	$3 \cdot 0 + 10 \cdot 0 = 0$

Ejemplo 3 Un lago de montaña en un parque nacional tiene en la primavera de cada año dos especies de peces, S_1 y S_2. El peso promedio de cada pez en el lago es de 4 libras para S_1 y de 2 libras para S_2. Se dispone de dos tipos de alimento, S_1 y F_2. Las necesidades promedio de un pez de especie S_1 son de 1 unidad de F_1 y 3 unidades de F_2 diariamente. Las necesidades correspondientes de S_2 son de 2 unidades de F_1 y 1 unidad de F_2. Si se cuenta con 500 unidades de F_1 y 900 unidades de F_2 por día, ¿cómo debe ser la cantidad de peces de cada clase para maximizar el peso de pescado que se pueda producir?

Solución Sean x_1 y x_2 los números de peces que se mantienen en el lago, para las especies S_1 y S_2, respectivamente. El peso total W de peces en el lago se expresa por

$$W = 4x_1 + 2x_2. \tag{10}$$

El consumo total de alimento F_1 es de $x_1 + 2x_2$, porque cada pez de la primera especie consume una unidad de F_1 y cada pez de la segunda especie consume 2 unidades de F_1. De manera similar, el consumo total del alimento F_2 es de $3x_1 + x_2$. Ya que hay 500 unidades disponibles de F_1 y 900 unidades de F_2, se tiene que

$$x_1 + 2x_2 \leq 500 \quad \text{y} \quad 3x_1 + x_2 \leq 900. \tag{11}$$

Finalmente, se tienen las restricciones evidentes

$$x_1 \geq 0 \quad \text{y} \quad x_2 \geq 0 \tag{12}$$

porque no puede haber en el lago cantidades negativas de ninguna de las especies.

Este es otro problema típico de programación lineal.

Maximizar

$$W = 4x_1 + 2x_2$$

sujeta a

$$x_1 + 2x_2 \leq 500 \tag{13}$$

$$3x_1 + x_2 \leq 900 \tag{14}$$

$$x_1 \geq 0 \tag{15}$$

$$x_2 \geq 0. \tag{16}$$

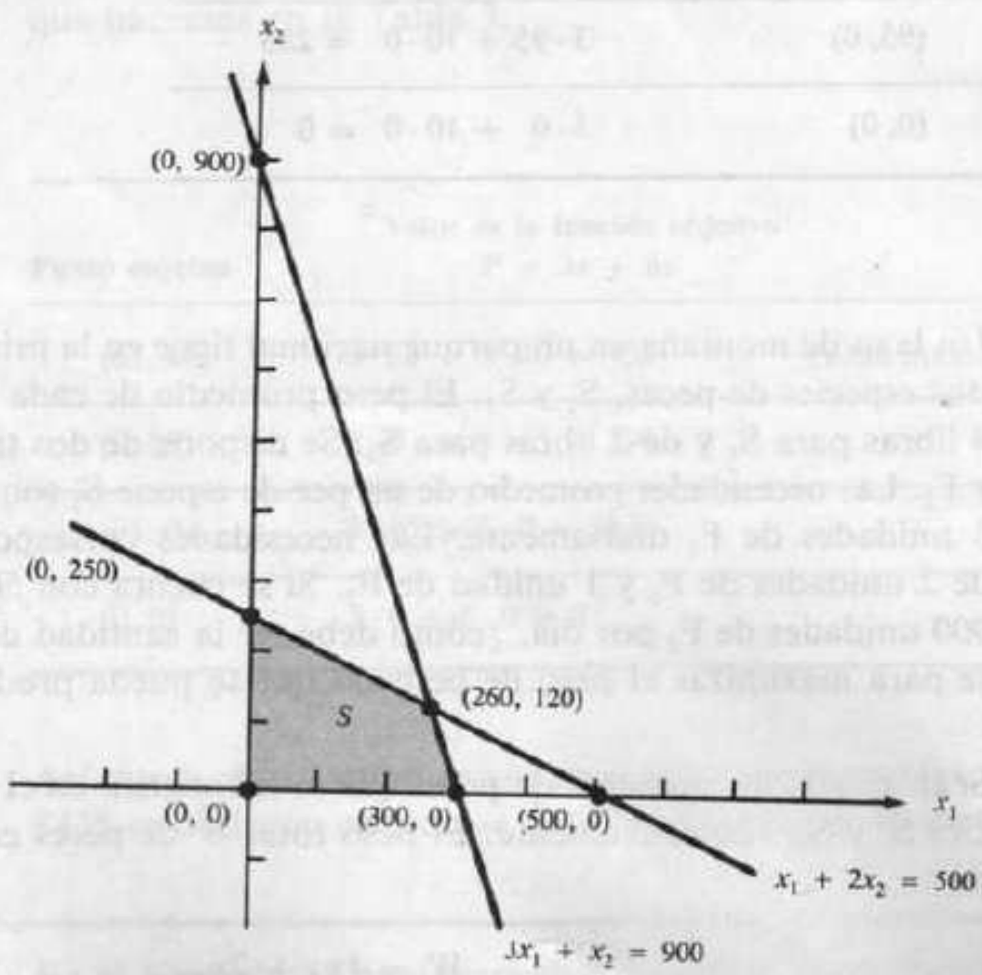


Figura 5
(Secc. 1.9)

Resolveremos esto por el método del punto esquina. Para ver lo que está pasando, graficamos el conjunto de restricciones. En la Figura 5, las rectas $x_1 + 2x_2 = 500$ y $3x_1 + x_2 = 900$ se muestran en el plano $x_1\,x_2$. En la Tabla 5 se presenta la información requerida en la resolución de este problema.

Tabla 5
(Secc. 1.2)

Las dos rectas que determinan el punto	Punto esquina posible	¿Solución factible? (¿Punto esquina verdadero?)	Valor de la función objetivo $W = 4x_1 + 2x_2$ en el punto esquina
$x_1 + 2x_2 = 500$ $3x_1 + x_2 = 900$	(260, 120)	Sí.	1280
$x_1 + 2x_2 = 500$ $x_1 = 0$	(0, 250)	Sí.	500
$x_1 + 2x_2 = 500$ $x_2 = 0$	(500, 0)	No. (Se infringe la restricción (14)	
$3x_1 + x_2 = 900$ $x_1 = 0$	(0, 900)	No. (Se infringe la restricción (13)	
$3x_1 + x_2 = 900$ $x_2 = 0$	(300, 0)	Sí.	1200
$x_1 = 0$ $x_2 = 0$	(0, 0)	Sí.	0

Encontramos el valor máximo de 1280 en $x = 260$ y $x_2 = 120$. Esto significa que el lago puede soportar un peso máximo de 1280 libras si ha sido abastecido con 260 peces de la especie S_1 y 120 peces de la especie S_2.

Ejemplo 4 El director del servicio de agua en una ciudad encuentra una forma de proporcionar al menos 10 millones de galones de agua potable al día (mgd). El suministro puede ser proporcionado por el depósito local o por medio de unas tuberías desde una ciudad vecina. El depósito local tiene un rendimiento diario de 5 mgd, que no puede ser sobrepasado. La tubería no puede abastecer más de 10 mgd debido a su diámetro. Por otra parte, por acuerdo contractual, se bombearía como mínimo 6 mgd. Finalmente, el agua del depósito cuesta \$300 (dólares) por millón de galones y el agua del abasto por tubería cuesta \$500 por millón de galones. ¿Cómo podría el director minimizar los costos del suministro diario de agua?

Solución El símbolo x denota la cantidad de galones del depósito y y la cantidad de galones (en millones de galones) de la tubería que se bombea diariamente.

El problema es entonces:

Minimizar

$$C = 300x + 500y$$

sujeta a

$x + y \geq 10$	Para satisfacer las necesidades de la ciudad
$x \leq 5$	Capacidad del depósito
$y \leq 10$	Capacidad de la tubería
$y \geq 6$	Contrato de la tubería
$x \geq 0$	
$y \geq 0$	

El conjunto de restricciones de este problema se representa en la Figura 6. En la figura se puede ver que hay cuatro puntos esquina (véase la Tabla 6).

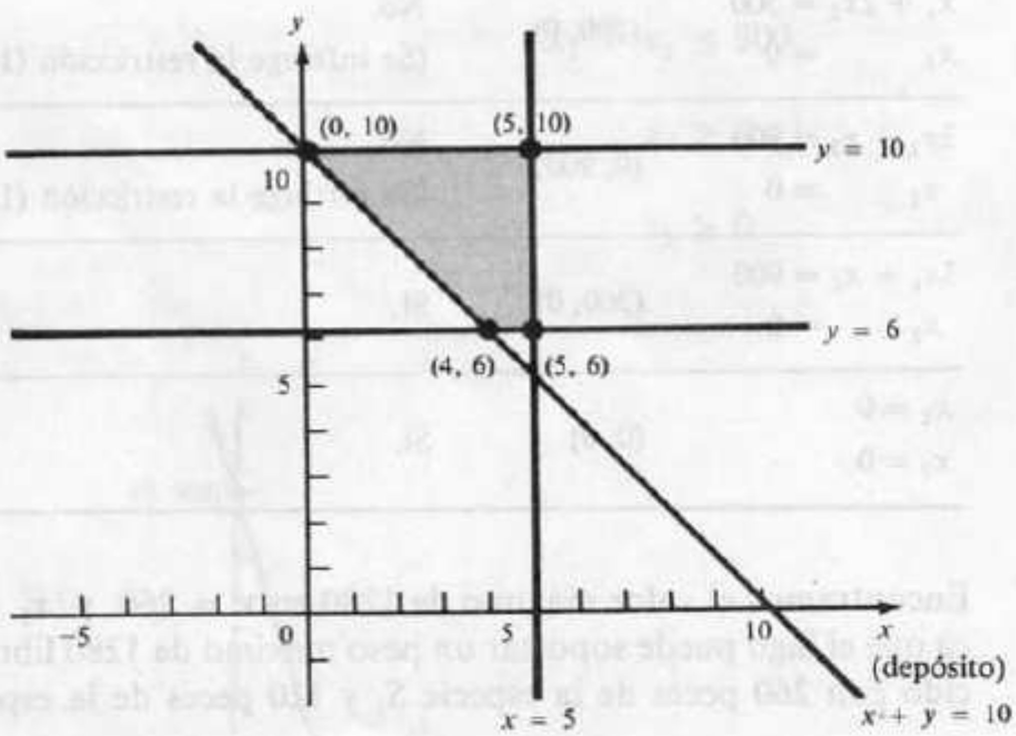


Figura 6 (Secc. 1.2)

Tabla 6 (Secc. 1.2)

Punto esquina	Valor de la función objetivo $C = 300x + 500y$ en el punto esquina
(0, 10)	5000
(5, 10)	6500
(4, 6)	4200
(5, 6)	4500

El valor mínimo de la función objetivo en los puntos esquina es de 4200, y se encuentra en el punto (4, 6). Esto significa que el director puede proporcionar 4 millones de galones al día del depósito y 6 millones de galones al día de la tubería a un costo diario de $4 \cdot 300 + 6 \cdot 500 = \$4200$.

En los ejemplos que se han considerado en esta sección, se han presentado dos variables (que se llamaron x y y o bien x_1 y x_2. El método del punto esquina trabaja bien con más de dos variables, pero se puede requerir una cantidad enorme de trabajo para determinar los posibles puntos esquina. En la serie de problemas se pide al lector la resolución de algunos problemas de programación lineal que involucran tres variables, usando el método del punto esquina. Ya juzgará el lector con qué rapidez los cálculos se vuelven más y más complicados (véanse los Problemas 35-39).

En las siguientes tres secciones se describe un método mucho más eficiente para resolver problemas de programación lineal en más de dos variables. Terminamos esta sección mostrando dos de las dificultades que se pueden presentar al resolver un problema de programación lineal.

Ejemplo 5 Resolver el siguiente problema de programación lineal:
Maximizar

$$f = 2x + 3y$$

sujeta a

$$x + y \geq 5$$
$$6x + 2y \geq 12$$
$$x \geq 0, y \geq 0.$$

Solución En la Figura 7 se muestra el conjunto de restricciones. Está claro que tanto

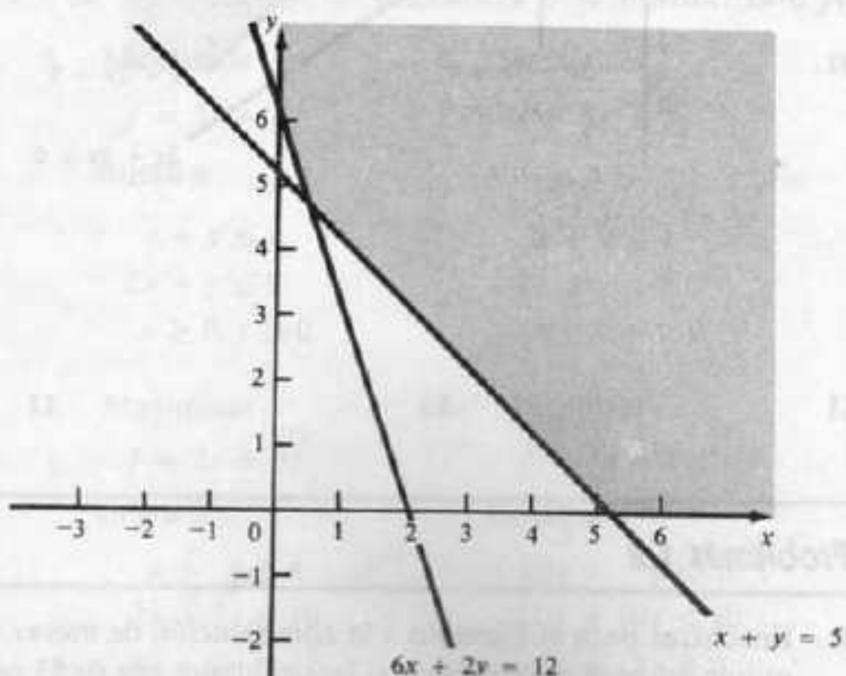


Figura 7
(Secc. 1.2)

x como y pueden tomar valores arbitrariamente grandes sin salirse del conjunto de restricciones. Por lo tanto f puede tomar valores arbitrariamente grandes, por lo que el problema no tiene solución. En un caso como éste, se dice que el problema es **no acotado**.

Ejemplo 6 Resolver el problema siguiente.

Maximizar

$$f = 2x + 3y$$

sujeta a

$$x + y \geq 5$$
$$2x + 3y \leq 6$$
$$x \geq 0,\ y \geq 0.$$

Solución Las desigualdades lineales se representan en la Figura 8. Es evidente que el conjunto de restricciones es vacío. Por lo tanto no existen soluciones factibles y así decimos que el problema es **no factible**.

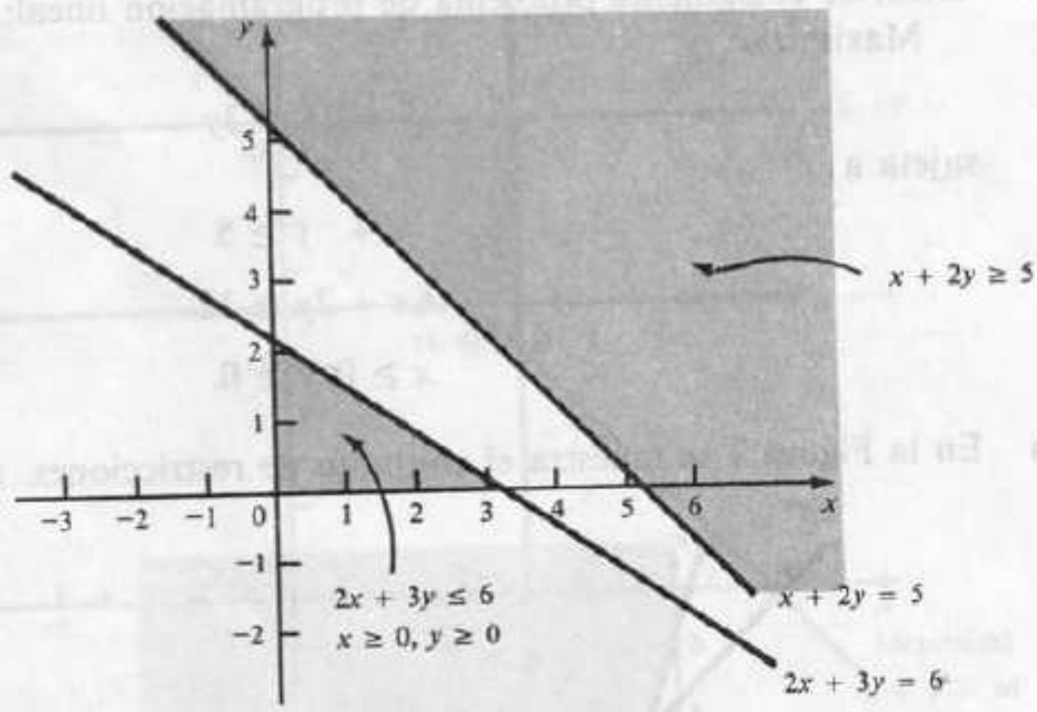


Figura 8
(Secc. 1.2)

Problemas 1.2

1. Encontrar para el Ejemplo 1 la combinación de mesas y sillas que maximice las utilidades para el fabricante si las utilidades son de \$5 por silla y de \$5 por mesa. Supóngase que los demás datos no se alteran.

Tabla 7
(Secc. 1.2)

Material disponible	Cantidad necesaria por unidad		Total disponible
	Silla	Mesa	
Madera (p.t.)	30	40	11,400
Mano de obra (horas)	4	6	1650
Utilidades netas por unidad ($)	5	6	

2. Responder la pregunta del Problema 1 si las utilidades son de $8 por silla y de $2 por mesa.

3. Responder la pregunta del Ejemplo 1 usando los datos de la Tabla 7.

4. Responder la pregunta del Problema 3 si las utilidades son de $2 por silla y de $8 por mesa sin cambiar los datos restantes

5. Responder la pregunta del Problema 3 si las utilidades son de $8 por silla y de $2 por mesa.

★6. En el Ejemplo 1, supóngase que cada mesa necesita en su fabricación la misma cantidad de madera y de mano de obra que una silla. Si las utilidades unitarias son de $3 por silla y de $4 por mesa, demuéstrese que si la madera y la mano de obra son limitadas, el fabricante siempre puede maximizar sus utilidades fabricando sólo mesas.

7. En el Ejemplo 4, ¿cómo puede el director de recursos hidráulicos minimizar los costos si no hay límite inferior al número de galones de agua que debe hacer circular a través de la tubería?

En los Problemas 8-20, resuélvase el problema dado de programación lineal usando el método gráfico o el del punto esquina. Encuéntrense los valores de x y de y en los que se maximiza o se minimiza la función objetivo.

8. Maximizar

$$f = 3x + 4y$$

sujeta a

$$x + y \le 4$$
$$2x + y \le 5$$
$$x \ge 0,\ y \ge 0.$$

9. Maximizar

$$f = 4x + 3y$$

sujeta a

$$x + y \le 4$$
$$2x + y \le 5$$
$$x \ge 0,\ y \ge 0.$$

10. Maximizar

$$f = x + y$$

sujeta a

$$3x + 4y \le 12$$
$$2x + y \le 8$$
$$x \ge 0,\ y \ge 0.$$

11. Maximizar

$$f = 2x + 3y$$

sujeta a

$$x + y \le 4$$
$$2x + 3y \le 10$$
$$4x + 2y \le 12$$
$$x \ge 0,\ y \ge 0.$$

12. Maximizar

$$f = 3x + 5y$$

sujeta a

$$10x + y \le 10$$
$$x + 10y \le 10$$
$$2x + 3y \le 6$$
$$x \ge 0,\ y \ge 0.$$

13. Maximizar

$$f = 5x + 3y$$

sujeta a

$$10x + y \le 10$$
$$x + 10y \le 10$$
$$2x + 3y \le 6$$
$$x \ge 0,\ y \ge 0.$$

14. Maximizar

$$f = 12x + y$$

sujeta a

$$\begin{aligned} 10x + y &\le 10 \\ x + 10y &\le 10 \\ 2x + 3y &\le 6 \\ x \ge 0, y &\ge 0 \end{aligned}$$

15. Maximizar

$$f = x + 12y$$

sujeta a

$$\begin{aligned} 10x + y &\le 10 \\ x + 10y &\le 10 \\ 2x + 3y &\le 6 \\ x \ge 0, y &\ge 0. \end{aligned}$$

16. Minimizar

$$g = 4x + 5y$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x + 2y &\ge 3 \\ x + y &\ge 4 \\ x \ge 0, y &\ge 0. \end{aligned}$$

17. Minimizar

$$g = 4x + 5y$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x + 2y &\ge 4 \\ x + y &\ge 3 \\ x \ge 0, y &\ge 0. \end{aligned}$$

18. Minimizar

$$g = 12x + 8y$$

sujeta a

$$\begin{aligned} 3x + 2y &\ge 1 \\ 4x + y &\ge 1 \\ x \ge 0, y &\le 0. \end{aligned}$$

19. Minimizar

$$g = 3x + 7y$$

sujeta a

$$\begin{aligned} 5x + y &\ge 1 \\ 2x + 3y &\ge 2 \\ x \ge 0, y &\ge 0. \end{aligned}$$

20. Minimizar

$$g = 3x + 2y$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x + 2y &\ge 1 \\ 2x + y &\ge 2 \\ 5x + 4y &\ge 10 \\ x \ge 0, y &\ge 0. \end{aligned}$$

21. Determinar el número de peces de especies S_1 y S_2, con un peso total de 1200 libras que pueden coexistir en el lago del Ejemplo 3. Graficar los puntos correspondientes en el plano.

22. Suponga que se cuenta con 1000 unidades de F_1 y 1800 unidades de F_2 cada día en el Ejemplo 3 . ¿Qué cantidades de cada especie de peces se deben mantener en el lago para maximizar el peso de pescado que se pueda obtener del mismo?

23. Igual que en el Problema 22, ¿qué cantidades de cada especie se deben mantener en el lago si se cuenta con 1000 unidades diarias de F_1 y 1000 unidades diarias de F_2?

24. Suponga que se cuenta con dos tipos de alimento en un lago diariamente en cantidades fijas y que se saben los requerimientos de estos alimentos en promedio para dos especies de peces. Formular un problema general de abasto que maximice las cantidades de peces de cada especie que se deben mantener en el lago.

25. En el Ejemplo 3, ¿qué cantidades de cada especie de peces se deben mantener en el lago para maximizar el número total de peces?

26. En el Problema 22, ¿qué cantidad se debe mantener de cada especie para maximizar el número total de peces en el lago?

27. En el Problema 23, ¿qué cantidad se debe mantener de cada especie de peces en el lago? En este caso, ¿cuál es la cantidad total en peso de pescado que contiene el mismo?

28. La Empresa Miel produce dos clases de dulces a partir de caramelo y chocolate. Cada pieza pesa 4 onzas. La Barra A contiene 3 onzas de caramelo y 1 onza de chocolate. La Barra B contiene 2 onzas de caramelo y 2 onzas de chocolate. La Barra A se vende a 30¢ y la barra B a 54 ¢. La empresa tiene en almacén 90 libras

de chocolate y 144 libras de caramelo. ¿Cuántas unidades se deben producir de cada tipo para maximizar los ingresos de la empresa?

29. Dos alimentos consisten exclusivamente de carbohidratos y proteínas. El Alimento I cuesta 50¢ la libra y contiene 90% de carbohidratos (en peso). El Alimento II cuesta \$1 la libra y contiene 60% de carbohidratos. ¿Qué cantidad de cada uno de estos alimentos proporciona al menos 2 libras de carbohidratos y 1 libra de proteínas a un costo mínimo? ¿Cuál es el costo por libra de esta dieta?

30. La Empresa Alimentos Spina, S.A. produce pizzas congeladas. El Sr. Art Spina, presidente de la empresa, supervisa personalmente la producción de los dos tipos de pizzas que maneja la empresa: Spina normal y Spina de lujo. Art obtiene utilidades de \$0.50 por cada pizza normal que se produzca y \$0.75 por cada pizza de lujo. Cuenta normalmente con 150 libras de masa y 800 onzas de material de recubrimiento. Cada pizza normal requiere 1 libra de masa y 4 onzas de recubrimiento, mientras que la pizza de lujo necesita en su elaboración 1 libra de masa y 8 onzas de recubrimiento. De acuerdo con la demanda anterior, Art sabe que puede vender a lo más 75 pizzas de lujo y 125 pizzas normales. ¿Cuántas pizzas normales y cuántas pizzas de lujo debe producir para maximizar sus utilidades?

31. Un animal requiere en promedio 10 unidades del alimento A, 12 unidades del alimento B, y 12 unidades del alimento C cada día. Estos requerimientos se satisfacen alimentándose de otras dos especies de animales. Una de sus presas, la especie I, le proporciona 5, 2 y 1 unidades de los alimentos A, B y C, respectivamente. Para capturar y digerir una presa de la especie I, necesita 3 unidades de energía, en promedio. Los requerimientos de energía correspondientes a la especie II es de dos unidades de energía. ¿Cuántas presas de cada especie debe capturar para satisfacer sus necesidades de alimento con el mínimo gasto de energía?

★ 32. (a) Grafique el conjunto de restricciones para el siguiente problema de programación lineal.

Maximizar

$$f = 2x_1 + 3x_2$$

sujeta a

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 &\le 10 \\ 3x_1 + 4x_2 &\le 12 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

(b) Graficar el conjunto de restricciones para el problema siguiente.

Minimizar

$$g = 10y_1 + 12y_2$$

sujeta a

$$\begin{aligned} 2y_1 + 3y_2 &\ge 2 \\ 5y_1 + 4y_2 &\ge 3 \\ y_1 \ge 0,\ y_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

(c) Demuestre por medio del método gráfico, que el valor máximo de f en (a) es igual al valor mínimo de g en (b). [*Nota*: Las partes (a) y (b) se llaman problemas duales. Hablaremos de los problemas duales en la Sección 1.5.]

33. Demuestre que los problemas siguientes son no acotados.

(a) Maximizar

$$f = x + 3y$$

sujeta a

$$x + 2y \geq 3$$
$$4x - y \leq 6$$
$$x \geq 0, y \geq 0.$$

(b) Maximizar

$$f = x_1 + x_2 + 2x_3$$

sujeta a

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 2$$
$$x_1 - x_2 + x_3 \leq 8$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$$

34. Demostrar que los problemas siguientes son no factibles.

(a) Maximizar

$$f = 2x + 7y$$

sujeta a

$$2x + 5y \leq 8$$
$$4x + 6y \geq 11$$
$$x \geq 0, y \geq 0.$$

(b) Maximizar

$$w = 4x_1 - x_2 + 9x_3$$

sujeta a

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 8$$
$$4x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 6$$
$$8x_1 + 7x_2 + 4x_3 \geq 25$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$$

También es posible definir un punto esquina en un problema de programación lineal en tres variables. Supóngase que el conjunto restricción es el conjunto de vectores con tres componentes cuyas coordenadas satisfacen un cierto número de desigualdades lineales en tres variables. Un **posible punto esquina** es cualquier solución a exactamente tres de las ecuaciones lineales obtenidas transformando las desigualdades en ecuaciones. Una **solución factible (verdadero punto esquina)** es un posible punto esquina que satisfaga todas las desigualdades. Es posible demostrar que el máximo y el mínimo de una función lineal en el conjunto de restricciones ocurre en un punto esquina. En el caso de que haya cuatro variables en vez de tres, un posible punto esquina es cualquier solución a exactamente cuatro de las ecuaciones lineales, y así sucesivamente.

★ 35. Encuéntrense todos los puntos esquina del conjunto de restricciones determinado por las siguientes desigualdades

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 15$$
$$2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 26$$
$$5x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 43$$
$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$
$$x_3 \geq 0$$

[*Sugerencia:* Hay 20 maneras distintas de escoger tres ecuaciones de entre las seis correspondientes a las desigualdades dadas en este problema. Cada una de las soluciones al sistema formado por tres ecuaciones en tres incógnitas es un posible punto esquina. Se puede probar cada posible punto esquina para verificar si es un verdadero punto esquina.]

★ 36. Encuéntrense los valores máximos y mínimos de la función $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 - x_2 + 2x_3$ sujeta a las restricciones del Problema 35.

★ 37. Un problema clásico de programación lineal es el *problema de la dieta*. Se trata de determinar las cantidades de ciertos alimentos que cumplan con ciertas necesidades de nutrición a un costo mínimo. Por simplicidad, consideremos tres ali-

Tabla 8 (Secc. 1.2) *Cantidades de vitaminas en miligramos*

Vitamina	1 gal de leche	1 lb de carne	1 docena de huevos	Mínimos requerimientos diarios
A	1	1	10	1 mg
C	100	10	10	50 mg
D	10	100	10	10 mg
Costo	$2.00	$2.50	$0.80	

mentos: leche, carne y huevos, y tres vitaminas: A, C y D. Los datos para este problema aparecen en la Tabla 8.

(a) Sea x_1 el número de galones de leche, x_2 el número de libras de carne, y x_3 el número de docenas de huevos consumidos al día. Escríbase el problema de minimización de programación lineal en las tres variables cuya solución sea el costo mínimo. El conjunto de restricciones debe tener seis desigualdades.

(b) Encuéntrense los 20 posibles puntos esquina de este conjunto de restricciones.

(c) Encuéntrense las soluciones factibles. [*Sugerencia*: Son nueve.]

(d) Calcúlese el costo para cada solución factible.

(e) ¿Cuál es el costo mínimo y cómo se logra?

★ **38.** En un gran hospital, las operaciones quirúrgicas se clasifican en tres categorías según sus tiempos promedios en 30 minutos, 1 hora y 2 horas. El hospital recibe honorarios de $100, $150, o $200 para las operaciones de categorías I, II, o III, respectivamente. Si el hospital tiene ocho salas de operaciones, que se usan en promedio de 10 horas diarias, ¿cuántas operaciones de cada tipo debe programar el hospital para (a) maximizar los ingresos y (b) maximizar el número total de operaciones?

★ **39.** Una empresa que produce mezclas de frutas enlatadas tiene en almacén 10,000 libras de peras, 12,000 libras de duraznos y 8,000 libras de cerezas. La empresa produce tres tipos de mezclas y las vende en latas de 1 libra. La primera mezcla tiene la mitad de peras y la mitad de duraznos y se vende a $0.30. La segunda mezcla tiene cantidades iguales de las tres frutas y se vende $0.40. La tercera mezcla tiene la mitad de duraznos y la mitad de cerezas, y se vende a $0.50. ¿Cuántas latas deben producirse de cada mezcla para maximizar los ingresos?

1.3 Variables de holgura

Como se vio en la sección anterior, los problemas de programación lineal involucran cierto número de desigualdades lineales. En el método que se presenta en la siguiente sección para resolver estos problemas, se necesita transformar las desigualdades en ecuaciones.

Ejemplo 1 Considérese la desigualdad lineal

$$2x_1 + 5x_2 \leq 40 \tag{1}$$

La desigualdad (1) quiere decir que $2x_1 + 5x_2$ es menor que 40 o bien es igual a 40. Si es menor que 40, hay una cierta "holgura" en la desigualdad. Llamemos s_1 a esa holgura. Entonces s_1 es la diferencia entre 40 y la suma $2x_1 + 5x_2$. Es decir, de la definición que hicimos de s_1,

$$s_1 = 40 - 2x_1 - 5x_2 \tag{2}$$

o, reescribiendo la Ecuación (2),

$$2x_1 + 5x_2 + s_1 = 40 \tag{3}$$

Nótese que por medio de la introducción de una nueva variable, se transformó la desigualdad (1) en la Ecuación (3). Obsérvese también que $s_1 = 0$ (si $2x_1 + 5x_2 = 40$) o $s_1 > 0$ (si $2x_1 + 5x_2 < 40$), de modo que, en ambos casos, se tiene que

$$s \geq 0 \tag{4}$$

La variable s_1 es lo que se llama una ***variable de holgura.***

Variable de holgura Considérese la desigualdad lineal en n variables

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \tag{5}$$

En este caso la **variable de holgura** s_1 está definida por

$$s_1 = b_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - \cdots - a_{1n}x_n$$

de tal manera que la desigualdad (5) es equivalente a

$$\boxed{\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + s_1 &= b_1 \\ s_1 &\geq 0 \end{aligned}} \tag{6}$$

Ejemplo 2 Escribir el siguiente sistema de desigualdades lineales como un sistema de ecuaciones lineales con variables de holgura:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 &\leq 10 \\ 6x_1 + 8x_2 + 12x_3 &\leq 250. \end{aligned} \tag{7}$$

Solución Sean

y también

$$s_2 = 250 - 6x_1 - 8x_2 - 12x_3. \tag{9}$$

Entonces, por (7), se tiene que $s_1 \geq 0$ y $s_2 \geq 0$. Por último, reescribiendo (8) y (9), obtenemos el sistema

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + \ \ 5x_3 + s_1 \qquad &= 10 \\ 6x_1 + 8x_2 + 12x_3 \qquad + s_2 &= 250 \\ s_1 \geq 0, s_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

$A_{1,2}(-2)$ significa que multiplicamos el primer renglón por -2 y sumamos el resultado al segundo renglón. $M_2(⅓)$ significa que multiplicamos el segundo renglón por ⅓.

Considérese el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + \ \ 3x_3 + 5x_4 &= 10 \\ 2x_1 + 7x_2 + 12x_3 + \ \ x_4 &= 44 \end{aligned} \tag{10}$$

Resolvamos el sistema por reducción de renglones.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 & 10 \\ 2 & 7 & 12 & 1 & 44 \end{array}\right) \xrightarrow{A_{1,2}(-2)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 & 10 \\ 0 & 3 & 6 & -9 & 24 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{M_2(\frac{1}{3})} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 8 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{A_{2,1}(-2)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 11 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 8 \end{array}\right)$$

Hasta aquí podemos llegar. Ahora tenemos las ecuaciones (de la última matriz aumentada)

$$\begin{aligned} x_1 \qquad - \ \ x_3 + 11x_4 &= -6 \\ x_2 + \ \ 2x_3 - \ \ 3x_4 &= \ \ 8 \end{aligned}$$

Las infinitas soluciones de este sistema se pueden escribir

$$x_1 = -6 + \ \ x_3 - 11x_4 \tag{11}$$

$$x_2 = \ \ 8 - 2x_3 + \ \ 3x_4 \tag{12}$$

$$x_3, x_4 \text{ arbitrarias.}$$

En esta forma decimos que las variables x_1 y x_2 son **variables básicas** y que las variables x_3 y x_4 son **no básicas**. Es decir, las soluciones (11) y (12) del sistema (10) están dadas en forma tal que las variables básicas se presentan en términos de las variables no básicas.

Nota. Una de las soluciones de (10) se puede obtener inmediatamente a partir de (11) y (12) dándoles el valor de cero a las variables no básicas. Si

$x_3 = x_4 = 0$, entonces $x_1 = -6$, $x_2 = 8$, y una solución es

$$(-6, 8, 0, 0).$$

Ejemplo 3 Representar la solución del sistema (10) con variables básicas $x_2\ x_3$ y variables no básicas $x_1\ x_4$.

Solución El problema consiste en expresar x_2 y x_3 en términos de x_1 y x_4. De (11), se tiene que

$$x_3 = 6 + x_1 + 11x_4. \tag{13}$$

De (12), que

$$\begin{aligned} x_2 = 8 - 2x_3 + 3x_4 &\overset{\text{usando (13)}}{=} 8 - 2(6 + x_1 + 11x_4) + 3x_4 \\ &= 8 - 12 - 2x_1 - 22x_4 + 3x_4 = -4 - 2x_1 - 19x_4. \end{aligned}$$

Entonces, las soluciones de (10) se pueden escribir

$$\begin{aligned} x_2 &= -4 - 2x_1 - 19x_4 \\ x_3 &= 6 + x_1 + 11x_4 \\ &x_1,\ x_4 \text{ arbitrarias.} \end{aligned} \tag{14}$$

Esta misma respuesta se puede obtener de otra manera. Se vuelve a escribir el sistema (10) usando x_2 y x_3 como las primeras variables.

$$\begin{aligned} 2x_2 + 3x_3 + x_1 + 5x_4 &= 10 \\ 7x_2 + 12x_3 + 2x_1 + x_4 &= 44 \end{aligned}$$

Ahora, se hace reducción por renglones.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 1 & 5 & 10 \\ 7 & 12 & 2 & 1 & 44 \end{array}\right) \xrightarrow{M_1(\frac{1}{2})} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & 5 \\ 7 & 12 & 2 & 1 & 44 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{A_{1,2}(-7)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & 5 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{33}{2} & 9 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{M_2(\frac{2}{3})} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -11 & 6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{A_{2,1}(-\frac{3}{2})} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 19 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -11 & 6 \end{array}\right)$$

El último sistema es equivalente (recuérdese que x_2 y x_3 son las primeras variables) a

$$\begin{aligned} x_2 \phantom{{}+ x_3} + 2x_1 + 19x_4 &= -4 \\ x_3 - x_1 - 11x_4 &= 6 \end{aligned}$$

o bien

(15)

$$x_3 = \quad 6 + \; x_1 + 11x_4. \tag{16}$$

Este es el sistema (14).

Nota. Se puede obtener otra solución del sistema (10) dándoles el valor de cero a las nuevas variables no básicas. Si $x_1 = x_4 = 0$, entonces, a partir de (15) y (16), $x_2 = -4$ y $x_3 = 6$. Una solución al sistema (10) es

$$(0, -4, 6, 0)$$

Variables básicas y no básicas Supóngase que un sistema de m ecuaciones en n incógnitas, con $n > m$, tiene un número infinito de soluciones. Supóngase también que $n - m$ de las variables $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n$ se pueden escoger de manera arbitraria y que las variables restantes $x_1, x_2, \ldots, x_m$ se pueden expresar en términos de $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n$. Entonces, $x_1, x_2, \ldots, x_m$ se llaman **variables básicas** y $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n$ se llaman **variables no básicas**.

Ejemplo 4 Considérese el sistema de desigualdades lineales

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 &\leq 10 \\ 2x_1 + 5x_2 + 6x_3 &\leq 30 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 &\leq 50. \end{aligned}$$

(a) Escribir este sistema como un sistema de ecuaciones lineales introduciendo variables de holgura.

(b) Resolver el sistema resultante tomando x_1, x_2 y x_3, como las variables básicas y las variables de holgura como las variables no básicas.

Solución (a) Definiendo las variables de holgura s_1, s_2 y s_3 como se hizo antes, se tiene

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 + s_1 \qquad\qquad &= 10 \\ 2x_1 + 5x_2 + 6x_3 \qquad + s_2 \qquad &= 30 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 \qquad\qquad + s_3 &= 50 \\ s_1, s_2, s_3 &\geq 0 \end{aligned} \tag{17}$$

(b) Resolvemos este sistema de tres ecuaciones ($m = 3$) en seis incógnitas ($n = 6$) por reducción de renglones.

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 10 \\ 2 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 & 30 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 50 \end{array}\right) \xrightarrow[A_{1,3}(-1)]{A_{1,2}(-2)} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 40 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[A_{2,3}(-1)]{A_{2,1}(-2)}\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 8 & 5 & -2 & 0 & -10 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 1 & 30 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{M_3(\frac{1}{2})}\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 8 & 5 & -2 & 0 & -10 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 15 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[A_{3,2}(2)]{A_{3,1}(-8)}\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & -4 & -130 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 40 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 15 \end{array}\right)$$

Ahora la matriz de coeficientes tiene la forma escalonada reducida y el sistema puede escribirse

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\quad + s_1 + 2s_2 - 4s_3 &= -130 \\ x_2 \quad - s_1 \qquad\; + s_3 &= 40 \\ x_3 + \tfrac{1}{2}s_1 - \tfrac{1}{2}s_2 + \tfrac{1}{2}s_3 &= 15 \end{aligned}$$

o bien

$$\begin{aligned} x_1 &= -130 - s_1 - 2s_2 + 4s_3 \\ x_2 &= 40 + s_1 - s_3 \\ x_3 &= 15 - \tfrac{1}{2}s_1 + \tfrac{1}{2}s_2 - \tfrac{1}{2}s_3. \end{aligned}$$

Como en el Ejemplo 3, se puede obtener una solución del Sistema (17), dándoles el valor de cero a las variables no básicas. Si $s_1 = s_2 = s_3 = 0$, entonces $x_1 = -130$, $x_2 = 40$, y $x_3 = 15$, y la solución de (17) es

$$(-130, 40, 15, 0, 0, 0).$$

En la siguiente sección se describirá un nuevo método mucho más eficiente en la resolución de problemas de programación lineal. El primer paso de este método involucra la introducción de variables de holgura, y en los pasos siguientes se hacen cambios de variables básicas y no básicas en el problema.

Problemas 1.3

En los Problemas 1-5, escriba el sistema de desigualdades lineales como un sistema de ecuaciones lineales introduciendo las variables de holgura.

1. $x_1 + x_2 \leq 3$
   $2x_1 + x_2 \leq 7$

2. $3x_1 + x_2 - x_3 \leq 4$
   $2x_1 + x_2 + x_3 \leq 6$

3. $2x_1 + x_2 \leq 10$
   $3x_1 + 2x_2 \leq 30$
   $4x_1 + 7x_2 \leq 20$

4. $3x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 15$
   $2x_1 + 3x_2 + 7x_3 \leq 12$
   $4x_1 + 8x_2 + 5x_3 \leq 8$

5. $7x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 \leq 8$
$3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 12x_4 \leq 12$
$2x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 2x_4 \leq 9$

6. Considérese el sistema

$$x_1 + 2x_2 \leq 5$$
$$3x_1 + 7x_2 \leq 20.$$

(a) Escriba esto como un sistema de ecuaciones lineales, definiendo variables de holgura s_1 y s_2.

(b) Escriba todas las soluciones de este sistema lineal con x_1 y x_2 como variables básicas y s_1 y s_2 como variables no básicas.

7. En el Problema 6(b), escriba las soluciones con x_1 y s_1 como básicas y x_2 y s_2 como no básicas.

8. En el Problema 6(b), escriba las soluciones con x_2 y s_1 como variables básicas y x_1 y s_2 como variables no básicas.

9. Conteste las preguntas del Problema 6 para el sistema

$$2x_1 + 5x_2 \leq 12$$
$$4x_1 + 9x_2 \leq 20$$

10. En el Problema 9, escriba las soluciones con x_1 y s_2 como variables básicas y x_2 y s_1 como variables no básicas.

En los Problemas 11-20, (a) escriba el sistema de desigualdades lineales como un sistema de ecuaciones lineales introduciendo variables de holgura. (b) Resuelva el sistema escribiendo las variables básicas en términos de las variables no básicas.

11. $x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 8$
$2x_1 + 5x_2 + 5x_3 \leq 35$
Básicas: x_1, x_2
No básicas: s_1, s_2, x_3

12. $x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 8$
$2x_1 + 5x_2 + 5x_3 \leq 35$
Básicas: x_1, s_1
No básicas: x_2, x_3, s_2

13. $x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 8$
$2x_1 + 5x_2 + 5x_3 \leq 35$
Básicas: x_2, x_3
No básicas: x_1, s_1, s_2

14. $x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 8$
$2x_1 + 5x_2 + 5x_3 \leq 35$
Básicas: s_1, s_2
No básicas: x_1, x_2, x_3

15. $x_1 + 3x_2 \leq 5$
$2x_1 + 7x_2 \leq 20$
$3x_1 + 8x_2 \leq 40$
Básicas: x_1, x_2, s_1
No básicas: s_2, s_3

16. $x_1 + 3x_2 \leq 5$
$2x_1 + 7x_2 \leq 20$
$3x_1 + 8x_2 \leq 40$
Básicas: x_2, s_2, s_3
No básicas: x_1, s_1

17. $2x_1 + 4x_2 + 8x_3 \le 12$
$2x_1 + 5x_2 + 12x_3 \le 25$
$3x_1 + 6x_2 + 13x_3 \le 60$

Básicas: s_1, s_2, s_3

No básicas: x_1, x_2, x_3

18. $2x_1 + 4x_2 + 8x_3 \le 12$
$2x_1 + 5x_2 + 12x_3 \le 25$
$3x_1 + 6x_2 + 13x_3 \le 60$

Básicas: x_1, x_2, x_3

No básicas: s_1, s_2, s_3

19. $2x_1 + 4x_2 + 8x_3 \le 12$
$2x_1 + 5x_2 + 12x_3 \le 25$
$3x_1 + 6x_2 + 13x_3 \le 60$

Básicas: x_1, s_1, s_3

No básicas: x_2, x_3, s_2

20. $2x_1 + 4x_2 + 8x_3 \le 12$
$2x_1 + 5x_2 + 12x_3 \le 25$
$3x_1 + 6x_2 + 13x_3 \le 60$

Básicas: x_1, x_3, s_1

No básicas: x_2, s_2, s_3

1.4 Método simplex I: Problema de maximización estándar

El método del punto esquina que se trató en la Sección 1.2 puede ser demasiado tedioso si el número de variables y de restricciones es grande. En esta sección se describe un método para resolver problemas de programación lineal de manera mucho más eficiente. El método se llama **método simplex**. Fue desarrollado en 1947 por el matemático norteamericano George B. Dantzig. En 1976 el presidente Gerald Ford otorgó a Dantzig la Medalla Nacional de Ciencias, que es la presea más alta de los Estados Unidos en ciencia. En la ceremonia en la Casa Blanca se citó a Dantzig "por haber inventado la programación lineal y por haber descubierto métodos que condujeron a aplicaciones científicas y técnicas en gran escala a problemas importantes en logística, elaboración de programas, y optimización de redes, y al uso de las computadoras para hacer un uso eficiente de la teoría matemática".

Para establecer una idea preliminar sobre el método simplex, observe el conjunto de restricciones representado en la Figura 1.[†]

Supóngase que se trata de maximizar una función objeto f en este conjunto de restricciones. Se puede empezar encontrando un punto esquina, por ejemplo el marcado A. Cualquier segmento de recta que una dos puntos esquinas se llama **arista** del conjunto de restricciones (o simplex). Dantzig fue capaz de demostrar el siguiente hecho importante.

> Si f no toma su valor máximo en el punto esquina A, entonces existe una arista que parte de A, a lo largo de la cual aumenta f.

[†] Este conjunto (sombreado) en el plano se llama también **simplex**. Conjuntos de este tipo existen en tres o más dimensiones pero no intentaremos delinearlos.

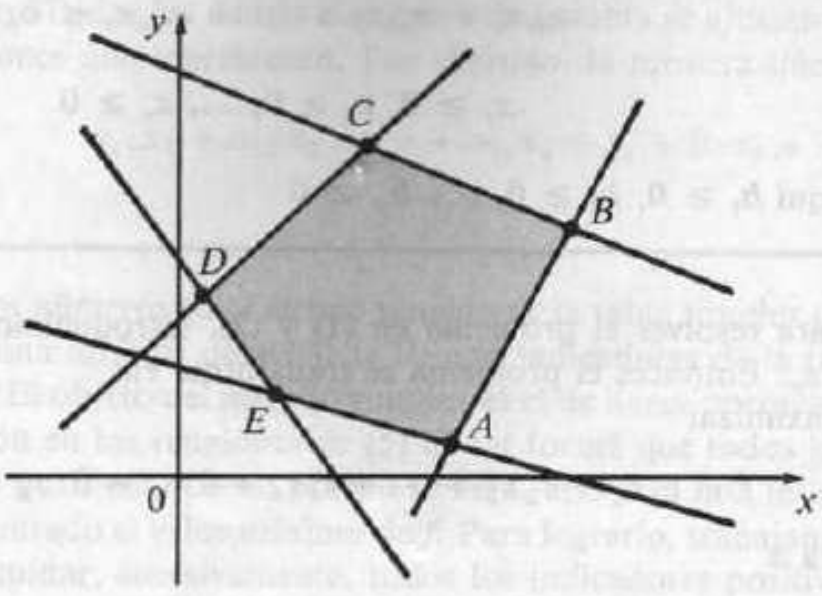


Figura 1
(Secc. 1.4)

Este hecho de enunciado tan sencillo da la idea clave del método simplex. Empezamos en A, y si f no toma su valor máximo en A, nos encontramos una arista del conjunto de restricciones a lo largo de la cual f aumenta. Esto nos lleva a un nuevo punto esquina. Si f toma su máximo valor allí, ya terminamos. Si no es así, continuamos por otra arista en donde f va en aumento, hasta llegar a otro punto esquina. Como hay un número finito de puntos esquina, finalmente llegaremos a una solución óptima después de un número finito de pasos. Nunca volveremos al mismo punto esquina, porque la función objetivo aumenta en cada paso.

En este método no es necesario determinar todos los puntos esquina. Otra gran ventaja del método simplex consiste en que sus pasos se pueden efectuar eficientemente por computadora.

Todo esto parece fácil, pero un proceso para encontrar el "siguiente" punto esquina y para evaluar f en ese punto no es nada obvio. El método simplex es un método para obtener el siguiente punto esquina que se necesita. El método involucra varios pasos técnicos. Antes de describir estos pasos, se describe el tipo de problema que puede resolverse por el método simplex.

Problema estándar de maximización en programación lineal

Encontrar el vector de n componentes $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ que maximice la función objetivo

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \quad (1)$$

y satisfaga las $m + n$ desigualdades lineales

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ \ldots,\ x_n \geq 0. \tag{2}$$

Aquí $b_1 \geq 0,\ b_2 \geq 0,\ \ldots\ b_m \geq 0$

Para resolver el problema en (1) y (2), introducimos las variables s_1, s_2, $\ldots$, s_m. Entonces el problema se transforma en:

Maximizar

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n + 0 \cdot s_1 + 0 \cdot s_2 + \cdots + 0 \cdot s_m \tag{3}$$

sujeta a

$$\begin{array}{lllll}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + s_1 & & & & = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & + s_2 & & & = b_2 \\
\quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots & & & & \ \ \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & & & + s_m & = b_m \\
x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0,\ s_1 \geq 0,\ s_2 \geq 0, \ldots, s_m \geq 0. & & & &
\end{array} \tag{4}$$

Inicialmente, podemos despejar s_1, s_2, $\ldots$, s_m en términos de x_1, x_2, $\ldots$, x_n, por lo que nuestras variables básicas son al principio, s_1, s_2, $\ldots$, s_m y nuestras variables no básicas son x_1, x_2, $\ldots$, x_n. Hacemos la suposición de que todas las b son no negativas. Así, igualando a cero todas las variables no básicas en (4) obtenemos nuestro punto esquina inicial $(0, 0, \ldots, 0)$.

Si uno o más de los elementos b es negativo, entonces existen técnicas para resolver el problema, pero no se discutirán aquí. Adviértase que $f = 0$ en $(0, 0, \ldots, 0)$.

Observación. El único requisito para un punto esquina si se satisfacen las restricciones de igualdad es que todas las variables tengan valores no negativos.

Tabla simplex inicial

Una manera cómoda de escribir la información contenida en este problema consiste en definir la **tabla simplex inicial**.

$$\begin{array}{cccc|ccccc|c}
x_1 & x_2 & \cdots & x_n & s_1 & s_2 & \cdots & s_m & & \\
\hline
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 & b_1 & s_1 \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 & b_2 & s_2 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & 0 & 0 & \cdots & 1 & b_m & s_m \\
\hline
c_1 & c_2 & \cdots & c_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & f &
\end{array} \tag{5}$$

Estas son, inicialmente, las variables básicas.

Las variables del lado derecho indican que s_1, s_2, $\ldots$, s_n *son las variables bási-*

cas. Todos los demás elementos de la tabla se ajustan exactamente a las ecuaciones que representan. Por ejemplo, la primera línea se lee

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + s_1 + 0 \cdot s_2 + \cdots + 0 \cdot s_m = b_1.$$

Indicadores Los números en el último renglón de la tabla simplex (exceptuando el de la esquina inferior derecha) se llaman **indicadores** de la tabla.

El objeto del método simplex es el de hacer operaciones elementales de renglón en los renglones de (5) de tal forma que todos los indicadores se hagan no positivos. Como pronto se verá, esto será una indicación de que se ha encontrado el valor máximo de f. Para lograrlo, trabajamos con la Tabla (5) para eliminar, sucesivamente, todos los indicadores positivos.

Método simplex-selección de un pivote o apoyo

Paso 1. Primero, escójase cualquier columna en (5) con indicador positivo (si hay más de un indicador positivo, escójase cualquiera) y considérense todas las componentes *positivas* en esa columna. Supongamos que se escogió la columna j.

Paso 2. Defínase como **pivote** de esta columna a una componente positiva a_{ij} en la columna j de tal manera que b_i/a_{ij} sea mínimo para todas las a_{ij}. Si este mínimo no es único, escójase cualquier elemento de la columna j que dé el cociente mínimo.

Ejemplo 1 Encontrar todos los pivotes o apoyos de la tabla simplex inicial.

Estos son los b

x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2		
2	-1	4	6	1	0	1	s_1
3	3	2	7	0	1	2	s_2
1	1	$\frac{1}{2}$	-2	0	0	f	

Estos son los indicadores positivos

Solución Primero, obsérvese que hay tres indicadores positivos, por lo que hay por lo menos tres pivotes. Los encontramos uno por uno.

Columna 1. Hay dos componentes positivos, así que formamos los cocientes

$$\frac{b_1}{a_{11}} = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \frac{b_2}{a_{21}} = \frac{2}{3}.$$

Como $1/2 \leq 2/3$, el pivote de la primera columna es 2.

Columna 2. Hay un solo componente positivo en la segunda columna —el número 3. Este es el pivote.

Columna 3. Formamos los cocientes

$$\frac{b_1}{a_{13}} = \frac{1}{4} \quad \text{y} \quad \frac{b_2}{a_{23}} = \frac{2}{2} = 1.$$

Como $1/4 < 1$, el pivote es 4.

La tabla aparece a continuación con los tres pivotes encerrados en círculos.

x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2		
2	−1	4	6	1	0	1	s_1
3	3	2	7	0	1	2	s_2
1	1	$\frac{1}{2}$	−2	0	0	f	

Ejemplo 2 Encontrar todos los pivotes de la tabla simplex inicial.

Estos son los b.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	s_1	s_2	s_3	s_4		
1	1	3	4	4	1	0	0	0	2	s_1
0	2	1	2	1	0	1	0	0	2	s_2
−1	5	0	1	2	0	0	1	0	1	s_3
1	−4	1	3	2	0	0	0	1	3	s_4
1	1	−1	0	2	0	0	0	0	f	

Estos son los indicadores positivos.

Solución Hay indicadores positivos en las columnas 1, 2 y 5.

Columna 1. Hay dos elementos positivos en esta columna. Formamos los cocientes

$$\frac{b_1}{a_{11}} = \frac{2}{1} = 2 \quad \text{y} \quad \frac{b_4}{a_{41}} = \frac{3}{1} = 3.$$

Ya que $2 < 3$, el pivote es 1.

Columna 2. Hay tres componentes positivas en esta columna. Formamos los cocientes

$$\frac{b_1}{a_{12}} = \frac{2}{1} = 2, \qquad \frac{b_2}{a_{22}} = \frac{2}{2} = 1, \qquad \frac{b_3}{a_{32}} = \frac{1}{5}.$$

Como $1/5$ es el mínimo cociente, el pivote es 5.

Columna 5. Hay cuatro componentes positivos en esta columna. Formamos los cocientes

$$\frac{b_1}{a_{15}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \quad \frac{b_2}{a_{25}} = \frac{2}{1} = 2, \quad \frac{b_3}{a_{35}} = \frac{1}{2}, \quad \frac{b_4}{a_{45}} = \frac{3}{2}.$$

Hay un empate. El menor cociente es 1/2, y hay dos cocientes con este valor. Por lo tanto, 4 y 2 son los pivotes en la columna 5. Volvemos a dibujar la tabla, con los pivotes encerrados en círculos.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	s_1	s_2	s_3	s_4		
1	1	3	4	4	1	0	0	0	2	s_1
0	2	1	2	1	0	1	0	0	2	s_2
−1	5	0	1	2	0	0	1	0	1	s_3
1	−4	1	3	2	0	0	0	1	3	s_4
1	1	−1	0	2	0	0	0	0	f	

Método simplex-pivoteo

Paso 3. Una vez escogido un pivote, úsese reducción de renglones para hacer que el pivote valga 1 y para que todos los demás componentes en la columna del pivote valgan 0.

Paso 4. Sustitúyase la variable básica en el lado derecho del renglón del pivote o apoyo por la variable no básica que encabeza la columna del pivote.

Observación. La ejecución de los Pasos 3 y 4 se llama **pivoteo.**

Ejemplo 3 En el Ejemplo 1, encontramos el pivote marcado en la tercera columna. Usar este componente como pivote.

x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2		
2	−1	4	6	1	0	1	s_1
3	3	2	7	0	1	2	s_2
1	1	$\frac{1}{2}$	−2	0	0	f	

Solución ***Paso 3.*** Debemos dividir el primer renglón entre 4 para que el coeficiente en el primer renglón y en la tercera columna valga 1. Después usamos el primer renglón para hacer cero los números 2 y 1/2 de la tercera columna. Al llevar a cabo estos pasos, usamos la misma notación de la reducción de renglones en el Capítulo 2.

x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2		
2	−1	4	6	1	0	1	s_1
3	3	2	7	0	1	2	s_2
1	1	$\frac{1}{2}$	−2	0	0	f	

Estas son las variables básicas iniciales.

$\xrightarrow{M_1(\frac{1}{4})}$

x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2		
$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	s_1
3	3	2	7	0	1	2	s_2
1	1	$\frac{1}{2}$	−2	0	0	f	

Como antes, esto significa que multiplicamos el primer renglón por ¼.

$\xrightarrow[A_{1,3}(-\frac{1}{2})]{A_{1,2}(-2)}$

x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2		
$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	s_1
2	$\frac{7}{2}$	0	4	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	s_2
$\frac{3}{4}$	$\frac{9}{8}$	0	$-\frac{11}{4}$	$-\frac{1}{8}$	0	$f-\frac{1}{8}$	

Multiplicar el primer renglón por −2 y sumarlo al segundo; multiplicar el primer renglón por −½ y sumarlo al tercer renglón.

Paso 4. Como el pivoteo se hizo en el primer renglón y en la tercera columna, la variable básica del primer renglón, s_1, pasa a ser no básica, y la variable no básica que encabeza la tercera columna, x_3, pasa a ser básica. Así, al terminar la operación de pivoteo, la tabla se ve así:

x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2		
$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	x_3 ← Esta es la nueva variable básica.
2	$\frac{7}{2}$	0	4	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	s_2
$\frac{3}{4}$	$\frac{9}{8}$	0	$-\frac{11}{4}$	$-\frac{1}{8}$	0	$f-\frac{1}{8}$	

Nótese cómo la variable x_3 se desplaza a la derecha como nuestra nueva variable básica. Esto quiere decir que podemos escribir x_3 en términos de las variables no básicas. Para hacerlo, interpretamos el primer renglón de la tabla:

$$\tfrac{1}{2}x_1 - \tfrac{1}{4}x_2 + x_3 + \tfrac{3}{2}x_4 + \tfrac{1}{4}s_1 = \tfrac{1}{4}$$

$$x_3 = \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{4}x_2 - \tfrac{3}{2}x_4 - \tfrac{1}{4}s_1.$$

Ejemplo 4 Pivotear sobre la componente encerrada de la tabla siguiente.

x_1	x_2	x_2	x_4	x_5	s_1	s_2	s_3	s_4		
1	1	3	4	4	1	0	0	0	2	s_1
0	2	1	2	1	0	1	0	0	2	s_2
−1	5	0	1	2	0	0	1	0	1	s_3
1	−4	1	3	2	0	0	0	1	3	s_4
1	1	−1	0	2	0	0	0	0	f	

Solución Efectuamos las operaciones de renglón requeridas.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	s_1	s_2	s_3	s_4		
1	1	3	4	4	1	0	0	0	2	s_1
0	2	1	2	1	0	1	0	0	2	s_2
−1	5	0	1	2	0	0	1	0	1	s_3
1	−4	1	3	2	0	0	0	1	3	s_4
1	1	−1	0	2	0	0	0	0	f	

Estas son las variables básicas iniciales.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	s_1	s_2	s_3	s_4		
	1	1	3	4	4	1	0	0	0	2	s_1
	0	2	1	2	1	0	1	0	0	2	s_2
$\xrightarrow{M_3(\frac{1}{5})}$	$-\frac{1}{5}$	1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	0	0	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	s_3
	1	−4	1	3	2	0	0	0	1	3	s_4
	1	1	−1	0	2	0	0	0	0	f	

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	s_1	s_2	s_3	s_4		
$A_{3,1}(-1)$	$\frac{6}{5}$	0	3	$\frac{19}{5}$	$\frac{18}{5}$	1	0	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{9}{5}$	s_1
$A_{3,2}(-2)$	$\frac{2}{5}$	0	1	$\frac{8}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	1	$-\frac{2}{5}$	0	$\frac{8}{5}$	s_2
$A_{3,4}(4)$	$-\frac{1}{5}$	1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	0	0	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	s_3
$\xrightarrow{A_{3,5}(-1)}$	$\frac{1}{5}$	0	1	$\frac{19}{5}$	$\frac{18}{5}$	0	0	$\frac{4}{5}$	1	$\frac{19}{5}$	s_4
	$\frac{6}{5}$	0	−1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{8}{5}$	0	0	$-\frac{1}{5}$	0	$f - \frac{1}{5}$	

Por último, la variable no básica x_2 que encabeza la segunda columna sustituye a la variable básica s_3 del tercer renglón.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	s_1	s_2	s_3	s_4		
$\frac{6}{5}$	0	3	$\frac{19}{5}$	$\frac{18}{5}$	1	0	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{9}{5}$	s_1
$\frac{2}{5}$	0	1	$\frac{8}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	1	$-\frac{2}{5}$	0	$\frac{8}{5}$	s_2
$-\frac{1}{5}$	1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	0	0	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	x_2 ← Esta es la nueva variable básica.
$\frac{1}{5}$	0	1	$\frac{19}{5}$	$\frac{18}{5}$	0	0	$\frac{4}{5}$	1	$\frac{19}{5}$	s_4
$\frac{6}{5}$	0	-1	$\frac{1}{5}$	$\frac{8}{5}$	0	0	$-\frac{1}{5}$	0	$f - \frac{1}{5}$	

Después de cada operación de pivoteo, las variables del lado derecho de la tabla simplex son variables básicas.

¿Por qué seguimos estos cuatro pasos? Es posible demostrar que suceden dos cosas importantes.

1. Los números de la columna de la derecha nos dan un nuevo punto esquina con todas las variables no básicas iguales a cero.
2. En este nuevo punto esquina ha aumentado el valor de la función objetivo.

Ejemplo 5 En la última tabla del Ejemplo 3, tenemos $x_3 = 1/4$ y $x_1 = x_2 = x_4 = 0$, porque x_1, x_2 y x_4 son variables no básicas. La última ecuación es

$$\tfrac{3}{4}x_1 + \tfrac{9}{8}x_2 - \tfrac{11}{4}x_4 - \tfrac{1}{8}s_1 = f - \tfrac{1}{8}$$

Pero $x_1 = x_2 = s_1 = 0$, puesto que todas éstas son variables no básicas; entonces, $f - 1/8 = 0$, o sea $f = 1/8$. Así, f aumentó del valor 0 (en (0, 0, 0)) al valor de 1/8 en (0, 0, 1/4, 0).

Nótese que el valor $s_2 = 3/2$ (obtenido al hacer $x_1 = x_2 = x_4 = s_1 = 0$ en la tabla) quiere decir que hay una holgura de 3/2 en la segunda desigualdad del problema original de programación lineal.

Ejemplo 6 En la última tabla del Ejemplo 4, vemos que $x_2 = 1/5$ y $x_1 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$ (éstas son variables no básicas). Aquí f aumentó del valor de 0 (en (0, 0, 0, 0)) al valor de 1/5 (en (0, 1/5, 0, 0, 0,)).

Tabla terminal

El proceso de pivoteo descrito anteriormente se repite hasta que se hayan eliminado todos los indicadores positivos. Finalmente se llega a una **tabla terminal**, cuando todos los indicadores son negativos o cero.

Ejemplo 7 La siguiente es una tabla terminal.

x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	s_4		
0	1	0	1	$\frac{1}{3}$	1	2	0	2	x_4
1	2	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0	3	x_1
0	0	1	0	0	1	3	0	1	x_3
0	3	0	0	2	0	4	1	2	s_4
0	-1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-1	0	$f-20$	

Todos los indicadores son no positivos.

Como todos los indicadores son no positivos, se ve que f tiene un máximo de 20 en el punto

$$(3, \underbrace{0}_{x_2 \text{ es no básico.}}, 1, 2).$$

¿Por qué? Escribimos la última ecuación de la tabla:

$$0 \cdot x_1 - x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 - \tfrac{1}{3}s_1 - \tfrac{1}{2}s_2 - s_3 + 0 \cdot s_4 = f - 20$$

o bien

$$-x_2 - \tfrac{1}{3}s_1 - \tfrac{1}{2}s_2 - s_3 = f - 20$$

y así

$$f = 20 - x_2 - \tfrac{1}{3}s_1 - \tfrac{1}{2}s_2 - s_3$$

Como todas las variables son no negativas, se ve que

$$-x_2 - \tfrac{1}{3}s_1 - \tfrac{1}{2}s_2 - s_3 \leq 0$$

Entonces $f \leq 20$. Obsérvese que $f = 20$ cuando $x_2 = s_1 = s_2 = s_3 = 0$. Las primeras cuatro ecuaciones de la tabla terminal se leen

$$\begin{aligned}
x_2 \quad + x_4 + \tfrac{1}{3}s_1 + s_2 + 2s_3 \quad &= 2 \\
x_1 + 2x_2 \quad + \tfrac{1}{2}s_1 + \tfrac{1}{2}s_2 + s_3 \quad &= 3 \\
x_3 \quad + s_2 + 3s_3 \quad &= 1 \\
3x_2 \quad + 2s_1 + 4s_3 + s_4 &= 2.
\end{aligned}$$

Como $x_2 = s_1 = s_2 = s_3 = 0$, estas ecuaciones se reducen a

$$x_4 = 2$$

$$x_1 = 3$$
$$x_3 = 1$$
$$s_4 = 2$$

Así se ve que f alcanza su mínimo de 20 en (3, 0, 1, 2).

Resumimos el método simplex para resolver un problema estándar de programación lineal de maximización.

Método simplex

1. Escriba las desigualdades como ecuaciones introduciendo variables de holgura.
2. Inicialmente, defina las variables básicas como variables de holgura.
3. Escriba toda la información en una tabla simplex inicial.
4. Siga los Pasos 1 y 2 para escoger un pivote en una columna con indicador positivo. Un indicador es un número positivo en el último renglón.
5. Siga los Pasos 3 y 4 para pivotear la componente escogida en 4.
6. Continúe haciendo los Pasos 4 y 5 hasta obtener una tabla terminal (sin indicadores positivos).
7. Lea la solución de la tabla terminal: Si $f - M$ está en la casilla inferior derecha, entonces el valor máximo de f es M. Los valores de las variables básicas se dan en la columna de la derecha. El valor de todas las variables no básicas es ahora cero.

Ejemplo 8 Maximizar

$$f = x_1 + x_2 + x_3$$

sujeta a

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 1$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 \leq 2$$
$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0.$$

Solución La tabla simplex inicial es

Estas son las variables básicas iniciales.

$$\begin{array}{cccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 & & \\ \hline 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & s_1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & s_2 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & f & \end{array}$$

Si empezamos con la primera columna (tiene indicador positivo), podemos usar como pivote $a_{11} = 1$ o bien $a_{21} = 2$, ya que $1/1 = 2/2 = 1$. Escogiendo a_{11} (porque ya tiene el valor de 1), hacemos pivoteo para obtener

OK

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2		
$A_{1,2}(-2)$	1	2	3	1	0	1	x_1 ← Esta es la nueva variable básica.
$A_{1,3}(-1)$ →	0	-3	-5	-2	1	0	s_2
	0	-1	-2	-1	0	$f - 1$	

Ya que todos los indicadores son no positivos, esta es una tabla terminal. Encontramos que $x_1 = 1$, $x_2 = x_3 = 0$ (x_2 y x_3 son variables no básicas), y $f = 1$ en el punto $(1, 0, 0)$. Esta es nuestra solución. Nótese que f aumentó de 0 (en $(0, 0, 0)$) a 1 (en $(1, 0, 0)$).

Ejemplo 9 Determínese el máximo de

$$f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 - 2x_2 + 2x_3$$

sujeto a las restricciones

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\le 15 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 &\le 26 \\ 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 &\le 43 \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 &\ge 0. \end{aligned}$$

Solución Escribimos la tabla simplex inicial después de haber introducido las variables de holgura s_1, s_2 y s_3.

Estas son las variables básicas iniciales.

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3		
1	1	1	1	0	0	15	s_1
2	1	2	0	1	0	26	s_2
5	2	3	0	0	1	43	s_3
3	-2	2	0	0	0	f	

Existen dos indicadores positivos. Escogiendo la tercera columna se tiene que

$$\tfrac{15}{1} = 15, \qquad \tfrac{26}{2} = 13, \qquad \tfrac{43}{3} = 14\tfrac{1}{3}$$

Como 13 es el mínimo cociente, hacemos pivoteo en la componente encerrada.

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3		
	1	1	1	1	0	0	15	s_1
	1	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	0	13	s_2
$\xrightarrow{M_2(\frac{1}{2})}$	5	2	3	0	0	1	43	s_3
	3	-2	2	0	0	0	f	

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3			
$A_{2,1}(-1)$	0	$\frac{1}{2}$	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	2	s_1	
$A_{2,3}(-3)$	1	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	0	13	x_3	← **Esta es la nueva variable básica.**
$\xrightarrow{A_{2,4}(-2)}$	2	$\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{3}{2}$	1	4	s_3	
	1	-3	0	0	-1	0	$f - 26$		

Nótese que f tiene el valor de 26 en (0, 0, 13). Inicialmente, f valía 0 en (0, 0, 0). Aún queda un indicador positivo. Formamos los cocientes

$$\tfrac{13}{1} = 13, \qquad \tfrac{4}{2} = 2$$

y hacemos pivoteo en la componente encerrada en círculo.

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3		
	0	$\frac{1}{2}$	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	2	s_1
	1	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	0	13	x_3
$\xrightarrow{M_3(\frac{1}{2})}$	1	$\frac{1}{4}$	0	0	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	2	s_3
	1	-3	0	0	-1	0	$f - 26$	

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3			
	0	$\frac{1}{2}$	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	2	s_1	
$A_{3,2}(-1)$	0	$\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{5}{4}$	$-\frac{1}{2}$	11	x_3	
$\xrightarrow{A_{3,4}(-1)}$	1	$\frac{1}{4}$	0	0	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	2	x_1	← **Esta es la nueva variable básica.**
	0	$-\frac{13}{4}$	0	0	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$f - 28$		

Todos los indicadores son no positivos, por lo que ésta es una tabla terminal. Como $f = 28 - 13/4x_2 - 1/4s_2 - 1/2s_3$, se ve que el máximo valor de f es 28, que se obtiene cuando $x_2 = s_2 = s_3 = 0$ y $x_1 = 2$, $x_3 = 11$, $s_1 = 2$. Es decir f toma su máximo valor de 28 en el punto esquina (2, 0, 11).

Nota. El resultado $s_1 = 2$ quiere decir que hay una holgura de 2 en la primera restricción del problema en una solución óptima. Esto se puede verificar observando que en (2, 0, 11),

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2 + 0 + 11 = 13,$$

que es menor que 15 en dos unidades.

Ejemplo 10 Una empresa manufacturera suspendió la producción de cierta línea de productos que no producían utilidades. Esto creó un considerable exceso en la capacidad de producción. La gerencia se plantea asignar esta capacidad sobrante de producción a la elaboración de uno o más de tres productos, que llamaremos productos 1, 2 y 3. La capacidad disponible en las máquinas de la empresa está limitada por la información que aparece en la Tabla 1.

Tabla 1 (Secc. 1.4)

Tipo de Máquina	Tiempo disponible (en horas máquina por semana)
Fresadora	200
Torno	100
Rectificadora	60

El número de horas máquina requeridos para cada unidad de los productos respectivos se da en la Tabla 2.

Tabla 2 (Secc. 1.4) *Productividad (en Horas Máquina Por Unidad)*

Tipo de Máquina	Producto 1	Producto 2	Producto 3
Fresadora	8	2	3
Torno	4	3	0
Rectificadora	2	1	1

El departamento de ventas reporta que el potencial de ventas para los tres productos es superior a la máxima velocidad de producción. Las utilidades unitarias serían de \$ 20, \$ 6 y \$ 8 para los productos 1, 2 y 3, respectivamente.

¿Cuanto debe producir la empresa de cada producto para maximizar las utilidades?

Solución Sean x_1, x_2 y x_3 los números de unidades de los productos 1, 2 y 3, respectivamente. Entonces el problema es el siguiente:

Maximizar

$$P = 20x_1 + 6x_2 + 8x_3 \qquad \text{Ecuación de utilidades}$$

sujeta a

$$8x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 200 \qquad \text{Restricción de la fresadora}$$

$$4x_1 + 3x_2 \leq 100 \qquad \textbf{Restricción del torno}$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 \leq 60 \qquad \textbf{Restricción de la rectificadora}$$
$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0.$$

Después de introducir tres variables de holgura, se puede escribir la siguiente tabla simplex inicial.

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3		
8	2	3	1	0	0	200	s_1
4	3	0	0	1	0	100	s_2
2	1	1	0	0	1	60	s_3
20	6	8	0	0	0	P	

Podemos hacer pivoteo en cualquiera de las tres primeras columnas. Como la meta consiste en minimizar el trabajo, observamos primero que si usamos el pivote de la columna 3, el pivote es 1 (ya que $60/1 < 200/3$). Entonces se obtiene

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3		
	2	-1	0	1	0	-3	20	s_1
$A_{3,1}(-3)$	4	3	0	0	1	0	100	s_2
$A_{3,4}(-8)$ $\longrightarrow$	2	1	1	0	0	1	60	$x_3 \longleftarrow$ **Esta es la nueva variable básica.**
	4	-2	0	0	0	-8	$P - 480$	

Hay un indicador positivo (en la primera columna). Ya que $20/2 = 10$ es menor que $100/4 = 25$, y que $60/2 = 30$, hacemos pivoteo en el 2 para obtener, sucesivamente,

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3		
	1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$	10	s_1
	4	3	0	0	1	0	100	s_2
$M_1(\frac{1}{2})$ $\longrightarrow$	2	1	1	0	0	1	60	x_3
	4	-2	0	0	0	-8	$P - 480$	

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3		
$A_{1,2}(-4)$	1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$	10	$x_1 \longleftarrow$ **Esta es la nueva variable básica.**
$A_{1,3}(-2)$	0	5	0	-2	1	6	60	s_2
$A_{1,4}(-4)$ $\longrightarrow$	0	2	1	-1	0	4	40	x_3
	0	0	0	-2	0	-2	$P - 520$	

La última tabla es una tabla terminal. Las máximas utilidades se encuentran cuando $x_1 = 10$, $x_3 = 40$ y $x_2 = 0$ (ésta es una variable no básica) y las utilidades obtenidas son de \$ 520. Es decir, si se producen 10 unidades del producto 1, 40 unidades del producto 3, y ninguna unidad del producto 2, la empresa maximiza sus utilidades. Para comprobar, obsérvese que

$$20x_1 + 6x_2 + 8x_3 = 20 \cdot 10 + 6 \cdot 0 + 8 \cdot 40 = 520.$$

Por último, la cantidad $s_2 = 60$ quiere decir que hay una holgura de 60 en la segunda restricción. Comprobando de otra manera, nótese que

$$4x_1 + 3x_2 = 4 \cdot 10 + 3 \cdot 0 = 40,$$

que es 60 y menor que 100.

Problemas 1.4

En los Problemas 1-3, determínense los pivotes de la tabla simplex inicial dada.

1.

2	−1	2	1	0	1
−2	0	3	0	1	2
1	1	1	0	0	f

2.

1	1	1	1	0	1
−1	0	1	0	1	2
2	1	3	0	0	f

3.

1	2	3	1	0	0	5
2	3	1	0	1	0	3
3	1	2	0	0	1	1
2	−1	3	0	0	0	f

En los Problemas 4-9, escríbase la tabla simplex inicial para el problema dado de programación lineal y enciérrense en un círculo todos los posibles pivotes.

4. Maximizar

$$f = 2x_1 + x_2$$

sujeta a

$$x_1 + x_2 \leq 1$$
$$2x_1 + 5x_2 \leq 2$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

5. Maximizar

$$f = x_1 - x_2$$

sujeta a

$$2x_1 + 3x_2 \leq 7$$
$$5x_1 + 8x_2 \leq 4$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

6. Maximizar

$$f = 4x_1 + 3x_2$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\le 5 \\ 3x_1 + 2x_2 &\le 7 \\ 5x_1 + 3x_2 &\le 14 \\ x_1 \ge 0, x_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

7. Maximizar

$$f = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\le 5 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &\le 6 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 &\ge 0. \end{aligned}$$

8. Maximizar

$$f = 2x_1 + x_2 + 3x_3$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 &\le 5 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 &\le 6 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &\le 7 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 &\ge 0. \end{aligned}$$

9. Maximizar

$$f = x_1 + x_2 - 3x_3$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\le 5 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 &\le 6 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &\le 4 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 &\ge 0. \end{aligned}$$

En los Problemas 10-14, encuéntrese la tabla terminal a partir de la tabla simplex inicial dada.

10.

x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2		
2	−1	4	6	1	0	1	s_1
3	3	2	7	0	1	2	s_2
1	1	$\frac{1}{2}$	−2	0	0	f	

11.

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2		
2	3	2	1	0	2	s_1
−1	0	4	0	1	2	s_2
1	2	0	0	0	f	

12. La tabla del Problema 1.
13. La tabla del Problema 2.
14. La tabla del Problema 3.

Resuélvanse los Problemas 15-26, por el método simplex.

15. Problema 5.

16. Problema 4.

17. Maximizar

$$f = 4x_1 + 5x_2$$

sujeta a

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &\le 6 \\ 3x_1 + 2x_2 &\le 5 \\ x_1 \ge 0, x_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

18. Maximizar

$$f = x_1 + 2x_2 + x_3$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 \qquad &\le 2 \\ x_2 \qquad &\le 1 \\ x_2 + 2x_3 &\le 3 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 &\ge 0. \end{aligned}$$

19. Problema 9.

20. Problema 8.

21. Maximizar

$$f = 5x_1 + 8x_2$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\le 3 \\ x_1 + 2x_2 &\le 4 \\ x_1 &\le \tfrac{5}{2} \\ x_2 &\le \tfrac{3}{2} \\ x_1 \ge 0, x_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

22. Maximizar

$$f = 5x_1 + x_2 + 3x_3$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 &\le 3 \\ 4x_2 + x_3 &\le 2 \\ x_1 - x_2 &\le 0 \\ x_3 &\le 1 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 &\ge 0. \end{aligned}$$

23. Maximizar

$$f = x_1 + 2x_2 + 2x_3$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 6x_3 &\le 12 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 &\le 10 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 &\le 5 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 &\ge 0. \end{aligned}$$

24 Maximizar

$$f = x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &\le 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 &\le 2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 &\le 3 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 &\ge 0. \end{aligned}$$

25. Maximizar

$$f = x_1 - x_2 + x_3$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &\le 5 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &\le 7 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &\le 8 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 &\le 9 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 &\ge 0. \end{aligned}$$

26. Maximizar

$$f = 5x_1 + 7x_2 + 15x_3 + 6x_4$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_4 &\le 1 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 &\le 2 \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 &\le 3 \\ x_1 + 5x_3 + 3x_4 &\le 4 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 &\ge 0. \end{aligned}$$

27. La Maderera Liva, S.A., fabrica tres tipos de triplay. La siguiente tabla resume las horas de producción por unidad en cada una de las tres operaciones de producción, además de información adicional para resolver el problema.

Triplay	**Operaciones (horas)**			**Utilidades por unidad**
	I	II	III	
Grado A	2	2	4	$40
Grado B	5	5	2	$30
Grado X	10	3	2	$20
Máximo tiempo disponible	900	400	600	

¿Cuántas unidades se deben producir de cada grado de madera?

28. La vinícola Ye Olde Cording Winery, en Peoria, Illinois, produce tres tipos de vino alemán: Heidelberg Sweet, Heidelberg Regular y Deutschland Extra Dry.

La materia prima, la mano de obra y las utilidades por galón para cada tipo de estos vinos se resume en la tabla siguiente.

Vino	Uvas grado A (bushels)	Uvas grado B (bushels)	Azúcar (libras)	Mano de obra (horas)	Utilidades por galón
Heidelberg Sweet	1	1	2	2	$1.00
Heidelberg Regular	2	0	1	3	$1.20
Deutschland Extra Dry	0	2	0	1	$2.00

Si la empresa vinícola tiene 150 bushels de uvas grado A, 150 bushels de uvas grado B, 80 libras de azúcar y 225 horas de trabajo disponibles en la próxima semana, ¿qué cantidades de cada producto harán que las utilidades de la empresa sean máximas?

(a) Resolver el problema por el método simplex.

(b) Interpretar las variables de holgura.

(c) ¿Qué recursos deberían aumentar para poder aumentar las utilidades de la empresa?

29. La empresa Helados El Paraíso vende helados de distintos sabores: chocolate, vainilla y plátano. A causa del clima, extremadamente cálido y a la alta demanda de sus productos, la empresa se encontró con déficit de algunos de los ingredientes: leche, azúcar y crema. Así que Helados El Paraíso no podía cumplir todos los pedidos de los establecimientos de venta al menudeo. Por lo que decidió producir las cantidades óptimas de cada uno de los sabores según las restricciones impuestas por la disponibilidad de los ingredientes básicos. La empresa va a racionar las ventas a las tiendas de menudeo.

Para eso, consiguió la siguiente información sobre las utilidades provenientes de los distintos sabores de helado, la disponibilidad de los ingredientes, y las cantidades requeridas por cada uno de los productos de distintos sabores.

		Uso por galón		
Sabor	Utilidades por galón	Leche (galones)	Azúcar (libras)	Crema (galones)
Chocolate	$1.00	0.45	0.50	0.10
Vainilla	$0.90	0.50	0.40	0.15
Plátano	$0.95	0.40	0.40	0.20
Máximo disponible		200	150	60

Determínese la cantidad óptima de cada producto para la empresa Helados El Paraíso. ¿Qué recursos adicionales se deben usar?

30. Una dama política planea recorrer su estado para atraer la atención sobre su candidatura, para familiarizarse mejor con los problemas de su estado y poder platicar con muchos votantes. Usará parte de su tiempo en recorrido rápido, parte por diversión y parte para hablar con los votantes. Para balancear el tiempo invertido en la búsqueda de sus objetivos durante el recorrido, decide caminar tanto como pueda en una hora, dedicando al menos 1/4 de hora a la conversación, y limitando el tiempo que dedique a la caminata rápida a no más de la suma del tiempo total de caminata y el tiempo dedicado a diversión. Si su caminata rápida es a una velocidad de 3 millas por hora, su velocidad cuando platica es de 1 milla por hora y se mantiene fija en un punto al hablar con los votantes, ¿qué fracción de cada hora debe dedicar a cada actividad para llegar tan lejos como pueda?

31. Un empleado de una tienda de helados quiere producir el "ice cream soda" más rico en calorías para sus amigos, que quepa en un vaso de 12 onzas. Los ingredientes son jarabe, crema, soda y helado. Para que se vea como soda y sepa a soda, la mezcla no debe contener más de 4 onzas de helado, al menos tanta soda como la cantidad total de jarabe y crema combinados, y no más de 1 onza más de jarabe que de crema. Si el jarabe contiene 75 calorías por onza, la crema contiene 50 calorías por onza, el helado contiene 40 calorías por onza, y la soda no contiene calorías, ¿cuántas onzas de cada ingrediente debe usar?

★ 32. Un inversionista tiene $10,000 que quisiera produjeran tanto dinero como sea posible. Quiere invertir parte de éste en acciones, parte en bonos, y colocar el resto en una cuenta de ahorros. El inversionista cree poder ganar 8% con el dinero que invierta en acciones y el 7% con el dinero que invierta en bonos. El banco paga el 5% de interés sobre las cuentas de ahorros. Como las acciones son una inversión con cierto riesgo, decide no invertir en acciones más de la mitad de la cantidad que invierta en bonos, y no invertir en acciones más de lo que ponga en el banco. El inversionista se quedará con al menos $2000 en el banco por si necesita dinero en efectivo de inmediato. ¿Cuánto dinero debe invertir en acciones, cuánto en bonos, y cuánto debe depositar en el banco?

33. Un joyero hace anillos, aretes, pisacorbatas y collares. No quiere trabajar más de 40 horas a la semana. Necesita 2 horas para hacer un anillo, 2 horas para hacer un par de aretes, 1 hora para hacer un pisacorbata, y 4 horas para hacer un collar. Estima que no podría vender más de 10 anillos, 10 pares de aretes, 15 pisacorbatas y 3 collares en una semana. El joyero cobra $50 por un anillo, $80 por un par de aretes, $25 por un pisacorbata, y $200 por un collar. ¿Cuántos anillos, aretes, pisacorbatas y collares debe hacer para tener los máximos ingresos brutos?

34. Una empresa que produce mezclas de frutas enlatadas tiene 10,000 libras de peras, 12,000 libras de duraznos y 8,000 libras de cerezas. La empresa produce tres tipos de mezclas, cada una en latas de 1 libra. La primera mezcla es la mitad de peras y la mitad de duraznos y se vende a 30¢. La segunda mezcla tiene partes iguales de las tres frutas y se vende a 40¢. ¿Cuántas latas se deben producir de cada mezcla para maximizar los ingredientes?

35. En un gran hospital se clasifican las operaciones quirúrgicas en tres categorías de acuerdo con el tiempo promedio que requieren en operaciones de 30 minutos, de 1 hora y de 2 horas. El hospital recibe una cuota de $100, $150, o de $200 por cada operación de las categorías I, II o III, respectivamente. Si el hospital tiene ocho salas de operaciones, con un uso promedio de 10 horas diarias, ¿cuántas operaciones de cada tipo debe programar el hospital para (a) maximizar los ingresos y (b) para maximizar el número de operaciones totales?

Resuelva los Problemas 36-38 por el método simplex.

36. Problema 1.2.28 **37.** Problema 1.2.31 **38.** Problema 1.2.30

1.5 Método simplex II: Problema dual mínimo

Existe una relación notable entre los problemas de máximo y mínimo de programación lineal. Con cada problema de máximos se relaciona un problema de mínimos, que se llama el **dual** del problema de máximos. A la inversa, el problema de máximos es el dual del problema de mínimos asociado. Esta asociación es útil, porque la solución de un problema está íntimamente relacionada con la solución de su problema dual.

Antes de definir el dual, definimos la transpuesta de una matriz.

Transpuesta Sea $A = (a_{ij})$ una matriz $m \times n$. Entonces la **transpuesta** de A, que se escribe A^t, es la matriz $n \times m$ que se obtiene intercambiando los renglones y las columnas de A. Brevemente, se puede escribir $A^t = (a_{ji})$. En otras palabras,

$$\boxed{\text{si } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ entonces } A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}} \quad (1)$$

Dicho de manera sencilla, el renglón i de A es la columna i de A^t y la columna j de A es el renglón j de A^t.

Ejemplo 1 Encontrar la transpuesta de cada una de las matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 6 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -6 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Intercambiando los renglones por las columnas de cada matriz se obtiene

$$A^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}, \quad C^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \\ -6 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Solución Nótese, por ejemplo, que 4 es la componente del renglón 2 y columna 3 de C, mientras que 4 es el componente del renglón 3 y la columna 2 de C^t. Esto es, la componente 2, 3 de C es el componente 3, 2 de C^t.

Ahora podemos definir el dual.

Problema dual de programación lineal

Los problemas siguientes de máximos y mínimos se llaman problemas **duales**.

1. Maximizar

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \tag{2}$$

sujeta a

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &\le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &\le b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\quad &\ \ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &\le b_m \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \ldots, x_n &\ge 0. \end{aligned} \tag{3}$$

2. Minimizar

$$g = b_1y_1 + b_2y_2 + \cdots + b_my_m \tag{4}$$

sujeta a

$$\begin{aligned} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \cdots + a_{m1}y_m &\ge c_1 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{m2}y_m &\ge c_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\quad &\ \ \vdots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \cdots + a_{mn}y_m &\ge c_n \\ y_1 \ge 0, \quad y_2 \ge 0, \ldots, y_m &\ge 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Puede observarse lo siguiente.

1. Si el **problema** de máximos involucra m desigualdades en n variables entonces su problema dual de mínimos involucra n desigualdades en m variables.
2. La matriz de los coeficientes de las desigualdades en (5) es la transpuesta de la matriz de coeficientes de las desigualdades en (3).
3. Las b_i en (3) son los coeficientes de las y_i en (4).
4. Las c_i en (5) son los coeficientes de las x_i en (2).

Ejemplo 2 Encuéntrese el problema dual de mínimos del siguiente problema de máximos.

Maximizar

$$f = 3x_1 + 2x_2 \tag{6}$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\le 5 \\ 3x_1 + 4x_2 &\le 8 \\ 2x_1 + x_2 &\le 4 \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 &\ge 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Solución Si se comparan los problemas duales (2), (3) y (4), (5), se puede observar que el número de las variables en el problema de mínimos es menor o igual al número de desigualdades lineales en el problema de máximos. Este número es 3. Además, como los coeficientes de las y_i en la expresión de g son las b_i en (3), se tiene:

Minimizar

$$g = 5y_1 + 8y_2 + 4y_3. \tag{8}$$

La matriz de los coeficientes de las desigualdades (7) es

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Su transpuesta es

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Así que, de (8) y de las observaciones 2 y 4, se tiene:

Minimizar

$$g = 5y_1 + 8y_2 + 4y_3$$

sujeta a

$$y_1 + 3y_2 + 2y_3 \geq 3$$

$$2y_1 + 4y_2 + y_3 \geq 2$$

$$y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0, \quad y_3 \geq 0.$$

Se muestran los dos problemas uno al lado del otro para hacer notar cómo están relacionados.

Problema de máximos	***Problema de mínimos***
Maximizar	**Minimizar**
2 incógnitas	3 incógnitas
$f = 3x_1 + 2x_2$	$g = 5y_1 + 8y_2 + 4y_3$
sujeta a	*sujeta a*
3 desigualdades $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 8 \\ 2x_1 + x_2 \leq 4 \end{cases}$	2 desigualdades $\begin{cases} y_1 + 3y_2 + 2y_3 \geq 3 \\ 2y_1 + 4y_2 + y_3 \geq 2 \end{cases}$
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$	$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0$
Matriz de coeficientes $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$	Matriz de coeficientes $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^t$

Ejemplo 3 Determínese el problema dual de:

Minimizar

$$g = 3y_1 + 4y_2 + 6y_3$$

sujeta a

$$\begin{aligned} 4y_1 + 7y_2 + \ \ y_3 &\geq 3 \\ y_1 + 3y_2 + 5y_3 &\geq 7 \\ 2y_1 + \ \ y_2 + 4y_3 &\geq 10 \\ y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0, \quad y_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

Solución La transpuesta de $\begin{pmatrix} 4 & 7 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ es $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 7 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

Así que el problema dual de máximos es:

Maximizar

$$f = 3x_1 + 7x_2 + 10x_3$$

sujeta a

$$\begin{aligned} 4x_1 + \ \ x_2 + 2x_3 &\leq 3 \\ 7x_1 + 3x_2 + \ \ x_3 &\leq 4 \\ x_1 + 5x_2 + 4x_3 &\leq 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

¿Por qué se estudia el problema dual? Se estudia el problema dual debido al notable resultado que dice que, en cierto sentido, los problemas duales tienen las mismas soluciones.

Teorema fundamental de la programación lineal

Sea f la función objeto de un problema de máximos de programación lineal, y sea g la función objeto del correspondiente problema dual de mínimos. Entonces el problema de máximos para f tiene una solución si y sólo si el problema de mínimos para g tiene solución. Además, $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ son soluciones óptimas de ambos problemas si y sólo si f evaluada en $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g$ evaluada en $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$.

Se muestra ahora cómo se puede usar el teorema fundamental de programación lineal y el método simplex para resolver un **problema estándar de minimización.** Este es un problema de mínimos de la forma de (4) y (5).

Resolución de un problema estándar de mínimos en programación lineal

1. Escríbase el problema dual de máximos.
2. Resuélvase el problema de máximos por el método simplex.
3. El valor mínimo de g (en (4)) es igual al valor máximo de f (en (2)).
4. Los valores de $y_1, y_2, \ldots, y_m$ que minimizan g son los negativos de los coeficientes de $s_1, s_2, \ldots, s_m$ en el último renglón de la tabla terminal.

Ejemplo 4 Supóngase que se han seguido los Pasos 1 y 2, para llegar a la siguiente tabla terminal para el problema dual de máximos.

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3		
1	0	0	4	3	50	s_1
0	1	0	7	2	80	x_1
0	0	1	6	4	65	x_2
-4	-2	-8	-3	-5	$f - 125$	

Los negativos de estos números son los valores de y_1, y_2 y y_3.

Entonces la solución al problema original de mínimos es $g = 125$ cuando $y_1 = 8$, $y_2 = 3$ y $y_3 = 5$.

Ejemplo 5 Determínese, por el método simplex, el valor mínimo de la función objetivo $g = 3y_1 + 2y_2$ sujeta a

$$
\begin{aligned}
5y_1 + \ \ y_2 &\geq 10 \\
2y_1 + 2y_2 &\geq 12 \\
y_1 + 4y_2 &\geq 12 \\
y_1 \geq 0, \quad y_2 &\geq 0.
\end{aligned}
$$

Solución. El problema dual de máximos es:

Maximizar

sujeta a

$$5x_1 + 2x_2 + x_3 \le 3$$
$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le 2$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0.$$

La tabla simplex inicial para este problema es

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2		
5	2	1	1	0	3	s_1
1	2	4	0	1	2	s_2
10	12	12	0	0	f	

Escogiendo la componente encerrada en un círculo como pivote, se obtiene

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2		
	5	2	1	1	0	3	s_1
$\xrightarrow{M_2(\frac{1}{2})}$	$\frac{1}{2}$	1	2	0	$\frac{1}{2}$	1	s_2
	10	12	12	0	0	f	

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2		
$A_{2,1}(-2)$	4	0	-3	1	-1	1	s_1
$\xrightarrow{A_{2,3}(-12)}$	$\frac{1}{2}$	1	2	0	$\frac{1}{2}$	1	x_2
	4	0	-12	0	-6	$f - 12$	

Haciendo un nuevo pivoteo en la componente señalada, se tiene

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2		
	1	0	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	s_1
$\xrightarrow{M_1(\frac{1}{4})}$	$\frac{1}{2}$	1	2	0	$\frac{1}{2}$	1	x_2
	4	0	-12	0	-6	$f - 12$	

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2		
$A_{1,2}(-\frac{1}{2})$	1	0	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	x_1
$\xrightarrow{A_{1,3}(-4)}$	0	1	$\frac{19}{8}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{7}{8}$	x_2
	0	0	-9	-1	-5	$f - 13$	
				$\uparrow$ $-y_1$	$\uparrow$ $-y_2$		

Y hemos llegado a la tabla terminal. La solución al problema de máximos es

Variable no básica

$$f = 13 \quad \text{en} \quad x_1 = \tfrac{1}{4},\ x_2 = \tfrac{7}{8},\ x_3 = 0.$$

La solución al problema original es

$$g = 13 \quad \text{en} \quad y_1 = 1 \quad \text{y} \quad y_2 = 5.$$

Comprobación. En (1, 5),

$$g = 3y_1 + 2y_2 = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 5 = 13.$$

Ejemplo 6 Un fabricante de alimento para perros anuncia que una lata de su producto Todo-carne proporciona los requerimientos mínimos diarios de carbohidratos y proteínas para un perro que pese un promedio de 20 libras. Los tipos disponibles de carne son res, caballo e hígado. Una onza de res cuesta 1.5¢ y contiene 0.5 onzas de carbohidratos y 0.2 onzas de proteínas. Una onza de carne de caballo cuesta 1¢ y contiene 0.6 onzas de carbohidratos y 0.3 onzas de proteínas. Una onza de hígado cuesta 2.5¢ y contiene 0.4 onzas de carbohidratos y 0.3 onzas de proteínas. Los requerimientos mínimos diarios para un perro que pese un promedio de 20 libras se estiman en 6 onzas de carbohidratos y 3.1 onzas de proteínas. ¿Qué combinación de los tres tipos de carne debe escoger el fabricante para satisfacer estos requisitos a un costo mínimo?

Solución Sean y_1, y_2, y y_3 los números de onzas de carne de res, de carne de caballo y de hígado, respectivamente, que han de usarse en el producto. Entonces el problema es:

Minimizar

$$g = 1.5y_1 + y_2 + 2.5y_3$$

sujeta a

$$0.5y_1 + 0.6y_2 + 0.4y_3 \geq 6$$
$$0.2y_1 + 0.1y_2 + 0.3y_3 \geq 3.1$$
$$y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0, \quad y_3 \geq 0.$$

El problema dual de máximos es

Maximizar

$$f = 6x_1 + 3.1x_2$$

sujeta a

$$0.5x_1 + 0.2x_2 \leq 1.5$$
$$0.6x_1 + 0.1x_2 \leq 1$$
$$0.4x_1 + 0.3x_2 \leq 2.5$$
$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

La tabla simplex inicial es

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3		
0.5	0.2	1	0	0	1.5	s_1
0.6	0.1	0	1	0	1	s_2
0.4	0.3	0	0	1	2.5	s_3
6	3.1	0	0	0	f	

Ahora se puede hacer pivoteo en la primera o en la segunda columna. Unos cuantos cálculos en calculadora muestran que si el pivoteo se hace en la componente encerrada, todos los indicadores serán no positivos después de una operación de pivoteo.

$\xrightarrow{M_1(5)}$

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3		
2.5	1	5	0	0	7.5	s_1
0.6	0.1	0	1	0	1	s_2
0.4	0.3	0	0	1	2.5	s_3
6	3.1	0	0	0	f	

$\xrightarrow{A_{1,2}(-0.1),\ A_{1,3}(-0.3),\ A_{1,4}(-3.1)}$

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3		
2.5	1	5	0	0	7.5	x_2
0.35	0	-0.5	1	0	0.25	s_2
-0.35	0	-1.5	0	1	0.25	s_3
-1.75	0	-15.5	0	0	$f - 23.25$	

La última tabla es terminal, y la solución está dada por $g = 23.25$ en $y_1 = 15.5$, $y_2 = 0$ y $y_3 = 0$. Esto quiere decir que el costo mínimo para una lata de alimento para perro es de $23\frac{1}{4}$¢. Este costo se alcanza usando $15\frac{1}{2}$ onzas de carne de res sin usar carne de caballo ni hígado.

Problemas 1.5

En los Problemas 1-10, encuéntrese la transpuesta de la matriz dada.

1. $\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ 5. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & 5 \end{pmatrix}$ 6. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -5 \\ 3 & -5 & 7 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 8. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 4 \\ 1 & 6 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ 9. $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{pmatrix}$.

10. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

En los Problemas 11-20, encuéntrese el problema dual del problema de programación lineal dado.

11. Maximizar

$$f = 2x_1 + 5x_2$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leq 5 \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 7 \\ x_1 + x_2 &\leq 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

12. Maximizar

$$f = 4x_1 + 3x_2$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &\leq 5 \\ 3x_1 - 2x_2 &\leq 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

13. Minimizar

$$g = 2y_1 + 3y_2$$

sujeta a

$$\begin{aligned} 2y_1 + y_2 &\geq 1 \\ y_1 + 2y_2 &\geq 1 \\ y_1 \geq 0, y_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

14. Minimizar

$$g = 5y_1 + 3y_2$$

sujeta a

$$\begin{aligned} 2y_1 + y_2 &\geq 1 \\ y_1 + 2y_2 &\geq 1 \\ y_1 + y_2 &\geq 3 \\ y_1 \geq 0, y_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

15. Maximizar

$$f = x_1 + x_2 + x_3$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\leq 5 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &\leq 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

16. Maximizar

$$f = 2x_1 + 8x_2 + 3x_3$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 &\leq 5 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 &\leq 6 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &\leq 7 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

17. Minimizar

$$g = 2y_1 + 5y_2 + 3y_3$$

sujeta a

$$\begin{aligned} y_1 + 2y_2 + y_3 &\geq 13 \\ 4y_1 + y_2 + 2y_3 &\geq 21 \\ -3y_1 - y_2 + 4y_3 &\geq 11 \end{aligned}$$

18. Maximizar

$$W = 4x_1 - x_2 + 9x_3$$

sujeta a

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 &\leq 8 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 &\leq 6 \\ 8x_1 + 7x_2 + 4x_3 &\leq 25 \end{aligned}$$

19. Maximizar

$$f = x_1 + 2x_2 - x_3 + 5x_4$$

sujeta a

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq 12$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0.$$

20. Minimizar

$$g = 3y_1 + y_2 + 5y_3 + 12y_4$$

sujeta a

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \geq 10$$
$$2y_1 - y_2 + y_3 + 2y_4 \geq 14$$
$$5y_1 - 8y_2 - 3y_3 + 3y_4 \geq 5$$
$$2y_1 - y_2 - 5y_3 + 3y_4 \geq 0$$
$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0, y_4 \geq 0.$$

21. Resuélvase el Problema 13 por el método simplex.

22. Resuélvase el Problema 14 por el método simplex.

23. Resuélvase el Problema 17 por el método simplex.

24. Resuélvase el Problema 20 por el método simplex.

25. Dos alimentos contienen únicamente carbohidratos y proteínas. El Alimento I cuesta 50¢ por libra y contiene 90% de carbohidratos (en peso). El Alimento II cuesta \$1 la libra y su contenido de carbohidratos es de 60%. ¿Qué cantidades de estos dos alimentos proporcionan 2 libras de carbohidratos y 1 libra de proteínas a un costo mínimo? ¿Cuál es el costo por libra de esta mezcla?

26. Continuando con el Problema 25, supóngase que hay un tercer alimento disponible, cuyo costo es de \$2 la libra y con un contenido de carbohidratos del 30% y con 70% de proteínas. ¿Qué cantidades de estos tres alimentos proporcionan 2 libras de carbohidratos y 1 libra de proteínas a un costo mínimo? ¿Cuál es el costo por libra de esta mezcla?

★27. En la producción de fertilizantes se combinan tres productos químicos en distintas proporciones o grados y se venden en unidades de 100 libras. Supóngase que los tres compuestos cuestan 20¢, 15¢ y 5¢, la libra, respectivamente. En todas las mezclas debe haber al menos 20 libras del primer compuesto, y la cantidad del tercer compuesto en la mezcla no debe ser mayor que la cantidad del segundo componente. ¿Cuántas libras de cada compuesto se deben agregar a una bolsa de 100 libras de fertilizantes para minimizar el costo de una bolsa de fertilizante? [*Sugerencia*: Debido a la restricción de igualdad, esto se puede escribir como un problema que involucra a sólo dos variables.]

28. Una mujer quiere diseñar un programa de ejercicios semanales, incluyendo caminata, bicicleta y natación. Para variar los ejercicios, planea invertir al menos tanto tiempo en bicicleta como en la combinación de caminata y natación. Además, quiere nadar al menos 2 horas a la semana, porque le gusta más nadar que los otros ejercicios. En caminata consume 600 calorías por hora, en la bicicleta usa 300 calorías por hora y nadando gasta 300 calorías por hora. Quiere quemar al menos 3000 calorías a la semana por medio de los ejercicios. ¿Cuántas horas debe dedicar a cada tipo de ejercicio si quiere minimizar el número de horas invertidas?

CAPÍTULO 2

Teoría de juegos

2.1 Juegos entre dos personas: Estrategias puras

La teoría moderna de juegos fue desarrollada en la década de 1940 por John von Neumann y Oskar Morgenstern* para dar un marco matemático general a la economía. Las ideas principales de esta teoría se extrajeron de juegos bien conocidos como el ajedrez, el bridge, el solitario, dominó y damas. La teoría general se desarrolló sin hacer referencia concreta a ningún juego en particular. La teoría de juegos se puede aplicar al análisis de cualquier comportamiento competitivo, incluyendo los juegos ordinarios, la economía, la guerra y la competencia biológica. En el estudio de la competencia biológica, la teoría de juegos proporciona un marco conceptual útil para entender el comportamiento.††

Muchos de los juegos más conocidos tienen oponentes o competidores que deben hacer una secuencia de movimientos de acuerdo con las reglas del juego. En algunos juegos, los movimientos sucesivos se hacen con una información completa sobre las oportunidades del oponente (como en el ajedrez). En otros juegos, los movimientos se hacen con información incompleta (como en el bridge). Un jugador puede decidir sus movimientos al azar (por ejemplo lanzando una moneda) o de manera deliberada considerando las jugadas posibles. El juego puede terminar después de un número finito de movimientos con un ganador y un perdedor. Generalmente hay un premio al ganador del juego,

* John von Neumann y Oskar Morgenstern, *The Theory of Games and Economic Behavior*, (Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1944).

†† R.C. Lowontin, "Evolution and the Theory Games," *Journal of Theoretical Biology*, 1(1961): 382-403.

L.B. Slobodkin, "The Strategy of Evolution," *American Scientist*, 52(1964): 342-357.

que puede ser en efectivo o la mera satisfacción de haber ganado. (El premio que obtiene una especie en el juego ecológico es la posibilidad de seguir jugando).

Un juego se caracteriza por sus reglas. En algunos casos, el juego puede ser tan complicado que resultará difícil descubrirlas. Considérese el problema de determinar las reglas del ajedrez viéndolo jugar. Después de cuatro o cinco juegos, se habrán descubierto las reglas principales, pero sería necesario observar muchos más partidos para determinar el resto de las reglas. De manera similar, se pueden considerar las complejas interacciones que se dan en un sistema social humano o de un sistema ecológico como un juego entre muchos jugadores y reglas difíciles de entender de manera completa.

Cuando ya se conocen las reglas de un juego, el problema consiste en determinar la manera que tienen los jugadores de escoger sus movimientos y las consecuencias de estos movimientos. En otras palabras, los jugadores deben determinar sus estrategias analizando las reglas del juego. El resultado final de un juego ordinariamente depende de manera crítica de la selección de movimiento de todos los jugadores. En juegos complejos, puede ser imposible analizar todas las posibilidades y, en ese caso, los jugadores deben basarse en la experiencia, la intuición, o en simples pruebas y errores para determinar sus movimientos.

En esta sección y en la siguiente, se estudiará un juego simple entre dos personas llegando a un nivel considerable de detalle. Los conceptos que se presentan y los resultados deducidos para este juego forman un modelo de análisis para juegos más generales. Empezamos con tres ejemplos de juegos entre dos personas.

Ejemplo 1 **Monedas Emparejadas.** Dos jugadores, R y C, colocan cada uno una moneda frente a ellos, cubriéndola, y determinan si el lado expuesto de la moneda es cara (H) o cruz (T). Ninguno de los jugadores sabe al principio qué lado de la moneda escogió el otro jugador. Entonces se descubren las monedas. Si las dos muestran el mismo lado (las dos son caras o cruces), el jugador R paga $1 al jugador C. Si las monedas muestran lados distintos, el jugador C paga $1 al jugador R.

Este juego se puede describir en términos de una **matriz de pagos.**

$$\begin{array}{ccc} & & \textit{Jugador } C \\ & & \begin{array}{cc} H & \;\;T \end{array} \\ \textit{Jugador } R & \begin{array}{c} H \\ T \end{array} & \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Si, por ejemplo, el jugador R escoge A y el jugador C escoge S, el jugador R gana 1 unidad (en este caso $1). Si los dos jugadores escogen A, pierde una unidad el jugador R.

Ejemplo 2 **Un Juego de Negocios.** Los únicos dos supermercados en Ciudad Central son Grandes Ahorros y Alimentos El Gigante. El mercado al menudeo se surte

Tabla 1 (Secc. 2.1) *Alternativas de mercadeo para supermercados en competencia*

Alternativas para Grandes Ahorros \ Alternativas para Alimentos El Gigante	A Aumentar precios	M Mantener precios	D Disminuir precios
(*A*) Aumentar precios	2	−2	−7
(*M*) Mantener precios	6	0	−3
(*D*) Disminuir precios	10	5	3

de estas dos empresas. Debido al incremento en los costos, Grandes Ahorros quiere aumentar sus precios. Pero teme que si lo hace perderá parte de las ventas en favor de Alimentos El Gigante. Por otra parte, si disminuye sus precios, mientras Alimentos El Gigante aumenta los suyos, el aumento resultante de las ventas compensará con creces las utilidades menores por artículo. Cada empresa tiene tres alternativas: aumentar los precios, mantenerlos sin cambio, y reducir los precios.

Grandes Ahorros puede controlar sus propios precios pero no tiene control en lo que haga Alimentos El Gigante. Para ayudarse en la decisión, contrata a un analista de mercados independiente, que obtiene los datos de la Tabla 1. Los números de la tabla representan aumentos o disminuciones porcentuales. Por ejemplo, si Grandes Ahorros mantiene sus precios y Alimentos el Gigante los disminuye, Grandes Ahorros *perderá* el 3% del número total de sus clientes en favor de Alimentos El Gigante. Si Grandes Ahorros disminuye sus precios y Alimentos El Gigante los aumenta, Grandes Ahorros ganará el 10% del mercado.

Estos datos se pueden representar en la siguiente matriz de pagos.

$$\begin{array}{cc} & \text{Alimentos El Gigante} \\ & \begin{array}{ccc} A & M & D \end{array} \\ \text{Grandes Ahorros} \begin{array}{c} A \\ M \\ D \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & -2 & -7 \\ 6 & 0 & -3 \\ 10 & 5 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

Ejemplo 3 **Juego de Guerra.*** Durante la Segunda Guerra Mundial, ocurrió una batalla crítica, la Batalla del Mar de Bismarck, para controlar Nueva Guinea. El jefe

* Este ejemplo se adaptó de uno que figura en *Games and Decisions* de R. Duncan Luce y

de los aliados, el general Kenney, tenía reportes de la inteligencia que indicaban que los japoneses harían movimientos de tropa y convoyes del puerto de Rabaul, en la punta oriental de la isla de Nueva Bretaña, a Lae, que está justo al este de Nueva Bretaña en Nueva Guinea. El jefe de los japoneses tenía dos alternativas: tomar una ruta pasando por el norte de Nueva Bretaña, o bien otra por el sur de Nueva Bretaña. En la ruta por el norte, era casi seguro que la visibilidad sería muy mala, mientras que en la ruta por el sur era probable que el clima estuviera despejado. El viaje les tomaría tres días por cualquiera de las rutas.

El general Kenney tenía la opción de concentrar la mayor parte de sus aviones de reconocimiento en una ruta o en la otra. Una vez localizado, el convoy podría ser bombardeado hasta su llegada a Lae. En días de bombardeo, el personal de Kenney estimaba para las distintas opciones los resultados que se dan en la Tabla 2.

Tabla 2 (Secc. 2.1) *Alternativas para los japoneses y los aliados (número de días de bombardeo)*

Opciones para los aliados \ Opciones para los japoneses	Ruta norte	Ruta sur
Ruta norte	2	2
Ruta sur	1	3

Una vez más, estas opciones se pueden representar por medio de una matriz de pagos.

$$\begin{array}{lc} & \textit{Opciones para los japoneses} \\ \textit{Opciones para los aliados} & \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} N & S \end{array} \\ \begin{array}{c} N \\ S \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \end{array} \end{array}$$

¿Qué rutas se debieron escoger? Si el convoy japonés tomara la ruta norte, se expondría a 1 o 2 días de bombardeo. Si tomara la ruta sur, se tendría que enfrentar con 2 o 3 días de bombardeo. Parece mejor tomar la ruta norte. Desde el punto de vista del general Kenney, si concentra sus fuerzas en el norte, garantizaría al menos 2 días de bombardeo; en el sur sólo podría garantizar 1 día de bombardeo.

Resulta que los dos comandantes escogieron la ruta norte y, como se verá próximamente, estas selecciones son consistentes con las previstas por la teoría de juegos.

Estos ejemplos conducen a la siguiente definición.

Juego de matriz Sea $A = (a_{ij}$ una matriz $m \times n$. Considérese un juego determinado por A entre dos competidores R y C (renglones y columnas) de acuerdo a las siguientes reglas.

1. En cada movimiento del juego, R escoge uno de los m renglones de A, y C escoge una de las n columnas de A. Estas selecciones se hacen simultáneamente, y ninguno de los jugadores sabe de antemano la elección (o movimiento) del otro competidor.
2. Si R escoge el renglón i y C escoge la columna j, C debe pagar a R la cantidad a_{ij}. Si a_{ij} es negativo quiere decir que C recibe una cantidad $-a_{ij}$ de R.

Este es el **juego de matriz** $m \times n$ determinado por la matriz $m \times n$ denotada por $A = (a_{ij})$.

El juego de matriz puede terminar después de un movimiento o puede continuar durante cualquier número de movimientos. La matriz $A = (a_{ij})$ del juego se llama **matriz del juego** o **matriz de pagos**.

Los ejemplos que siguen ilustran la manera de analizar los juegos de matriz.

Ejemplo 4 Describir los juegos de matriz correspondientes a cada una de las siguientes matrices de pago.

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ (b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Solución (a) En este juego de matriz 2×2, R y C tienen dos opciones cada uno. Si R escoge el primer renglón, R gana 1 si C escoge la primera columna, o 2 unidades si C escoge la segunda columna. En el caso de que R escoja el segundo renglón, pierde 2 unidades si C escoge la primera columna y gana 3 unidades si C escoge la segunda columna. Si C juega racionalmen-, escogerá la primera columna. En ese caso, R debería escoger el primer renglón. Con estas opciones, R tiene la garantía de ganar al menos una unidad y C tiene la garantía de no perder más de 1 unidad.

(b) En este juego de matriz 3×4, R tiene tres opciones y C tiene cuatro opciones. Analizando las opciones posibles, es claro que la mejor opción de C consiste en escoger la segunda columna. Con esta opción, C tiene la garantía de no perder. La mejor opción de R está en la elección del primer renglón. Con estas selecciones de entre las opciones posibles, no se da ningún pago entre los jugadores.

El juego general de matriz $m \times n$ es un ejemplo de un juego de **suma cero entre dos personas**, ya que son dos los que compiten y la suma de sus ganancias

Los dos jugadores de un juego de la matriz $A = (a_{ij})$ de $m \times n$ deben analizar sus posibles movimientos y decidir en qué renglones o columnas jugar en movimientos sucesivos. Una **estrategia pura** para R (o C) equivale a la decisión de jugar en el mismo renglón (o columna) en cada movimiento del juego. Se dice que el jugador R (o C) está usando una **estrategia mixta** si escoge más de un renglón (o columna) en movimientos distintos del juego. Si ambos jugadores usan estrategias puras, el resultado de cada movimiento es exactamente el mismo y el juego es completamente predecible. Por ejemplo, si R siempre escoge el renglón i y C siempre escoge la columna j, en cada juego R recibe a_{ij} unidades de C. Cuando se usan estrategias mixtas por alguno de los jugadores o por ambos, el juego es más complicado. Por ejemplo, si R decide jugar una estrategia mixta, hará su selección aleatoriamente de entre los renglones para aumentar sus ganancias.

Un poco de teoría de probabilidades

Supóngase que se lleva a cabo un experimento. A cada resultado posible E del experimento, le asignamos un número entre 0 y 1. Este número se llama la **probabilidad de que** se dé el resultado E y se denota por P(E). Debe enfatizarse que $0 \leq P(E) \leq 1$. Por ejemplo, si se lanza al aire una moneda no cargada, entonces P(cara) = P(cruz) = 1/2. Como otro ejemplo, una baraja tiene 52 cartas. De éstas, 13 son corazones. Así que si se escoge al azar una carta de la baraja, se tiene que

$$P(\text{corazón}) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

En un experimento, la suma de las probabilidades de todos los posibles resultados es 1.

Claro que no todas las probabilidades se computan de manera tan sencilla. Se han escrito libros completos sobre la materia. Sin embargo, no se necesita tener la habilidad de calcular probabilidades para entender el papel que tiene la teoría de probabilidades en la teoría de juegos.

Un **vector de probabilidades** es un vector con componentes no negativas y cuya suma de las componentes es uno. Los siguientes son vectores de probabilidad: (1/2, 1/2), (1/4, 1/2, 0, 1/4) y (0.11, 0.23, 0.17, 0.08, 0.32, 0.09).

Una **variable aleatoria** es una función que asigna un número a cada posible resultado de un experimento. El **valor esperado** de un valor aleatorio es un promedio pesado de los valores que puede tomar la variable aleatoria. Para calcular el valor esperado, se multiplica cada valor de la variable aleatoria por la probabilidad de obtener ese valor. Por ejemplo, supóngase que los valores posibles de la variable aleatoria son 7, 5, −3 y 10, con probabilidades P(7) = 1/8, P(5) = 5/16, P(−3) = 1/2 y P(10) = 1/16. (Obsérvese que estas probabilidades suman 1.)

Se tiene

$$\begin{aligned}\text{Valor esperado} &= 7P(7) + 5P(5) + (-3)P(-3) + 10P(10)\\ &= 7 \cdot \frac{2}{16} + 5 \cdot \frac{5}{16} - 3 \cdot \frac{8}{16} + 10 \cdot \frac{1}{16}\\ &= \frac{14 + 25 - 24 + 10}{16} = \frac{25}{16}\end{aligned}$$

Regresamos a nuestra discusión de la estrategia.

¿Cuándo se usará una estrategia pura y cuándo una mixta? Para dar respuesta a estas preguntas necesitamos una mayor precisión sobre lo que entendemos por estrategia.

Estrategia Una estrategia para R en el juego de la matriz $A = (a_{ij})$ de $m \times n$ es un vector de probabilidad $\mathbf{p} = (p_1\ p_2\ \ldots\ p_m)$ donde p_i es la probabilidad de que R juegue escogiendo el renglón i para $i = 1, 2, \ldots, m$. Una estrategia para C es un vector de probabilidad de n componentes

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}$$

donde q_j es la probabilidad de que C juegue escogiendo la columna $j = 1, 2, \ldots, n$.

Los jugadores R y C deben escoger sus estrategias $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$. En otras palabras, deben escoger las probabilidades p_i y q_j que determinen la frecuencia con la que escogerán los distintos renglones y columnas. Por ejemplo, si R y C escogen el primer renglón y la primera columna de A en todos sus movimientos, están jugando las estrategias puras $\mathbf{p} = (1\quad 0\ \ldots\ 0)$ y

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si R y C juegan en todos los renglones y columnas con probabilidades iguales, están jugando las estrategias mixtas $\mathbf{p} = (1/m\quad 1/m\ \ldots\ 1/m)$ y

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} \\ \vdots \\ \frac{1}{n} \end{pmatrix}$$

Cada vector de probabilidad de m componentes es una posible estrategia para R, y cada vector de probabilidad de n componentes es una posible estrategia para C.

Para ver cuándo se podría usar una estrategia pura, considérese el ejemplo siguiente.

Ejemplo 5 Considérese el juego de matriz cuya matriz de pagos es

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 7 & -1 & 2 \\ 2 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

¿Qué estrategias deben adoptar R y C?

Solución R jugará de manera que la mínima cantidad que pueda ganar sea tan grande como sea posible (vuelva a leer esto último). Si R juega en el renglón 1, ganará al menos 2 unidades, independientemente de qué columna escoja C. Si R juega en el renglón 2, ganará al menos 4 unidades. De igual forma, si R juega en el renglón 3 o en el renglón 4, ganará al menos -1 o 1 unidad, respectivamente. Así que su mayor ganancia mínima será de 4 unidades.

Pero ¿cómo debe jugar C? C quiere minimizar su pérdida máxima. Si C juega en la columna 1, puede perder hasta 7 unidades; C puede perder en la columna 2 a lo más 6 unidades y puede perder en la columna 3 hasta 4 unidades. Escribimos estos números a continuación:

$$\begin{array}{rcl}
 & \text{C} & \text{Mínimo del renglón} \\
\text{R} & \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 7 & -1 & 2 \\ 2 & 6 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \longleftarrow 2 \\ \longleftarrow 4 \\ \longleftarrow -1 \\ \longleftarrow 1 \end{array} \\
\text{Máximo de la columna} \longrightarrow & \begin{array}{ccc} 7 & 6 & 4 \end{array} &
\end{array}$$

El número 4 en la posición 2, 3 es un mínimo en su renglón y máximo en su columna. Un número con esas propiedades se llama un **punto silla** para la matriz de pagos A. En la Sección 2.2 se muestra que cuando un número a_{ij} es un punto silla, las estrategias óptimas para R y C son, para R, jugar en el renglón i y para C, jugar en la columna j. Así, en el ejemplo, R debe adoptar la estrategia pura de jugar en el segundo renglón: $\mathbf{p} = (0\ 1\ 0\ 0)$, y C debe adoptar la estrategia pura de jugar en la tercera columna

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Antes de abandonar este ejemplo, hacemos una observación que puede simplificar los cálculos. Cada número en el primer renglón de A es menor o igual que la componente correspondiente en el segundo renglón de A. Es decir, $6 \leq 6$, $2 < 5$ y $3 < 4$. Por lo tanto R *nunca* tendrá que escoger el primer renglón porque para él la elección del segundo renglón siempre será una opción al menos tan buena como la elección del primer renglón. El primer renglón constituiría lo que se llama un **renglón recesivo.** Similarmente, cada número de la primera columna de A es mayor que el número correspondiente en la tercera columna de A. Es decir, $6 > 3$, $6 > 4$, $7 > 2$ y $2 > 1$. Así que C nunca escogerá la primera columna, porque si lo hiciera, perdería ciertamente más que si escogiera la tercera columna (recuérdese que la ganancia de R es la pérdida de C). La columna 1 es una **columna recesiva.**

Se pueden eliminar los renglones y las columnas recesivos en el análisis subsecuente. Al hacerlo, se obtiene la nueva matriz de pagos A'.

$$A' = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Igual que antes, 4 es un mínimo en su renglón y un máximo en su columna y por lo tanto un punto silla de A'. El segundo renglón es recesivo, por lo que se puede reducir aún más la matriz para obtener $A'' = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$; entonces $A''' = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ ya que la primera columna de A'' es recesiva. Continuando de esta manera, se ve que el segundo renglón de A''' es recesivo, por lo que $A^{iv} = (4)$. Evidentemente, hasta aquí podemos llegar.

Bosquejamos ahora una estrategia general para jugar un juego de matriz en los casos en que se presenta un punto silla.

Determinación de las estrategias puras para un juego de matriz

Paso 1. Eliminar todos los renglones recesivos y todas las columnas recesivas.

Paso 2. Encontrar el número mínimo en cada renglón. Este se llama **mínimo del renglón**.

Paso 3. Encontrar el número máximo en cada columna. Este se llama **máximo de la columna**.

Paso 4. Buscar un **punto silla**. Este es un número que es a la vez un mínimo de renglón y un máximo de columna.* Si a_{ij} es un punto silla, R deberá jugar en el renglón i y C deberá jugar en la columna j. En este caso se dice que el juego de matriz está **determinado estrictamente**.

Paso 5. Si no hay ningún punto silla, R o C (o ambos) debe usar una estrategia mixta. El juego en ese caso no está determinado estrictamente.

Observación. En el Problema 23 se pide demostrar que si a_{ij} y a_{kl} son puntos silla de A, entonces $a_{ij} = a_{kl}$. En ese caso, se obtendrá el mismo resultado en el Paso 4 al usar cualquiera de los puntos silla.

Ejemplo 6 Determinar si el juego definido por la matriz de pagos dada es estrictamente determinado. En caso afirmativo, determinar las estrategias óptimas para R y C.

$$\text{(a)}\ \begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{(b)}\ \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 6 \end{pmatrix} \qquad \text{(c)}\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 1 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución (a) Ya que cada número en el reglón 3 es menor o igual que el número correspondiente en el renglón 2, el renglón 3 es recesivo. De manera semejante, cada número en la columna 1 es mayor que el número correspondiente en la columna 2, por lo que la columna 1 es recesiva. Eliminando el renglón 3 y la columna 1, se obtiene

$$\begin{array}{r c c} & & \text{Mínimos de renglón} \\ & \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}. & \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \\ \text{Máximos de columna} \longrightarrow & \begin{array}{cc} 1 & 5 \end{array} & \end{array}$$

Puede verse que 1 es a la vez mínimo en su renglón y máximo en su columna, por lo que 1 es un punto silla y el juego es estrictamente determinado. Como 1 es la componente 2,2 de la matriz de pagos, las estrategias óptimas son $\mathbf{p} = (0\ 1\ 0)$ y

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es decir, R escoge el renglón 2 y C escoge la columna 2.*

(b) No existen renglones ni columnas recesivos. Volviendo a escribir la matriz de pagos se tiene

$$\begin{array}{r c c} & & \text{Mínimos de renglón} \\ & \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}. & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 1 \end{array} \\ \text{Máximos de columna} \longrightarrow & \begin{array}{ccc} 5 & 6 & 6 \end{array} & \end{array}$$

En este caso no hay ningún punto silla porque no existe un número que sea a la vez un mínimo en su renglón y un máximo en su columna. El juego no está estrictamente determinado y se requiere usar una estrategia mixta.

(c) El renglón 2 es recesivo, así como la columna 1. La matriz de juego se reduce a $(0 \quad 5)$ en donde 0 es un punto silla. Obsérvese que la matriz de

---

* Se observa también que en $\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ la segunda columna es recesiva por lo que la matriz se reduce a $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Pero ahora el primer renglón es recesivo y la nueva reducción termina con la matriz 1×1 (1). Este es el punto silla.

pagos tiene dos ceros, pero sólo uno de ellos, el que está en la posición 1,2, es un punto silla. El juego está estrictamente determinado y las estrategias óptimas son $\mathbf{p}\ (1 \quad 0)$ y

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Así que R juega en el renglón 1 y C juega en la columna 2.

Ejemplo 7 En el juego de las monedas emparejadas del Ejemplo 1, la matriz de pagos es

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \mathrm{H} & \mathrm{T} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathrm{H} \\ \mathrm{T} \end{array} & \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \end{array} \qquad \begin{array}{c} \textbf{Mínimos de renglón} \\ \downarrow \\ -1 \\ -1 \end{array}$$

$$\textbf{Máximos de columna} \longrightarrow \quad 1 \quad 1$$

No hay puntos silla, por lo que se requiere una estrategia mixta. En la siguiente sección se encontrará la estrategia próxima.

Ejemplo 8 En el juego de negocios del Ejemplo 2, la matriz de pagos es

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \mathrm{I} & \mathrm{S} & \mathrm{D} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{S} \\ \mathrm{D} \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & -2 & -7 \\ 6 & 0 & -3 \\ 10 & 5 & 3 \end{pmatrix}. \end{array} \qquad \begin{array}{c} \textbf{Mínimos de renglón} \\ \downarrow \\ -7 \\ -3 \\ 3 \end{array}$$

$$\textbf{Máximos de columna} \longrightarrow \quad 10 \quad 5 \quad 3$$

En este caso 3 es un punto silla, y así Grandes Ahorros debe jugar en el renglón 3 y Alimentos El Gigante debe jugar en la columna 3. Esto quiere decir que si los datos son correctos, los dos deben disminuir los precios. Obsérvese que son recesivos los renglones 1 y 2 y las columnas 1 y 2, por lo que la matriz del juego se reduce a la matriz 1×1 de pagos (3).

Ejemplo 9 En el juego de guerra del Ejemplo 3, la matriz de pagos es

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \text{Norte} & \text{Sur} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{Norte} \\ \text{Sur} \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}. \end{array}$$

Se presenta un punto silla en la posición 1,1, de donde se deduce que los dos comandantes deben escoger la ruta del norte. De hecho eso es lo que ocurrió.

En la siguiente sección se usará un teorema de von Neumann para ver por

Problemas 2.1

En los Problemas 1-10 se da la matriz de pagos para un juego. Establézcase si el juego está determinado estrictamente y, en caso afirmativo, encuéntrense las estrategias óptimas para R y C.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 4 & 6 & -2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 5 & 6 & 4 & 7 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 & 0 \\ -4 & -6 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 & 0 \\ -4 & -6 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & -5 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 7 & 5 \\ 2 & 1 & 7 & 8 \\ 3 & 0 & -5 & 4 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 3 \\ 6 & 4 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

10 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

En los Problemas 11-20, formúlese el problema dado como un juego de matriz entre dos personas y escríbase la matriz de pagos para ese juego. Si el juego está estrictamente determinado, encuéntrese la estrategia óptima para cada jugador.

11. Dos personas, a la vez, muestran un dedo o dos. Si el número total de dedos mostrados es par, R le paga a C un número de dólares igual al número total de dedos mostrados. Si es impar, C le paga a R ese número de dólares.

12. Repítase el Problema 11, con la diferencia de que cada jugador muestra cuatro o cinco dedos.

13. Repítase el Problema 11, con la diferencia que cada jugador muestra uno, dos, o tres dedos.

14. Repítase el Problema 11, con la diferencia que cada jugador muestra uno, dos, tres, cuatro o cinco dedos.

15. En un pequeño pueblo compiten en negocios dos expendios de comestibles. El A determinó que si aumenta sus precios, perderá el 1% del mercado si B aumenta sus precios, el 3% del mercado si B no cambia sus precios, y el 11% del mercado si B baja sus precios. Si A conserva sus precios anteriores, gana el 4% si B aumenta sus precios y pierde el 5% si B disminuye sus precios. Finalmente, si A disminuye sus precios, gana el 9% si B aumenta los suyos, gana el 3% si B conserva los suyos, y pierde el 1% si B, a su vez, disminuye los suyos.

16. Se está construyendo una nueva zona comercial en Pueblo Central. Hay dos tiendas de ropa, Alamán y Juárez, que compiten en Pueblo Central y en las áreas circundantes. Si una de las tiendas se traslada a la nueva zona comercial, ganará el 80% del mercado. Si se trasladan las dos, continuarán con partes iguales del mercado.

17. Un distrito se divide en dos regiones. Una tiene 60,000 votantes y la otra tiene 40,000 votantes. Quedan dos días de campaña y cada uno de los dos candidatos puede gastar 0, 1 o 2 días en cada región. Los analistas de política estiman que si los candidatos dedican el mismo número de días a una región, cada uno obtendrá la mitad de los votos de ésa. Pero si un candidato le dedica 1 o 2 días más a una región que su oponente, obtendrá el 53% o el 57% de los votos de esa región, respectivamente.

18. Los experimentos han demostrado que dos especies de pájaros pueden reconocer los números hasta el 7. Se propone el siguiente experimento: Se determinará la dieta de un *raven* R y la de un *parakeet* C por medio de una matriz de juegos. A cada pájaro se le van a mostrar tres tarjetas, con 2, 4 y 7 puntos. Si los dos pájaros escogen la misma tarjeta, R recibirá de la dieta de C un número de gusanos igual al doble del número de puntos en la tarjeta. Si escogen tarjetas distintas, se le dará a C, de la dieta de R un número de gusanos igual a la diferencia entre los números de puntos en las tarjetas. Supóngase que los movimientos se hacen independientemente.

19. Pedro quiere llamar por teléfono a su novia Roberta. Decide llamar de noche, cuando el precio de una llamada de 3 minutos de teléfono a teléfono es de \$2 y una llamada de 3 minutos persona a persona cuesta \$4.50. Si no hay nadie en casa, sabe que la puede encontrar al día siguiente en la oficina donde trabaja y tendrá que pagar la tarifa diurna de \$3 por una llamada de 3 minutos de teléfono a teléfono. Si le llama teléfono a teléfono y Roberta está en casa, se ahorra dinero. Por otra parte, si contesta la compañera de cuarto de Roberta cuando ella no está en casa, pierde dinero.

20. Un agricultor cultiva tomates. Mientras mayor sea el tiempo que permanecen los tomates en el campo, se ponen más rojos y aumenta el precio al que se puede vender el bushel. Por otra parte, si se presentan las heladas, se echarán a perder los tomates, disminuyendo el precio promedio por bushel. Si recoge sus tomates el 25 de agosto, puede estar seguro de que no les habrán afectado las heladas y el precio con el que puede contar es de \$8 el bushel. Si se espera hasta el 5 de septiembre, obtendrá \$11 por bushel si no hay heladas o \$5 por bushel si hay heladas.

21. Una empresa llantera tiene un pleito con su sindicato. Cada grupo (administración y fuerza laboral) tiene una posible elección entre cuatro alternativas: rígida, inflexible; razonable, basada en la lógica; dejar el asunto en manos de los abogados para que encuentren una solución legal al problema; conciliatoria. Un experto

Aumento de sueldo semanal en la empresa por obrero (en dólares)

Actitud de la empresa \ Actitud del sindicato	Rígida	Lógica	Legal	Conciliatoria
Rígida	20	24	15	17
Lógica	35	30	26	28
Legal	15	23	20	30
Conciliatoria	40	35	23	28

¿Qué debe hacer la empresa y qué debe hacer el sindicato?

22. La Universidad de Montana (UM) juega futbol todos los años con la Montana State University (MSU). El *quarterback* de UM tiene en un *down* una opción entre cinco jugadas: corrida del *halfback*, corrida del *fullback*, pase corto, pase largo y jugada de atracción. La defensiva de MSU tiene cuatro opciones: defensa normal, defensa contra un pase largo, defensa contra un pase corto y *blitz*. Un *coach* estima el número de yardas que se podrían avanzar con todas las combinaciones de las opciones ofensivas y defensivas. Estos valores estimados se dan en la tabla.

Yardas esperadas de avance para la defensa

UM \ MSU	Normal	Defensa (pase corto)	Defensa (pase largo)	Blitz
Carrera de HB	2	4	8	6
Carrera de FB	5	5	7	9
Pase corto	4	0	6	−2
Pase largo	8	3	0	−4
Atracción	−1	2	4	10

¿Qué jugada debe hacer cada equipo?

23. Demostrar que si una matriz de pagos tiene dos puntos silla a_{ij} y a_{kl}, entonces $a_{ij} = a_{kl}$. [*Sugerencia*: Escríbase la matriz A y explíquese la consecuencia del hecho de que a_{ij} es el mínimo en el renglón i y el máximo en la columna j. Hágase lo mismo para a_{kl}.]

2.2 Juegos entre dos personas: Estrategias mixtas

En la Sección 2.1 se mostró la manera de determinar las estrategias óptimas cuando un juego está estrictamente determinado. Para demostrar que una estrategia es óptima, se necesita la respuesta a la pregunta "¿óptima respecto a qué?". En esta sección se presenta la manera de calcular las ganancias esperadas para los jugadores en un juego. Entonces una estrategia es óptima para R si optimiza las ganancias de R. Empezamos con un ejemplo.

Ejemplo 1 Considérese el juego cuya matriz de pagos es $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$. ¿Cuál es la ganancia esperada para R si R adopta la estrategia $\mathbf{p} = (1/3 \quad 2/3)$ y C adopta la estrategia $\mathbf{q} = (2/5 \quad 3/5)$?

Solución En este caso R tiene cuatro ganancias posibles: 3, 2, −2 y 4. Por ejemplo, recibirá 3 unidades, si escoge el primer renglón (con una probabilidad de 1/3) y C escoge la primera columna (con una probabilidad de 2/5). Como se supone que ni R ni C saben cuál es la elección de su oponente, los eventos {primer renglón} y {primera columna} son independientes. Esto quiere decir que la probabilidad de cada evento no se ve afectado por la ocurrencia o no ocurrencia del otro evento. Para decirlo en otras palabras, la probabilidad de que R escoja el primer renglón es la misma probabilidad ya sea que C escoja la primera columna o no. Cuando dos eventos son independientes, la probabilidad de que ocurran los dos es el producto de las probabilidades de que ocurra cada evento, por separado. Es decir, si A y B son independientes, entonces $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$.

En nuestro caso tenemos

$$P(\text{primer renglón} \cap \text{primera columna}) = P(\text{primer renglón}) \cdot P(\text{primera columna}) = \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{2}{5} = \tfrac{2}{15}$$

y por lo tanto

$$P(3) = P(\text{ganancia de } 3) = \tfrac{2}{15}$$

Similarmente

$$P(2) = P(\text{primer renglón} \cap \text{segunda columna}) = \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{3}{5} = \tfrac{1}{5},$$

$$P(-2) = P(\text{segundo renglón} \cap \text{primera columna}) = \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{2}{5} = \tfrac{4}{15},$$

y

$$P(4) = P(\text{segundo renglón} \cap \text{segunda columna}) = \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{3}{5} = \tfrac{2}{5}.$$

Ahora bien, si $E(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ representa el valor esperado de una variable aleatoria que toma valores iguales a las ganancias de R, se tiene

$$E(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = 3P(3) + 2P(2) + (-2)P(-2) + 4P(4)$$
$$= 3 \cdot \tfrac{2}{15} + 2 \cdot \tfrac{1}{5} - 2 \cdot \tfrac{4}{15} + 4 \cdot \tfrac{2}{5} = \tfrac{28}{15} \approx 1.87$$

Ahora observamos que

$$\mathbf{p}A\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{12}{5} \\ \frac{8}{5} \end{pmatrix} = \frac{12}{15} + \frac{16}{15} = \frac{28}{15} \approx 1.87$$

El Ejemplo 1 se puede generalizar.

Ganancia esperada Supóngase que R usa la estrategia $\mathbf{p}$ y que C usa la estrategia $\mathbf{q}$ para el juego cuya matriz de pagos es la matriz A de $m \times n$. Entonces la **ganancia esperada** para R, denotada por $E(\mathbf{p}, \mathbf{q})$, está dada por

$$\boxed{E(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \text{ganancia esperada} = \mathbf{p}A\mathbf{q}.} \tag{1}$$

Nota. Como A es una matriz $m \times n$ y $\mathbf{q}$ es un vector de n componentes (es una matriz $n \times 1$), el producto $A\mathbf{q}$ es una matriz $m \times 1$ y $\mathbf{p}A\mathbf{q}$ es, por lo tanto, una matriz $(1 \times m) \times (m \times 1) = 1 \times 1$, o sea, simplemente un número real.

Ejemplo 2 ¿Cuál es la ganancia esperada para R en el juego de matriz 3×4

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

(a) si R adopta la estrategia $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$ y C adopta la estrategia $\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$?

(b) si R y C escogen el segundo renglón y la tercera columna respectivamente?

Solución (a) $$E(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{11}{8} \\ -\frac{3}{8} \end{pmatrix} = \frac{7}{8} = 0.875$$

(b) Aquí $\mathbf{p} = (0 \;\; 1 \;\; 0)$ y $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Entonces

$$E(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = (0 \;\; 1 \;\; 0)\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (0 \;\; 1 \;\; 0)\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = -1.$$

Está claro que ésta es la componente 2, 3 de A.

Todavía queda sin resolver la pregunta básica: ¿Cómo hacen R y C para escoger sus estrategias? Esta pregunta se responde en parte por un resultado fundamental descubierto por von Neumann.

Teorema de Von Neumann

Para un juego cuya matriz de $m \times n$ es A, existen estrategias $\mathbf{p}_0$ y $\mathbf{q}_0$ y un número v tal que $E(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}) \geq v$ para cualquier estrategia $\mathbf{q}$ y $E(\mathbf{p}, \mathbf{q}_0) \leq v$ para cualquier estrategia $\mathbf{p}$. Las estrategias $\mathbf{p}_0$ y $\mathbf{q}_0$ se llaman **estrategias óptimas** para R y C, respectivamente y el número v se llama **valor del juego.**

¿Por qué son óptimas $\mathbf{p}_0$ y $\mathbf{q}_0$? Porque si R elige $\mathbf{p}_0$, él sabe que finalmente ganará v unidades. Si escoge cualquier otra estrategia, C puede escoger $\mathbf{q}_0$ y asegurar que R ganará a lo más v unidades. Así, suponiendo que C juega prudentemente, R puede hacerlo mejor optando por la estrategia $\mathbf{p}_0$. Un razonamiento similar muestra que la estrategia óptima para C es $\mathbf{q}_0$.

Utilizando el teorema de Von Neumann, es posible demostrar que

si a_{ij} es un punto silla, entonces el valor del juego es a_{ij} y las estrategias óptimas son estrategias puras de jugar el renglón i y la columna j con probabilidad de 1.

Esto justifica lo que hicimos en la última sección.

El teorema de Von Neumann es limitado en el sentido de que indica cuáles son las estrategias óptimas y cuál es el valor del juego, pero no dice cómo calcularlos. Resulta que es muy fácil calcularlas cuando la matriz es de 2×2. Otros casos presentan mayor dificultad y serán discutidos en la Sección 2.3.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Estrategias óptimas para un juego de matriz 2 × 2

Si la matriz en (2) no es estrictamente determinada, las estrategias óptimas para R y C son

$$\boxed{\mathbf{p}_0 = \left(\frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} \quad \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}\right)} \tag{3}$$

y

$$\boxed{\mathbf{q}_0 = \begin{pmatrix} \dfrac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} \\[2ex] \dfrac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} \end{pmatrix}.} \tag{4}$$

El valor del juego es

$$\boxed{v = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}.} \tag{5}$$

En el Problema 44 se pide demostrar por qué son válidas las ecuaciones (3), (4) y (5).

Ejemplo 3 Determinar las estrategias óptimas y el valor en el juego de emparejar monedas del Ejemplo 2.1.1.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} H & T \end{array} \\ \begin{array}{c} H \\ T \end{array} & \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Entonces $a_{11} = -1, a_{12} = 1, a_{21} = 1, a_{22} = -1$ y, de (3), (4), y (5),

$$\mathbf{p}_0 = \left(\frac{-1-1}{-1-1-1-1} \quad \frac{-1-1}{-1-1-1-1}\right) = \left(\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}\right),$$

$$\mathbf{q}_0 = \begin{pmatrix} \dfrac{-1-1}{-1-1-1-1} \\[2ex] \dfrac{-1-1}{-1-1-1-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} \\[2ex] \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$$

y

$$v = \frac{(-1)(-1) - (1)(1)}{-1-1-1-1} = 0.$$

Así, en este juego muy simple, R y C optan mejor por cara o cruz con igual probabilidad. El valor de este juego es cero.

Juego justo Un juego es justo si su valor es cero.

El juego de emparejar monedas es un ejemplo de juego justo.

Ejemplo 4 En el juego de guerra del Ejemplo 2.1.3, modifiquemos las hipótesis para obtener la siguiente tabla.

Tabla 1 *Opciones para los japoneses y los aliados (Número de días de bombardeo)*

Opciones para los aliados \ Opciones para los japoneses	Ruta norte	Ruta sur
Ruta norte	2	1
Ruta sur	1	3

La matriz del juego es $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ y no hay punto silla, por lo que el juego no es estrictamente determinado. Tenemos que $a_{11} = 2$, $a_{12} = 1 = a_{21}$ y $a_{22} = 3$. Así que

$$\mathbf{p}_0 = \left(\frac{3-1}{2+3-1-1} \quad \frac{2-1}{2+3-1-1} \right) = \left(\frac{2}{3} \quad \frac{1}{3} \right),$$

$$\mathbf{q}_0 = \begin{pmatrix} \dfrac{3-1}{2+3-1-1} \\ \dfrac{2-1}{2+3-1-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{3} \\ \dfrac{1}{3} \end{pmatrix}$$

y

$$v = \left(\frac{2 \cdot 3 - 1 \cdot 1}{2+3-1-1} \right) = \frac{5}{3}.$$

Esto significa que si este juego se repitiera muchas veces, cada comandante debería escoger la ruta norte 2/3 de las veces y la ruta sur 1/3 de las veces. Habría, en promedio, 5/3 días de bombardeo. Claro que este procedimiento no se puede hacer más de una vez. Por lo tanto, la interpretación correcta del vector $\mathbf{p}_0 = (2/3 \quad 1/3)$ es que el general Kenney debe escoger el norte con una probabilidad de 2/3. Esto lo podría hacer, por ejemplo, colocando dos N y una S en una caja y escogiendo una letra al azar. Su número esperado de días de bombardeo sería de 5/3, aunque, claro está, sólo podría tener 1, 2 o 3 días de bombardeo.

Ejemplo 5 **Asignación de Riesgo a Procedimientos Médicos.** Como es bien sabido, muchos procedimientos médicos involucran un riesgo no despreciable para el paciente y sólo se deben llevar a cabo cuando el mismo se expone a un riesgo mayor si no se aplica el tratamiento. ¿Cómo puede determinarse qué riesgo es mayor en una situación dada? Este problema es complicado aún más cuando no hay una completa certeza de que el paciente tiene la enfermedad que se sospecha. Por ejemplo, a veces se emplea la cirugía para extraer tumores aun cuando la probabilidad es pequeña de que el tumor será maligno. ¿Qué tan grande debe ser esta probabilidad para que deba recomendarse la cirugía?

Para analizar esta cuestión, supóngase que la probabilidad de que un paciente tenga cierta enfermedad es q_1. (Esta probabilidad se ha determinado por medio de varias pruebas.) El tratamiento para esta enfermedad es una operación de importancia. Si el paciente tiene la enfermedad pero no se le opera, puede esperar vivir 5 años, pero si se opera al paciente, puede esperar vivir 20 años. Si el enfermo no tiene la enfermedad, puede esperar vivir 25 años si se opera, o 30 años si no se opera. La decisión de operarlo o no, claramente depende de q_1, la probabilidad de que el paciente tenga la enfermedad. Si $q_1 = 0$, el paciente no tiene la enfermedad y no debe ser operado. ¿Cuál es el menor valor de q_1 para el cual es recomendable que se le opere?

Solución Este problema puede ser analizado como un juego de matriz. Defínase

$$A = \begin{pmatrix} 20 & 25 \\ 5 & 30 \end{pmatrix}$$

como la matriz del juego. El paciente "juega" los renglones. El renglón I corresponde a operarse y el renglón II corresponde a no ser operado. El oponente, la naturaleza, juega las columnas. La columna I corresponde a la enfermedad y la columna II corresponde a no tener la enfermedad. La estrategia de la naturaleza es

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ 1 - q_1 \end{pmatrix},$$

en donde q_1 es la probabilidad de que el paciente tenga la enfermedad. El paciente debe jugar una estrategia pura, pero, por ahora, supongamos que la estrategia del paciente es $\mathbf{p} = (p_1 \quad p_2)$. El pago esperado (en años de vida) es

$$\begin{aligned} E(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= (p_1 \quad 1 - p_1)\begin{pmatrix} 20 & 25 \\ 5 & 30 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_1 \\ 1 - q_1 \end{pmatrix} \\ &= (p_1 \quad 1 - p_1)\begin{pmatrix} 20q_1 + 25(1 - q_1) \\ 5q_1 + 30(1 - q_1) \end{pmatrix} \\ &= 20p_1q_1 - 5p_1 - 25q_1 + 30. \end{aligned}$$

Si se opera al paciente, entonces $\mathbf{p} = (1 \quad 0)$ y $E(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = 25 - 5q_1$. Si no se le opera, entonces $\mathbf{p} = (0 \quad 1)$ y $E(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = 30 - 25q_1$. El paciente debe operarse si $25 - 5q_1 > 30 - 25q_1$ —o sea, si $20q_1 > 5$, o si $q_1 > 0.25$. Esto quiere decir que el paciente debe operarse si la probabilidad de que tenga la enfermedad es de más del 25%. Si de la información disponible se infiere que la probabilidad de que tenga la enfermedad es, por ejemplo, del 15%, la operación no se debe hacer. Se requeriría más información para poder recomendar que se haga la operación.

Ejemplo 6 Considérese el juego cuya matriz de pagos es

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 4 \\ 5 & 8 & 3 \end{pmatrix}.$$

Este no es un juego 2×2 y no tiene puntos silla, por lo que no está estrictamente determinado. Sin embargo, el renglón 2 es recesivo. Los resultados para R son siempre mejores si escoge el renglón 1 en vez de escoger el renglón 2. De manera semejante, la columna 2 es recesiva y C no la debe escoger nunca. Eliminando el renglón y la columna recesivos se obtiene

$$A' = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Las estrategias óptimas y el valor del juego son, de (3), (4) y (5),

$$\mathbf{p}_0' = \left(\tfrac{2}{5} \quad \tfrac{3}{5}\right), \qquad \mathbf{q}_0' = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad v = \tfrac{23}{5}.$$

Así que

$$\mathbf{p}_0 = \left(\tfrac{2}{5} \quad 0 \quad \tfrac{3}{5}\right) \qquad \text{y} \qquad \mathbf{q}_0 = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ 0 \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

son las estrategias óptimas para A. El valor del juego sigue siendo de 23/5.

Terminamos esta sección con un ejemplo maravilloso del uso de la teoría de juegos aplicada a la filosofía.*

Ejemplo 7 **Voluntad libre.** ¿Tiene cada persona un papel en la dirección de su propia vida? ¿O estamos destinados a seguir un plan preordenado, moviéndonos en una banda transportadora o destino? Una de las columnas de Martin Gardner

* Por William Foster Allman; extractado con permiso de la revista *Science '82*, julio-agosto, 1981, págs. 36-37. American Association for the Advancement of Science.

que generó una respuesta considerable de los lectores discutía la libre voluntad y el determinismo, ilustrando lo que se conoce como la **paradoja de Newcomb**.

La paradoja se refiere a la facultad de un ''Ser Superior'' de predecir con exactitud el comportamiento. Tal Ser puede ser un vidente, un viajero en el tiempo, Dios o cualquier otra entidad precognoscente.

El lector tiene frente a sí dos cajas. La Caja A contiene $1000. La Caja B puede contener $1 millón o nada. El lector tiene la opción de tomar el contenido de las dos cajas, o solamente el contenido de la Caja B. Antes de que el lector tome su decisión, el Ser Superior hace una predicción sobre la elección del lector. Si el Ser considera que el lector se quedará sólo con la Caja B, pondrá $1 dentro de la caja. Si predice que el lector tomará las dos cajas, dejará vacía la Caja B. El Ser no es necesariamente infalible, pero sus predicciones suelen ser extremadamente exactas.

¿Qué opción toma el lector? Si elige las dos cajas, el Ser lo habrá predicho así y habrá dejado vacía la Caja B. Si el lector decide tomar sólo la Caja B, ganará $1 millón. La experiencia del lector es que el Ser nunca se ha equivocado en su predicción. En ese caso, la elección correcta parece ser la elección de tomar únicamente la Caja B.

	El ser B	**El ser A y B**
Tomar B	$1,000,000	$0
Tomar A y B	$1,001,000	$1,000

Pero considérese otro argumento. El Ser hizo su predicción hace una semana, o tal vez el día en que nació el lector. El ya puso $1 millón en la Caja B o no lo hizo, y el dinero no va a desaparecer. Entonces tiene más sentido tomar las dos cajas, porque si la Caja B no está vacía, el lector ganará $1,001,000. Si la caja está vacía, el lector se quedará al menos con los $1000. En cambio, con la elección de la Caja B únicamente, existe una posibilidad, aunque remota, de que el lector no gane nada.

Gardner sugiere una manera de considerar la paradoja, usando lo que en teoría de juegos se llama una matriz de pagos. Si el lector considera el resultado de ambas opciones a la luz de las predicciones del Ser, aparece que la elección de ambas cajas es la óptima, porque esa elección es la que ofrece el pago máximo más alto ($1,001,000) y también el pago mínimo más alto ($1000). Nótese que $1000 es un punto silla.

Pero desde otro punto de vista de la teoría de juegos, al multiplicar los resultados posibles correspondientes a cada opción por la probabilidad de que efectivamente ocurran, se llega a la conclusión contraria. Aun si se supone que las predicciones del Ser sólo son correctas el 90% de las veces, la ganancia esperada al elegir tomar las dos cajas es el 90% de $1000 más el 10% de $1,001,000, lo que da un total de \$101,000. En otras palabras, si el lector participara en el juego diez veces, sus ganancias promedio serían de \$101,000. Al escoger sólo la Caja B se obtendría el 90% de \$1,000,000 más el 10% de cero, dando un total de \$900,000. Es mejor escoger sólo la Caja B aun si el Ser sólo hiciera predicciones correctas algo más de la mitad de las veces.

La paradoja se basa en los conceptos en conflicto de voluntad libre y determinismo. Para los que creen que sus decisiones están determinadas completamente por un futuro presente, dependiendo en su totalidad de lo que el pragmatista del siglo XIX William James llamó la fuerza del pasado, la única opción correcta, si así se puede llamar, consistiría en elegir solamente la Caja B, porque un Ser omnisciente o un viajero del espacio conocería estas fuerzas.

Para los que creen que las opciones son independientes —que existe, no importa qué tan infinitamente pequeña, una libertad de acción, más allá de lo que el pasado exige del futuro— la elección adecuada consistiría en elegir las dos cajas. Suponga el lector que, antes de tomar su decisión, ha hecho 1000 pruebas, y que cada persona que sólo eligió la Caja B recibió \$1 millón, y que todos los que eligieron ambas cajas se encontraron la caja B vacía. Aun en ese supuesto, un amigo del lector que podía ver el contenido de ambas cajas antes de que el lector tomara su decisión, sean cuales fueren los contenidos de las cajas, le aconsejaría al lector que eligiera las dos cajas, porque ya fuera que la Caja B contuviera o no \$1 millón, el lector obtendría al menos \$1000.

Isaac Asimov, respondiendo a Gardner, escribió: "Yo, sin dudarlo, escogería ambas cajas. Yo soy un determinista, pero tengo perfectamente claro que cualquier ser humano digno de considerarse ser humano (ciertamente, incluyéndome a mí mismo) preferiría la voluntad libre, si algo así pudiera existir... Así al menos expresaría su deseo de sacar ventaja de la no omnisciencia [de Dios] y en su propia voluntad libre... Sin embargo, si sólo escogiera la segunda caja, se quedaría con su desafortunado millón y no sólo sería esclavo por ese millón, sino que habría demostrado su deseo de ser un esclavo por ese millón, y no sería alguien que yo podría reconocer como humano."

Aparentemente, Martin Gardner se divierte más enunciando paradojas como ésta que resolviéndolas. "Soy un indeterminista, lo que quiere decir que no soy determinista", dice. "No creo que la paradoja se haya explicado correctamente, pero no voy a perder el sueño tratando de hacerlo."

Problemas 2.2

*En los Problemas 1-10, se da la matriz de pagos de un juego. Encuéntrese la ganancia esperada para R con el par de estrategias dadas **p** y **q**.*

1. $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$; $\mathbf{p} = (\frac{1}{3} \;\; \frac{2}{3})$, $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$; $\mathbf{p} = (1 \;\; 0)$, $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$; $\mathbf{p} = (\frac{1}{5} \;\; \frac{4}{5})$, $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$; $\mathbf{p} = (0 \quad 1)$, $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$; $\mathbf{p} = (\frac{2}{3} \quad \frac{1}{3})$, $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

6. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 5 & 7 & 3 \\ 6 & 2 & -2 \end{pmatrix}$; $\mathbf{p} = (\frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{3})$, $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

7. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 5 & 7 & 3 \\ 6 & 2 & -2 \end{pmatrix}$; $\mathbf{p} = (\frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{6})$, $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

8. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 5 & 7 & 3 \\ 6 & 2 & -2 \end{pmatrix}$; $\mathbf{p} = (0 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2})$, $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}$

9. $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 & 3 \\ -2 & 6 & 1 & 5 \\ -4 & 0 & 6 & 7 \end{pmatrix}$; $\mathbf{p} = (\frac{1}{4} \quad 0 \quad \frac{3}{4})$, $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{3}{10} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}$

10. $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 & 3 \\ -2 & 6 & 1 & 5 \\ -4 & 0 & 6 & 7 \end{pmatrix}$; $\mathbf{p} = (\frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{3})$, $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$

En los Problemas 11-23, determínense las estrategias óptimas y el valor del juego de matriz dado. ¿Cuáles juegos son justos?

11. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ **12.** $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ **13.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

14. $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ **15.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ **16.** $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

17. $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ **18.** $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ **19.** $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$

20. $\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$ **21.** $\begin{pmatrix} 7 & 4 & 2 \\ 5 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ **22.** $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

23. $\begin{pmatrix} 5 & 8 & 4 \\ 3 & 7 & 1 \\ 4 & 6 & 9 \\ 5 & 7 & 2 \end{pmatrix}$

24. Supóngase que la matriz del juego en el Ejemplo 5 es

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 39 \\ 5 & 40 \end{pmatrix}$$

¿Cuál es el mínimo valor de la probabilidad de que el paciente tenga la enfermedad para el que se debería recomendar la operación?

25. Se puede estudiar con más detalle el modelo de toma de decisiones médicas del Ejemplo 5. Defínase la matriz de juego

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

en donde a_{11}, a_{12}, a_{21} y a_{22} son la vida esperada del paciente si se opera y tiene la enfermedad, si se opera y no tiene la enfermedad, si no se opera y tiene la enfermedad y si no se opera y no tiene la enfermedad, respectivamente. Suponiendo que el paciente quiere maximizar su vida esperada, demostrar que la operación se puede recomendar si la probabilidad de que el paciente tenga la enfermedad es de más de

$$\frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}$$

[*Sugerencia*: Compárese la vida esperada para el paciente con la operación con la vida esperada para el paciente sin la operación.]

26. Demostrar que el juego del Problema 2.1.11 no es justo. ¿Cuál es su valor? ¿Qué estrategia debe adoptar R?

27. Responda las preguntas del Problema 26 para el juego del Problema 2.1.12.

28. En el Problema 2.1.15, ¿qué debe hacer el dueño de la tienda A si sabe que el dueño del establecimiento B lanzará una moneda para decidir si aumenta o disminuye sus precios?

29. Encontrar la estrategia óptima para el agricultor del Problema 2.1.20 si la probabilidad de las heladas desde el 25 de agosto hasta el 5 de septiembre es de 0.5.

30. Responda la pregunta del Problema 29 si la probabilidad de las heladas es de 0.2.

31. Responda la pregunta del Problema 29 si la probabilidad de las heladas es de 0.9.

32. En cierta región agrícola, el clima promedio en la estación de crecimiento es fría o caliente. Se siembran dos cultivos en un campo de 1500 acres. Si la temporada de crecimiento es fría, las ganancias esperadas son de $20 por acre de la cosecha I y de $10 por acre de la cosecha II. Si la temporada de crecimiento es caliente, las ganancias esperadas son de $10 por acre de la cosecha I y de $30 por acre de la cosecha II. Describir la competencia entre el agricultor y el clima como un juego de matriz. Si no se tiene información sobre las probabilidades de que se dé clima caliente o frío, ¿cuál es la estrategia óptima para el agricultor?

33. Supóngase que el clima en el Problema 32 es igualmente probable caliente o frío. ¿Cuántos acres de cada cultivo debe sembrar el agricultor?

34. En un experimento, un mono debe escoger una de tres pantallas para ganarse un plátano. En cada realización del experimento se colocan dos plátanos detrás de la pantalla I o bien un plátano detrás de cada una de las pantallas II y III (estos son los dos "movimientos" del experimento). Descríbase este experimento como un juego de matriz 3 × 2. ¿Cuáles son las estrategias óptimas para el mono y para el que realiza el experimento?

35. Si todas las componentes de una matriz de juego son positivas, demuéstrese que el valor del juego es positivo.

★ **36.** Dados dos juegos de matriz $m \times n$, $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ tales que $b_{ij} = a_{ij} + k$ para toda i y para toda j, demuéstrese que el valor del juego B es igual al valor del juego A más la constante k. Demuéstrese que las estrategias óptimas para R y C son las mismas en B que en A. (Se dice que los juegos A y B son **juegos de matriz equivalentes.**)

37. ¿Cuáles son las estrategias óptimas y cuáles los valores de los juegos de matriz equivalentes

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}?$$

38. ¿Cuáles son las estrategias óptimas y cuáles los valores de los juegos de matriz equivalentes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 4 \end{pmatrix}?$$

39. Al aumentar el valor de la variable t de 0 a 1, ¿cómo cambian las estrategias óptimas en los juegos siguientes?

(a) $\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 1-t \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 2t \\ 0 & t \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} t & t^2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

40. Determinar los valores de los juegos de matriz 2×2 del Problema 39 como funciones de t para $0 \leq t \leq 1$. ¿Para qué valores de t son justos estos juegos?

41. (a) Demuéstrese que el juego de matriz 2×2

$$\begin{pmatrix} t & 1-t \\ 1-t & t \end{pmatrix}$$

no está estrictamente determinado para ningún valor de t.

(b) Demuéstrese que el valor de este juego es una constante independiente de t. Encuéntrese el valor de esa constante.

42. (a) Supóngase que todas las componentes de $\mathbf{p}_0A$ son mayores o iguales que v. Demuéstrese que $E(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}) = \mathbf{p}_0A\mathbf{q} \geq v$. [*Sugerencia*: Úsese el hecho de que las componentes de $\mathbf{q}$ tienen una suma de 1.]

(b) Si $E(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}) \geq v$ para cada una de las estrategias $\mathbf{q}$, demuéstrese que cada una de las componentes de $\mathbf{p}_0A$ es mayor o igual que v. [*Sugerencia*: Muéstrese que la componente k de $\mathbf{p}_0A$ es igual a $E(\mathbf{p}_0, \mathbf{q})$ donde $\mathbf{q}$ es el vector columna con un 1 en la posición k y ceros en las demás posiciones.]

★ **43.** Por un procedimiento semejante al del Problema 42, demuéstrese que cada componente de $A\mathbf{q}_0$ es menor o igual que v si y sólo si $E(\mathbf{p}, \mathbf{q}_0) \leq v$ para cada una de las estrategias de $\mathbf{p}$.

★ **44.** Supóngase que $\mathbf{p}_0$, $\mathbf{q}_0$ y v están dados por (3), (4) y (5), respectivamente.

(a) Demuéstrese que $\mathbf{p}_0A \geq v$ y que $A\mathbf{q}_0 \leq v$.

(b) Úsense los resultados de los Problemas 42 y 43 para concluir que (3) y (4) determinan estrategias óptimas, y que v, dado en (5), es el valor del juego de matriz 2×2.

2.3 Juegos de matriz y programación lineal

El problema de esta sección consiste en determinar las estrategias óptimas para los dos participantes, R y C, en un juego general de matriz $m \times n$ con matriz de pagos $A = (a_{ij})$. Podemos suponer que la matriz de juego A no tiene renglones ni columnas recesivos, ya que éstos no se escogerían nunca al usar estrategias óptimas. Para evitar una pequeña complicación, supondremos además que todas las componentes de A son positivas. Si esto no se cumple, se define una nueva matriz de juego $B = (b_{ij}) = (a_{ij} + k)$, sumando una constante positiva k a cada una de las componentes de A. La constante k se escoge de manera que todas las componentes de B sean positivas. El valor del juego de matriz $m \times n$ determinado por B es positivo.

El teorema de von Neumann implica que la estrategia óptima $\mathbf{q}_0$ de C satisface la condición de que todas las componentes de $A\mathbf{q}_0$ son menores o iguales que v, el valor del juego. De manera equivalente, todas las componentes de $(1/v)A\mathbf{q}_0$ son menores o iguales a 1. Para $i = 1, 2, \ldots, n$, defínase x_i como la componente i de $(1/v)\mathbf{q}_0$. Nótese que $x_i \geq 0$, ya que $v > 0$ y $\mathbf{q}_0$ es un vector de probabilidad. El competidor C trata de minimizar v, la ganancia esperada de R y pérdida esperada de C. Esto se hace maximizando $f = 1/v$ sujeto a las restricciones. Por lo tanto, el problema que C debe resolver es el siguiente:

Maximizar

$$f = x_1 + x_2 + \ldots + x_n \tag{1}$$

sujeta a

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq 1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq 1$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq 1$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0.$$

Reconocemos este problema como un problema de máximos en programación lineal. Por un argumento semejante, el lector puede verificar que R debe resolver el problema de mínimos dual para determinar su estrategia óptima. La tabla simplex inicial para este problema es

x_1	x_2	$\cdots$	x_n	s_1	s_2	$\cdots$	s_m		
a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}	1	0	$\cdots$	0	1	s_1
a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}	0	1	$\cdots$	0	1	s_2
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$			$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}	0	0	$\cdots$	1	1	s_m
1	1	$\cdots$	1	0	0	$\cdots$	0	f	

Los indicadores positivos en el último renglón se eliminan sucesivamente por el método simplex. Usando este método, se reduce la tabla simplex inicial a una tabla terminal. El valor v del juego es el recíproco del valor máximo de f. Las soluciones $x^* = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y $y^* = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ del problema de máximos y del problema dual de mínimos se pueden leer de la última columna y del último renglón de la tabla terminal. Las estrategias óptimas para C y para R, entonces, son $\mathbf{q}_0 = vx^* = (vx_1, vx_2, \ldots, vx_n)$ y $\mathbf{p}_0 = vy^* = (vy_1, vy_2, \ldots, vy_m)$.

Ejemplo 1 Determinar las estrategias óptimas del juego de matriz 2×2 con matriz de pagos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Solución Las componentes de A son todas positivas, y los métodos de esta sección se pueden aplicar. El problema de máximos asociados consiste en maximizar $f = x_1 + x_2$ sujeta a $x_1 + 2x_2 \leq 1$, $2x_1 + 3x_2 \leq 1$, $x_1 \geq 0$ y $x_2 \geq 0$. La tabla simplex inicial de este problema es

I.

x_1	x_2	s_1	s_2		
1	2	1	0	1	s_1
2	3	0	1	1	s_2
1	1	0	0	f	

Haciendo pivoteo en la componente encerrada en un círculo, se obtiene la siguiente tabla:

II.

x_1	x_2	s_1	s_2		
0	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	s_1
1	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	x_1
0	$-\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	$f - \frac{1}{2}$	

Esta es una tabla terminal, porque no tiene indicadores positivos. De ahí que el máximo valor de f sujeto a las restricciones es $1/2$ y, por lo tanto, el valor del juego es $1/1/2 = 2$. El máximo valor de f ocurre en $x^* = (1/2, 0)$ y el valor mínimo del problema dual ocurre en $y^* = (0, 1/2)$. Las estrategias óptimas para R y C son $\mathbf{p}_0 = vy^* = (0, 1)$ y $\mathbf{q}_0 = vx^* = 2(1/2, 0) = (1, 0)$.

El Ejemplo 1 se pudo haber resuelto por los métodos de la sección anterior para juegos generales de matriz 2×2, u observando que la componente en la primera columna y el segundo renglón es un punto silla. Los métodos de esta sección pueden aplicarse a todos los juegos de matriz $m \times n$. Para terminar esta sección, consideramos dos ejemplos de matrices de juego con componentes negativas.

Ejemplo 2 Determínense las estrategias óptimas para R y C en el juego de matriz 2×2 cuya matriz de pagos es

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución Sumando 3 a cada una de las componentes de A, defínase una nueva matriz de juego

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

que tiene todas las componentes positivas. Las estrategias óptimas en el juego B son las mismas que las estrategias óptimas en el juego dado. Para determinar estas estrategias óptimas, escribimos la tabla simplex inicial.

I.

x_1	x_2	s_1	s_2		
5	4	1	0	1	s_1
1	5	0	1	1	s_2
1	1	0	0	f	

Haciendo pivoteo en la componente encerrada en un círculo, se obtienen las siguientes tablas:

II.

x_1	x_2	s_1	s_2		
1	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	x_1
0	$\frac{21}{5}$	$-\frac{1}{5}$	1	$\frac{4}{5}$	s_2
0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	$f-\frac{1}{5}$	

III.

x_1	x_2	s_1	s_2		
1	0	$\frac{5}{21}$	$-\frac{4}{21}$	$\frac{1}{21}$	x_1
0	1	$-\frac{1}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{4}{21}$	x_2
0	0	$-\frac{4}{21}$	$-\frac{1}{21}$	$f-\frac{5}{21}$	

La última tabla es terminal, porque todos los indicadores son no positivos. El valor máximo de f es 1/21, que ocurre en $x^* = (1/21, 4/21)$. Por lo tanto, el valor del juego B es de 21/5. El valor del juego original A es $21/5 - 3 = 6/5$. Las estrategias óptimas para R y C son

$$\mathbf{p}_0 = 21/5(4/21, 1/21) = (4/5, 1/5) \text{ y } \mathbf{q}_0 = 21/5(1/21, 4/21) = (1/5, 4/5).$$

Ejemplo 3 Determinar las estrategias óptimas para R y C en el juego de matriz 3×3 cuya matriz de pagos es

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -5 \\ -2 & 8 & -3 \\ -5 & -3 & 14 \end{pmatrix}$$

Solución Como no es evidente que el valor de este juego es positivo, definimos una matriz de juego equivalente

$$B = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 1 \\ 4 & 14 & 3 \\ 1 & 3 & 20 \end{pmatrix}$$

con todas sus componentes positivas, añadiendo 6 a cada componente de A. Las estrategias óptimas para R y C son las mismas en los dos juegos equivalentes A y B. La tabla simplex inicial asociada con el juego de matriz B es

I.

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3		
10	4	1	1	0	0	1	s_1
4	14	3	0	1	0	1	s_2
1	3	20	0	0	1	1	s_3
1	1	1	0	0	0	f	

Haciendo pivoteo en la componente marcada en cada caso, se obtienen las tablas siguientes:

II.

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3		
1	$\frac{4}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	0	0	$\frac{1}{10}$	x_1
0	$\frac{124}{10}$	$\frac{26}{10}$	$-\frac{4}{10}$	1	0	$\frac{6}{10}$	s_2
0	$\frac{26}{10}$	$\frac{199}{10}$	$-\frac{1}{10}$	0	1	$\frac{9}{10}$	s_3
0	$\frac{6}{10}$	$\frac{9}{10}$	$-\frac{1}{10}$	0	0	$f - \frac{1}{10}$	

III.

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3		
1	0	$\frac{1}{62}$	$\frac{7}{62}$	$-\frac{1}{31}$	0	$\frac{5}{62}$	x_1
0	1	$\frac{13}{62}$	$-\frac{1}{31}$	$\frac{5}{62}$	0	$\frac{3}{62}$	x_2
0	0	$\frac{600}{31}$	$-\frac{1}{62}$	$-\frac{13}{62}$	1	$\frac{24}{31}$	s_3
0	0	$\frac{24}{31}$	$-\frac{5}{62}$	$-\frac{3}{62}$	0	$f-\frac{4}{31}$	

IV.

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3		
1	0	0	*	*	*	$\frac{2}{25}$	x_1
0	1	0	*	*	*	$\frac{1}{25}$	x_2
0	0	1	$\frac{1}{1200}$	$\frac{1}{1200}$	$-\frac{31}{600}$	$\frac{1}{25}$	x_3
0	0	0	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	$-\frac{1}{25}$	$f-\frac{4}{25}$	

Se invita al lector a completar la tabla terminal (IV). Estos números no se necesitan en el último paso. El máximo de la función objetivo f es de 4/25, y por lo tanto, el valor del juego B es de 25/4. El valor del juego original A es de $25/4 - 6 = 1/4$. La estrategia óptima para C es

$$\mathbf{q}_0 = vx^* = 25/4\ (2/25,\ 1/25,\ 1/25) = (1/2,\ 1/4,\ 1/4).$$

La estrategia óptima para R es

$$\mathbf{p}_0 = vy^* = 25/4(2/25,\ 1/25,\ 1/25) = (1/2,\ 1/4,\ 1/4)$$

Problemas 2.3

1. Usando los métodos de programación lineal, determínense las estrategias óptimas y los valores de los siguientes juegos de matriz 2 × 2:

   (a) $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

2. Usando los métodos de programación lineal, determínense las estrategias óptimas y el valor de los siguientes juegos de matriz de 3 × 3:

   (a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Usando el método de programación lineal de esta sección determínense las estrategias óptimas cuando el valor del juego de matriz es positivo. ¿Por qué no funciona el método cuando el valor del juego es cero o negativo?

4. Los valores de los juegos de matriz de los Ejemplos 2 y 3 son de 6/5 y 1/4, respectivamente. Como los valores son positivos, no fue necesario definir juegos de matriz equivalentes con todas las componentes positivas. Aplíquese el método de programación lineal a las matrices de juego originales para determinar las estrategias óptimas para los dos ejemplos.

5. Determínense las estrategias óptimas y el valor del juego de matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 7 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 17 & -1 \\ 5 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Determínense las estrategias óptimas del juego de matriz

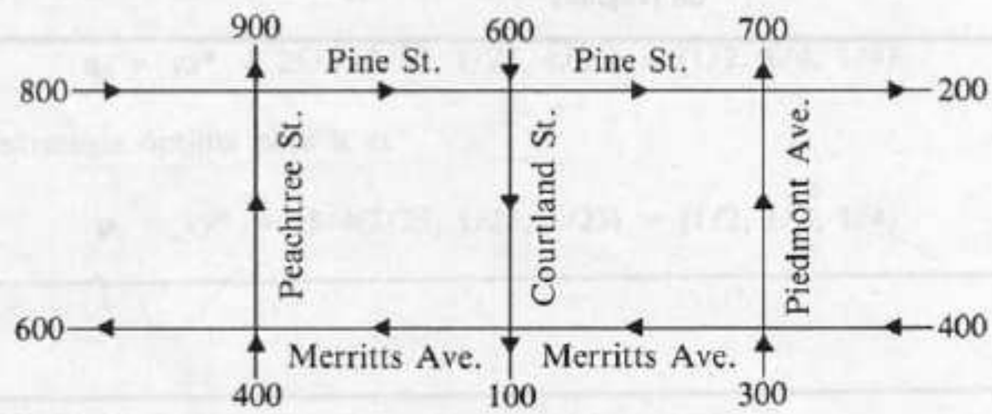
$$\begin{pmatrix} 10 & 9 \\ 0 & 100 \end{pmatrix}$$

Las estrategias óptimas garantizan una ganancia mínima para R si el juego se realiza muchas veces. Si el juego se realiza una sola vez, ¿cómo determina R su movimiento? ¿Cuándo escogerá R el primer renglón para asegurarse una ganancia de al menos nueve unidades? ¿En qué condiciones se arriesgará R escogiendo el segundo renglón?

CAPÍTULO **3**

Un modelo para estudio del tránsito

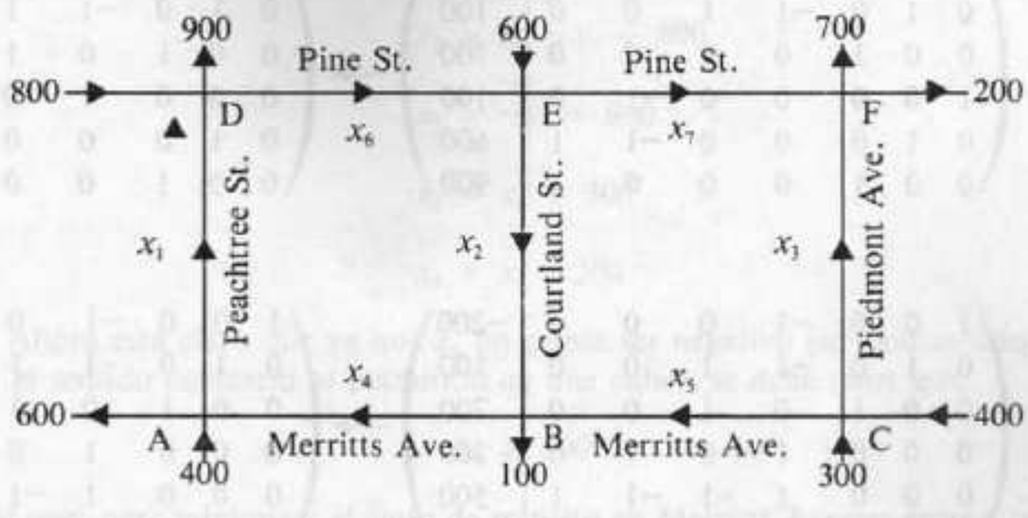
En este capítulo se mostrará cómo un sistema de ecuaciones lineales puede ayudar a resolver un problema práctico de tránsito. Para concretar más, empezamos con un mapa que muestra una pequeña zona de Atlanta, Georgia.



En el mapa se indicó el flujo de tránsito que entra o sale a cada calle, en unidades de vehículos por hora (vph). Ya que el flujo de tránsito varía considerablemente durante el día, supondremos que los números mostrados representan el flujo de tránsito promedio a la hora de máximo flujo, que se da, aproximadamente, entre las 4 P.M. y las 5:30 P.M.

Supóngase ahora que un grupo político está planeando una manifestación en Merritts Avenue, entre Courtland Street y Peachtree Street a las 5 P.M. del miércoles. La policía de Atlanta puede, hasta cierto punto, controlar el flujo de tránsito reajustando los semáforos, colocando policías en los cruces clave, o cerrando la calle crítica al tránsito de vehículos. Si se disminuye el tránsito por Merritts Avenue, aumentará el de las calles adyacentes. La cuestión es minimizar el tránsito por Merritts Avenue (entre Courtland y Peachtree) sin ocasionar congestionamientos en las otras calles.

Para resolver nuestro problema de minimización, le agregamos marcas a nuestro mapa.



Aquí se han marcado las seis intersecciones "A" hasta "F" y se ha denotado el flujo de tránsito entre las intersecciones adyacentes por las variables x_1 hasta x_7. El problema consiste ahora en minimizar x_4, sujeta a las restricciones del problema.

Para encontrar estas restricciones, veamos, por ejemplo, la intersección B. El tránsito que fluye a la intersección B es, según el mapa, $x_2 + x_5$. El tránsito que sale de la intersección B es $x_4 + 100$. Suponiendo que el tránsito no se acumula en la intersección B, el tránsito de "entrada" debe ser igual al tránsito de "salida". Así se obtiene la ecuación

$$x_2 + x_5 = x_4 + 100$$

o bien

$$x_2 - x_4 + x_5 = 100$$

A partir de este análisis en cada intersección, se obtiene el siguiente sistema de seis ecuaciones en siete incógnitas:

$$\begin{array}{lrcl}
\text{en } A & x_1 - x_4 & = & -200 \\
\text{en } B & x_2 - x_4 + x_5 & = & 100 \\
\text{en } C & x_3 + x_5 & = & 700 \\
\text{en } D & x_1 - x_6 & = & 100 \\
\text{en } E & x_2 - x_6 + x_7 & = & 600 \\
\text{en } F & x_3 + x_7 & = & 900
\end{array}$$

Escribiendo este sistema en forma de matriz aumentada y resolviéndolo por reducción de renglones se obtiene, sucesivamente:

$$
\left(\begin{array}{ccccccc|c}
1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -200 \\
0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 100 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 700 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 100 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 600 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 900
\end{array}\right)
\rightarrow
\left(\begin{array}{ccccccc|c}
1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -200 \\
0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 100 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 700 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 300 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 600 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 900
\end{array}\right)
\rightarrow
$$

$$
\left(\begin{array}{ccccccc|c}
1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -200 \\
0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 100 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 700 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 300 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 500 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 900
\end{array}\right)
\rightarrow
\left(\begin{array}{ccccccc|c}
1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -200 \\
0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 100 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 700 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 300 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 500 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 200
\end{array}\right)
\rightarrow
$$

$$
\left(\begin{array}{ccccccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 100 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 400 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 700 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 300 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 200 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 200
\end{array}\right)
\rightarrow
\left(\begin{array}{ccccccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 100 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 400 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 700 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 300 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -200 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 200
\end{array}\right)
\rightarrow
$$

$$
\left(\begin{array}{ccccccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 100 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 600 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 900 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 300 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -200 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
$$

Y hasta aquí se puede llegar. Evidentemente, hay un número infinito de soluciones. Usando la última matriz encontrada, se puede escribir cada variable en términos de x_6 y x_7:

$$x_1 = x_6 + 100$$

$$x_2 = x_6 - x_7 + 600$$

$$x_3 = -x_7 + 900$$

$$x_4 = x_6 + 300$$

$$x_5 = x_7 - 200$$

Ahora está claro que ya que x_6 no puede ser negativo (se tendría tránsito en el sentido contrario al permitido en una calle), se debe tener que

$$x_4 \geq 300$$

Así que, para minimizar el flujo de tránsito en Merritts Avenue entre Courtland y Peachtree (sin crear congestionamientos), la Policía de Atlanta debe considerar un flujo de 300 vpm en esa calle y cerrar el tránsito en Pine Street entre Peachtree y Courtland (porque para tener $x_4 = 300$ se necesita que $x_6 = 0$). Por último, con $x_6 = 0$ se tiene

$$x_1 = 100$$

$$x_2 = -x_7 + 600$$

$$x_3 = -x_7 + 900$$

$$x_4 = 300$$

$$x_5 = x_7 - 200$$

De la segunda ecuación se deduce que $x_7 \leq 600$. De la última ecuación, $x_7 \geq 200$. Entonces, se tiene la solución final de nuestro problema. Para lograr que el tránsito sea mínimo en x_4, se debe tener

$$x_1 = 100$$

$$0 \leq x_2 \leq 400 \text{ (porque } 200 \leq x_7 \leq 600)$$

$$300 \leq x_3 \leq 700$$

$$x_4 = 300$$

$$0 \leq x_5 \leq 400$$

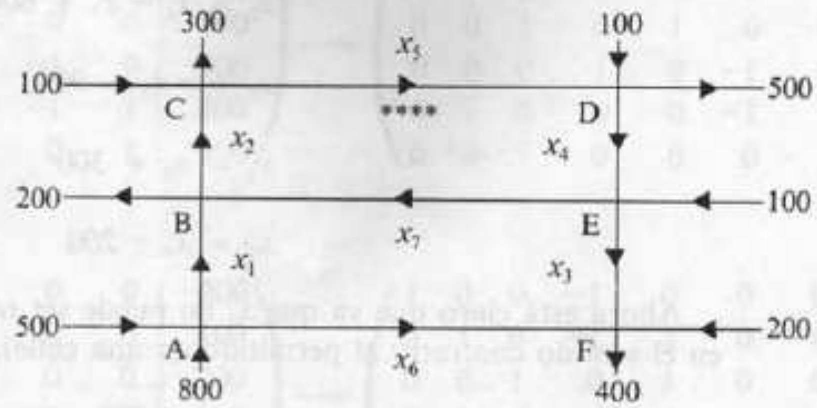
$$x_6 = 0$$

$$200 \leq x_7 \leq 600$$

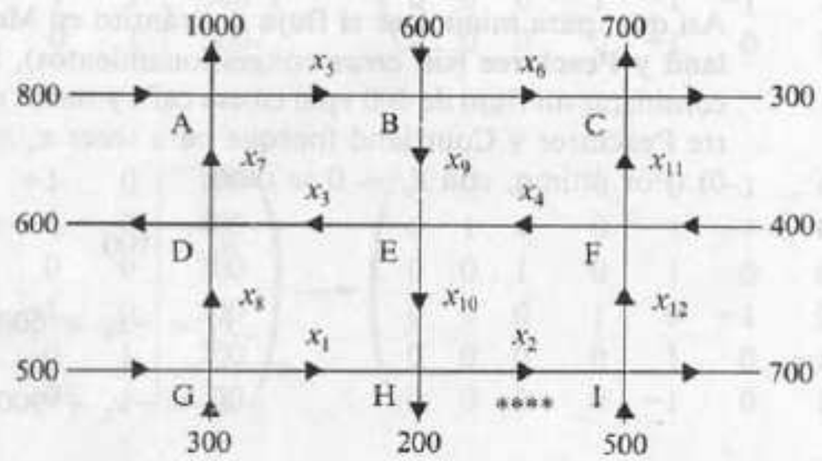
Problemas • Capítulo 3

En los mapas siguientes, minimícese el tránsito en la calle indicada con asteriscos (****).

1.



2.



CAPÍTULO 4

Criptografía

Criptografía es la ciencia de escribir o descifrar claves. A pesar de que esta materia se asocia frecuentemente con asuntos militares, la criptografía llegó a ser un área importante en los negocios. Las grandes empresas, que procesan enormes cantidades de datos computadorizados, deben protegerse constantemente contra lo que se llama "espionaje industrial", esto es, el robo de información importante por los competidores.

Actualmente, hay muchas técnicas extremadamente complejas desarrolladas para garantizar la posibilidad de transmitir grandes cantidades de información en forma confidencial. A esto se llegó después de investigación altamente elaborada hecha por criptógrafos modernos.

Claro que en este libro no será posible describir las técnicas más modernas para construir claves y para descifrarlas. Pero sí se ilustrarán maneras sencillas de construir y descifrar claves por medio de técnicas elementales sobre matrices.

Casi todos saben lo que es un *criptograma*. Se trata de un pasatiempo que aparece en muchos periódicos. Es común que se dé un mensaje como el siguiente:

KI ZPIIC VPJLP PI PUPJKVG.

Esto se puede descifrar usando la tabla "descodificadora":

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

P M V Q K S Z O T B W I U J C X E G Y L D R H A F N

Notando que K está en el lugar de E, que I sustituye a L, que Z reemplaza a G, etcétera, se llega al mensaje siguiente:

EL GALLO CANTA AL AMANECER.

Un criptograma usa una clase de clave muy burda y fácil de descifrar. Ahora se verá cómo se pueden usar matrices para crear una clave mucho más difícil de descifrar. Empezamos asignando a cada letra su lugar en el alfabeto ordenado. Esto nos da la siguiente asociación:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

(1)

Supóngase que queremos codificar el mensaje

LAS MATRICES SON AMIGABLES.

Descomponemos el mensaje en unidades de igual longitud. Si se escogen longitudes de dos letras, se obtiene

LA SM AT RI CE SS ON AM IG AB LE SX. (2)

La X al final simplemente llena el espacio. Si usamos nuestro código numérico (1), podemos escribir (2) como un conjunto de vectores de dos componentes

$$\begin{pmatrix}12\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}19\\13\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\20\end{pmatrix}\begin{pmatrix}18\\9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}19\\19\end{pmatrix}\begin{pmatrix}15\\14\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\13\end{pmatrix}\begin{pmatrix}9\\7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}12\\5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}19\\24\end{pmatrix}. \qquad (3)$$

Escogemos una matriz A de 2×2, inversible y entera, con determinante ± 1. Esto asegurará que A^{-1} también tiene sólo componentes enteras. Una matriz con esas condiciones es

$$A = \begin{pmatrix}1 & 3\\1 & 4\end{pmatrix}.$$

Para continuar, multiplicamos cada uno de los vectores de dos componentes en (3), a la izquierda, por A. Por ejemplo,

$$\begin{pmatrix}12\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 3\\1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}12\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}15\\16\end{pmatrix}.$$

Así obtenemos el nuevo conjunto de vectores

$$\begin{pmatrix}15\\16\end{pmatrix}\begin{pmatrix}58\\71\end{pmatrix}\begin{pmatrix}61\\81\end{pmatrix}\begin{pmatrix}45\\54\end{pmatrix}\begin{pmatrix}18\\23\end{pmatrix}\begin{pmatrix}76\\95\end{pmatrix}\begin{pmatrix}57\\71\end{pmatrix}\begin{pmatrix}40\\53\end{pmatrix}\begin{pmatrix}30\\37\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}27\\32\end{pmatrix}\begin{pmatrix}91\\115\end{pmatrix} \qquad (4)$$

Por último, escribimos (4) así:

$$15\ 16\ 58\ 71\ 61\ 81\ 45\ 54\ 18\ 23\ 76\ 95\ 57\ 71\ 40\ 53\ 30\ 37\ 7\ 9\ 27\ 32\ 91\ 115. \qquad (5)$$

Este es nuestro nuevo mensaje codificado, que sería muy difícil de descifrar si no se sabe cuál es la matriz A. Conociendo A, en cambio, es relativamente sencillo. Empezamos rearreglando los números en (5) en grupos de vectores de 2 componentes. Ya que, por ejemplo,

$$\begin{pmatrix} 15 \\ 16 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 12 \\ 1 \end{pmatrix},$$

tenemos que

$$\begin{pmatrix} 12 \\ 1 \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 15 \\ 16 \end{pmatrix}.$$

Para comprobar esto, observamos que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ por lo que } A^{-1}\begin{pmatrix} 15 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 15 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{L} \\ \mathrm{A} \end{pmatrix}.$$

Multiplicando cada uno de los vectores en (4) por A^{-1} se obtendrán los vectores en (3), que se pueden convertir directamente por medio de (1) en el mensaje (2). En este contexto, la matriz A se denomina **matriz codificadora**, y la matriz A^{-1} recibe el nombre de **matriz descodificadora**.

Como ejemplo adicional, se puede dificultar esto aún más, contra el descodificador potencial, agrupando la información en bloques más grandes. Si se escogen unidades de tres letras de largo, (2) se transforma en

$$\text{LAS MAT RIC ESS ONA MIG ABL ESX.} \qquad (6)$$

que, utilizando (1), se traduce a

$$\begin{pmatrix} 12 \\ 1 \\ 19 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 \\ 1 \\ 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 18 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 19 \\ 19 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 \\ 14 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 19 \\ 24 \end{pmatrix} \qquad (7)$$

Para codificar este mensaje se requiere ahora una matriz inversible entera de 3×3, cuya inversa tenga también valores enteros (otra vez, escogiendo una matriz de 3×3, de componentes enteros y determinante igual a ± 1). Una matriz con tales características es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

que tiene la inversa

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces, por ejemplo,

$$A\begin{pmatrix} 12 \\ 1 \\ 19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12 \\ 1 \\ 19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 71 \\ 51 \\ 39 \end{pmatrix}.$$

Esto nos da el nuevo conjunto de vectores de tres componentes

$$\begin{pmatrix} 71 \\ 51 \\ 39 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 75 \\ 54 \\ 41 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 45 \\ 33 \\ 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 62 \\ 57 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 46 \\ 31 \\ 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 52 \\ 36 \\ 23 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 41 \\ 27 \\ 26 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 115 \\ 72 \\ 67 \end{pmatrix} \quad (8)$$

Finalmente, escribimos (8) como:

71 51 39 75 54 41 45 33 15 100 62 57 46 31 16 52 36 23 41 27 26 115 72 67. (9)

Para descrifrar (9) se necesita conocer A^{-1}. Por ejemplo,

$$A^{-1}\begin{pmatrix} 71 \\ 51 \\ 39 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 71 \\ 51 \\ 39 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 1 \\ 19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{L} \\ \mathrm{A} \\ \mathrm{S} \end{pmatrix}.$$

Problemas • Capítulo 4

1. Mediante el método de este capítulo, codifique el mensaje

   MOZART CONQUISTA A TODOS,

   usando la matriz de codificación

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Resuelva el Problema 1 usando la matriz de codificación

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

3. Con la matriz del Problema 1, descífrese lo siguiente:

$$159 \quad 93 \quad 228 \quad 133 \quad 87 \quad 52 \quad 200 \quad 117 \quad 138 \quad 79 \quad 184 \quad 108 \quad 77 \quad 46$$

4. Usando la matriz del Problema 2, descífrese lo siguiente:

$$8 \quad 63 \quad 66 \quad 2 \quad 106 \quad 161 \quad -2 \quad 1 \quad 10 \quad -6 \quad 19 \quad 53 \quad -6 \quad 96 \quad 180$$

CAPÍTULO **5**

Aplicaciones a la genética

La teoría moderna de la herencia de las características tuvo su origen en los experimentos de Gregorio Mendel con plantas de chícharo, cuyos resultados se publicaron en 1865. La interpretación de Mendel de sus experimentos lo llevó a sugerir leyes generales que gobiernan la transmisión de características de los padres a sus descendientes. En particular, Mendel supone que la herencia es el resultado de la transmisión de partículas (que ahora se llaman genes) de los padres a los hijos. La naturaleza exacta de los genes y de los mecanismos por los que determinan las características heredadas han seguido siendo problemas importantes en la investigación biológica hasta el presente.

Un gene particular puede ocurrir en varias formas, o *alelos*. Para simplificar, consideraremos un gene con dos alelos, A y a. Los genes ocurren en cada célula de un organismo, agrupados en los cromosomas. Excepto para las células reproductoras, los genes ocurren en pares y se encuentran en cromosomas pareados. Los tres posibles pares de este gene, AA, Aa y aa, determinan los tres posibles *genotipos* del organismo en relación con tal gene. Los genotipos AA y aa se llaman *homócigos*, o puros, y el genotipo Aa se llama *heterócigo* o híbrido.

Las células reproductoras (el espermatozoide y el óvulo) tienen cromosomas no pareados y, por lo tanto, sólo tienen una copia de cada gene. Los genes de la descendencia resultan del pareamiento de los genes de las dos células reproductoras, una de cada uno de los padres. Si los dos progenitores son homócigos, el genotipo de la descendencia queda determinado. Por ejemplo, si uno de los padres es de genotipo AA y el otro es de genotipo aa, la descendencia tendrá que ser de genotipo Aa. Por otra parte, si uno de los padres o ambos son heterócigos, el genotipo de la descendencia no está determinado. Por ejemplo, si los dos padres son heterócigos, la descendencia puede ser AA, Aa o aa, con probabilidades de 1/4, 1/2 y 1/4, respectivamente, suponiendo igual viabilidad en la descendencia.

Muchas de las características, como el albinismo en los humanos, son controlados por un solo gene. Otras características, como la altura o la inteligencia, son controlados por los efectos combinados de un gran número de genes y con frecuencia son influidos fuertemente por factores de ambiente. Uno de los dos alelos A de un gene particular se dice que es *dominante* si los genotipos AA y Aa no se distinguen entre sí. En este caso, el alelo a se dice que es *recesivo* si el genotipo aa puede distinguirse por observación de los genotipos AA y Aa. El gene que controla la anemia en los humanos es un ejemplo de un gene con un alelo dominante y un alelo recesivo. Un individuo aa invariablemente sufre de anemia severa, que resulta en muerte prematura.

Si fuera posible clasificar los individuos de una población de una especie dada en cuanto a los genotipos AA, Aa y aa, sería posible determinar las proporciones de los dos alelos en la población. Esto no sería factible si, por ejemplo, no se pudieran distinguir AA de Aa. Sean

$$u = \text{proporción de genotipos de tipo AA}$$

$$v = \text{proporción de genotipos de tipo Aa}$$

$$w = \text{proporción de genotipos de tipo aa,}$$

y supongamos que se pueden determinar esas proporciones. Nótese que se debe tener

$$u + v + w = 1. \tag{1}$$

Entonces, las proporciones p y q de los dos alelos A y a en la población satisfacen las ecuaciones

$$\begin{aligned} p &= u + \tfrac{1}{2}v, \\ q &= \tfrac{1}{2}v + w. \end{aligned} \tag{2}$$

Aquí se usó el hecho de que los alelos A constituyen el 100 por ciento del genotipo AA (con proporción u) y el 50 por ciento del genotipo Aa, y similarmente para los alelos. Se observa que la segunda ecuación de (2) se puede deducir de la primera ecuación, porque $p + q = 1$ y $u + v + w = 1$. Si se supone que los genotipos ocurren en las mismas proporciones entre los machos que entre las hembras, entonces p y q representan (en toda la población) las probabilidades de que el gene sea A o a, respectivamente.

Ejemplo 1 En una población, la distribución de genotipos es de 50 por ciento de AA, 30 por ciento de Aa y 20 por ciento de aa. ¿Qué proporciones de los genes en esta población son A y a?

Solución En este ejemplo, $u = 0.50$, $v = 0.30$, $w = 0.20$. Por lo tanto, $p = 0.50 + (1/2)(0.30) = 0.65$ y $q = 0.15 + 0.20 = 0.35$. Esto implica que de la "población" de genes el 65 por ciento es de A y el 35 por ciento es de a.

Con frecuencia es interesante el problema inverso al de la determinación de las proporciones de los genotipos cuando se conocen las proporciones de los alelos. En general, este problema no tiene solución única. El sistema de ecuaciones (2) se reduce a una ecuación en dos incógnitas, $p = u + (1/2)v$. Para obtener una segunda ecuación independiente, supondremos apareamiento aleatorio. Esto quiere decir que la probabilidad de que un individuo dado se aparee con otro individuo no depende del genotipo de este último. En muchos casos, ésta es una suposición correcta. A veces no lo es. Por ejemplo, se sabe que la gente alta se tiende a casar con gente alta, y por lo tanto la característica de la altura en los humanos no se puede analizar de esta manera. Por otro lado, se ha demostrado que la suposición de apareo aleatorio se aplica a la característica de los tipos de sangre humana. La mayoría de los individuos escogen su cónyuge sin preocuparse por su tipo de sangre.

Igual que antes, supóngase que p y q son las proporciones de los alelos A y a entre los machos y entre las hembras. Entonces, si suponemos que la población es grande, la probabilidad de que la descendencia reciba el alelo A de los dos padres es p^2. De manera similar, las probabilidades de los genotipos Aa y aa son $2pq$ y q^2, respectivamente. El término $2pq$ proviene del hecho de que los individuos Aa y aA tienen genotipos idénticos. Ya que la probabilidad del genotipo Aa es pq y la del genotipo aA es qp, la probabilidad de Aa es $2pq$. Este resultado conduce al teorema siguiente, descubierto en forma independiente por Hardy y Weinberg en 1908.

Teorema 1 (Ley de Hardy-Weinberg) Supóngase que, en una gran población de padres, los alelos A y a de un gene particular se presentan en las proporciones p y $q = 1 - p$. Suponiendo que estas proporciones son las mismas para los machos y para las hembras y, además, que el apareo es aleatorio, la primera y todas las generaciones sucesivas se compondrán de los tres genotipos, AA, Aa y aa, en las proporciones p^2, $2pq$ y q^2.

Demostración Como se ha visto, un individuo de la primera generación es de genotipo AA si sus dos padres contribuyen con alelos A. Como la probabilidad es p de que cualquiera de los padres contribuya con un alelo A, la probabilidad del genotipo AA en la descendencia inmediata es de p^2. De manera semejante, las probabilidades de los genotipos Aa y aa son de $2pq$ y p^2. Esto implica que las proporciones p_1 y q_1 de los alelos A y a en la primera generación están dadas por

$$p_1 = p^2 + \tfrac{1}{2}(2pq) = p(p + q) = p,$$

$$q_1 = \tfrac{1}{2}(2pq) + q^2 = q(p + q) = q.$$

Por lo tanto, las proporciones de los dos alelos no se afectan por la generación inicial. Esto continúa de generación en generación. Concluimos que, después de la generación inicial, las proporciones de los tres genotipos AA, Aa y aa permanecen constantes en p^2, $2pq$ y q^2. ■

Ejemplo 2 El color de la flor de chícharo está controlado por un par de genes. Los tres genotipos AA, Aa y aa se caracterizan por sus flores rojas, color de rosa y blancas, respectivamente. Si se cultiva un campo al azar con 60 por ciento de flores rojas y 40 por ciento de flores blancas, ¿qué proporciones de los tres genotipos estarán presentes en la cuarta generación?

Solución En este ejemplo, $p = 0.6$ y $q = 0.4$. Por la ley de Hardy-Weinberg, las proporciones de flores rojas, rosadas y blancas en la primera generación y en todas las subsecuentes son de p^2, $2pq$ y q^2, o sea de 0.36, 0.48 y 0.16, respectivamente. Nótese que la suposición de cultivo aleatorio equivale a la suposición de polinización aleatoria.

Hacemos hincapié en que la ley de Hardy-Weinberg sólo es válida cuando el apareo es aleatorio y cuando los tres genotipos son igualmente viables. En ciertos casos, es bastante difícil verificar que el apareo es aleatorio. Sin embargo, si las proporciones de los genotipos permanecen constantes durante varias generaciones, y si satisfacen la ley de Hardy-Weinberg, esto se puede tomar como una fuerte evidencia de que el apareamiento es aleatorio. Así, el conocimiento de que el apareo es aleatorio para los tipos de sangre humana, así como para muchas características de plantas y animales, se dedujo de observaciones de las proporciones de genotipos en cuanto cumplen esta ley. Se debe indicar, sin embargo que las discrepancias en las proporciones medidas para los genotipos no necesariamente implican que el apareo no es aleatorio. Estas discrepancias se pueden atribuir a otros factores, como la mortalidad diferencial.

Situaciones en las que el apareamiento no es aleatorio, se presentan frecuentemente en experimentos biológicos controlados. Un ejemplo evidente se da en la cría de caballos de carreras, donde un ganador probado tiene gran demanda como semental. El ejemplo siguiente muestra una de las situaciones que pueden presentarse en una situación controlada.

Ejemplo 3 En un experimento controlado, los individuos se aparean de tal forma que uno de los individuos de la pareja es de tipo AA y el otro se escoge al azar. La descendencia se aparea después con individuos de tipo AA, y este proceso continúa. Demostrar que, a la larga, las proporciones de los individuos de tipo AA se acercarán a 1.

Solución Sean u_n, v_n y w_n las proporciones de los tres genotipos en la generación n. Se puede construir una tabla para determinar u_1, v_1 y w_1:

	AA (u)	Aa (v)	aa (w)
AA	toda la primera generación de tipo AA	mitad de tipo AA mitad de tipo Aa	toda la primera generación de tipo Aa

Así, tenemos

$$u_1 = u + \tfrac{1}{2}v$$

$$v_1 = \tfrac{1}{2}v + w \tag{3}$$

$$w_1 = 0$$

Esto puede escribirse en notación matricial.

Si $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \end{pmatrix}$ y $P = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

entonces el sistema (3) se transforma en

$$\mathbf{u}_1 = P\mathbf{u} \tag{4}$$

Continuando de la misma manera, si definimos $\mathbf{u}_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$, encontramos que

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}_2 & = & P\mathbf{u}_1 & = & P(P\mathbf{u}) & = & P^2\mathbf{u}, \\ \mathbf{u}_3 & = & P\mathbf{u}_2 & = & P(P^2\mathbf{u}) & = & P^3\mathbf{u}, \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{u}_n & = & P\mathbf{u}_{n-1} & = & P(P^{n-1}\mathbf{u}) & = & P^n\mathbf{u} \end{pmatrix} \tag{5}$$

Así, las proporciones de los genotipos futuros están completamente determinados por el vector $\mathbf{u}$ de las proporciones iniciales y por la matriz P.*

Ahora, es fácil comprobar que los valores característicos de P son $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1/2$ y $\lambda_3 = 1$, con vectores característicos correspondientes

$$v_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ y } v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Así, P será diagonalizada por la matriz

$$C \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C^{-1}PC = D \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

* En el lenguaje del Capítulo 9, $\mathbf{u}$ es un vector de probabilidades, y P es la matriz de transición de una cadena de Markov.

Por último, como $P = CDC^{-1}$, se tiene que

$$P^n = (CDC^{-1})^n = \underbrace{(CDC^{-1})(CDC^{-1}) \dots (CDC^{-1})}_{n \text{ veces}} = CD^nC^{-1}. \tag{6}$$

Pero

$$D^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \dots,$$

$$D^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^n} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como $1/2^n \to 0$ cuando $n \to \infty$, se ve que D^n tiende a la matriz de equilibrio

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esto quiere decir que

$$P^n \to C \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} C^{-1}.$$

Por último, como

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

se tiene que

$$P^n \to \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{u}_n = P^n u \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u + v + w \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ya que $u + v + w = 1$. Así queda demostrado el resultado deseado.

Problemas • Capítulo 5

1. La posibilidad de gustar ciertas sustancias se controla genéticamente. La feniltiocarbamida (FTC) tiene un sabor amargo para aproximadamente el 70% de la gente

en una gran población y es insípida al 30% restante. Suponiendo que la posibilidad o imposibilidad de gustar la FTC se debe a un solo gene, estímense las proporciones del gene que permite gustarlo y del gene que no lo permite, si el primero es dominante y el segundo es recesivo. ¿Qué proporción de los individuos de esta población son heterócigos para este gene?

2. Muchos genes afectan la capacidad reproductora del organismo. En algunos casos, se puede seguir recurriendo a la ley de Hardy-Weinberg, para predecir las proporciones de genotipos en la siguiente generación en las etapas anteriores a la selección. Por ejemplo, la condición conocida de vestigio de alas en las moscas de las frutas es controlada por un gene recesivo. Se caracteriza por alas más cortas y afecta la posibilidad de supervivencia y de reproducción del genotipo recesivo. Supóngase que 1 adulto en 6400 en una gran población tiene alas de vestigio. Estímense las proporciones de los genotipos en la siguiente generación, antes de que ocurra la selección.

3. Considérese el siguiente experimento de apareo: Un individuo de genotipo desconocido AA, Aa o aa se aparea con un individuo heterócigo Aa. Uno de sus descendientes se escoge el azar y se vuelve a aparear con un individuo heterócigo. Después de repetir este proceso por muchas generaciones, ¿cuál es la probabilidad de que uno de sus descendientes inmediatos escogido al azar sea heterócigo? [*Sugerencia*: Esto es semejante al Ejemplo 3.]

4. En el Problema 3, supóngase que un descendiente escogido aleatoriamente se aparea con individuos recesivos (aa) en cada generación. Después de muchas generaciones, ¿cuál es la probabilidad de que uno de sus descendientes escogido al azar sea recesivo?

5. Supóngase que en el Problema 3, la primera generación de uno de los individuos de la pareja es de tipo AA y su segunda pareja se escoge al azar. En la segunda generación, una de sus parejas es de tipo Aa y su segunda pareja se escoge aleatoriamente. Supóngase que esto continúa (es decir, con una pareja Aa en las generaciones pares y con una pareja AA en las generaciones impares). ¿A qué proporciones de los tres genotipos se tiende después de muchas generaciones?

6. Considérese un gene con cuatro alelos, A_1, A_2, A_3, A_4. Escríbanse los 10 genotipos correspondientes a este gene. Supóngase que, inicialmente, estos cuatro alelos están presentes en iguales proporciones en una gran población. Suponiendo que las proporciones son las mismas entre los machos que entre las hembras, y además que el apareo es aleatorio, determínense las proporciones de los distintos genotipos en la primera y en todas las siguientes generaciones.

7. En el Problema 6, supóngase que un individuo de genotipo desconocido se aparea con un individuo de tipo A_1A_1. Esto continúa como en el Ejemplo 3.
   (a) Escríbase una matriz de 10×10 que muestre la manera de calcular las proporciones de los genotipos en la primera generación y en todas las siguientes.
   (b) Muéstrese que después de muchas generaciones, casi todos los individuos serán del tipo A_1A_1. [*Sugerencia*: Demuéstrese que los valores característicos de la matriz triangular superior P son 0, 1/2 y 1.]

8. Supóngase que un gene tiene n alelos $A_1, A_2, \ldots, A_n$. En un experimento uno de los individuos de la pareja es un homócigo de tipo A_iA_i, y se escoge su pareja al azar. Esto continúa de la manera descrita en el Ejemplo 3. Explíquese por qué, después de muchas generaciones, casi toda la descendencia será del tipo A_iA_i.