CAPÍTULO **6**

Aproximación por mínimos cuadrados

En muchos de los problemas en las ciencias biológicas, físicas y sociales es útil describir la relación entre las variables del problema por medio de una expresión matemática. Así, por ejemplo, se pueden describir las relaciones entre el costo (C), los ingresos (I) y las utilidades (U) por medio de la sencilla fórmula

$$U = I - C.$$

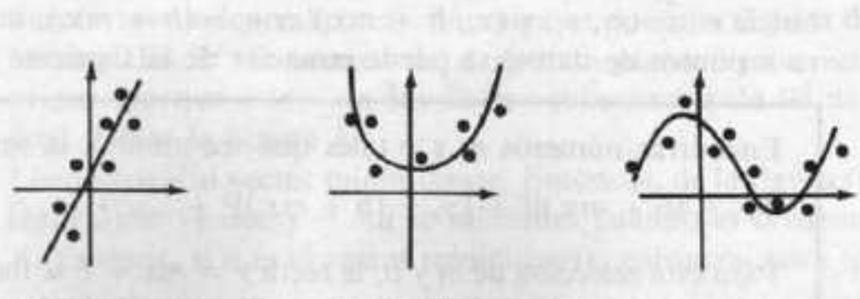
En otro campo, se puede representar la relación entre la aceleración debida a la gravedad, el tiempo que un objeto ha estado cayendo, y la altura del objeto, por la ley física

$$s = s_0 - v_0 t - \tfrac{1}{2} g t^2,$$

en la que s_0 es la altura inicial del objeto y v_0 es su velocidad inicial.

Desafortunadamente, no se llega fácilmente a fórmulas como éstas. Por lo general le corresponde al científico o economista trabajar con grandes cantidades de datos para encontrar relaciones entre las variables del problema. Una manera común de hacer esto consiste en ajustar una línea entre los distintos puntos de los datos. Dicha línea puede ser una recta, o una curva cuadrática,

Figura 1 (Cap. 6)



(a) Recta (b) Cuadrática (c) Cúbica

o una cúbica, etc. El objeto es encontrar la curva del tipo dado que "mejor" se ajuste a los datos. En este capítulo se mostrarán métodos para hacer esto cuando se tienen dos variables en el problema. En cada caso supondremos que se tienen n puntos de datos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$.

En la Figura 1 se muestran tres de las curvas que pueden usarse para ajustar a los datos.

6.1 Aproximación por una línea recta

Antes de continuar, debemos aclarar lo que quiere decir el "mejor ajuste". Supóngase que se busca una recta de la forma $y = b + mx$ que sea la que mejor represente a los n puntos de los datos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$.

En la Figura 2 se muestra lo que sucede (al usar tres puntos de datos). En dicha figura se ve que si las variables x y y estuvieran relacionadas por la fórmula $y = b + mx$, entonces, por ejemplo, para $x = x_1$, el valor correspondiente de y es $b + mx_1$. Este valor es distinto del "verdadero" valor de y, o sea $y = y_1$.

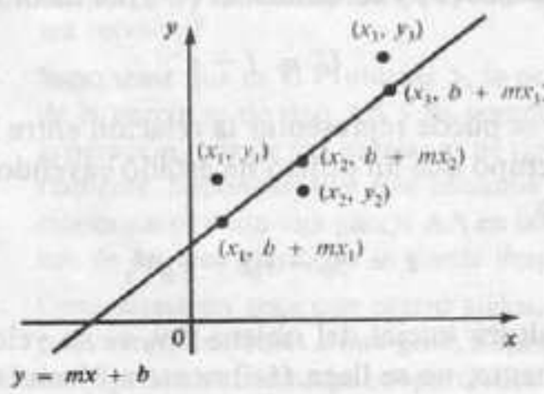


Figura 2 (Secc. 6.1)

En $\mathbb{R}^2$, la distancia entre los puntos (a_1, b_1) y (a_2, b_2) está dada por $d = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2}$. Por lo tanto, para determinar la manera de escoger la recta $y = b + mx$ que mejor se aproxime a los datos dados, es razonable usar como criterio la selección de la recta que minimice la suma de los cuadrados de las distancias entre los puntos y la recta. Nótese que como la distancia entre (x_1, y_1) y $(x_1, b + mx_1)$ es $y_1 - (b + mx_1)$, nuestro problema (para n puntos de datos) se puede enunciar de la siguiente manera:

> Encontrar números m y b tales que sea mínima la suma
>
> $$[y_1 - (b + mx_1)]^2 + [y_2 - (b + mx_2)]^2 + \ldots + [y_n - (b + mx_n)]^2. \quad (1)$$
>
> Para esta selección de m y b, la recta $y = mx + b$ se llama **aproximación de la recta de mínimos cuadrados a los puntos de datos** $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$.

Habiendo definido el problema, podemos escoger un método para encontrar la aproximación por mínimos cuadrados. Esto se hace más fácil si se escribe la información en notación matricial. Si los puntos (x_1, y_1), (x_2, y_2), $\ldots$, (x_n, y_n) están todos en la recta $y = b + mx$ (es decir, si son colineales), tenemos

$$\begin{aligned} y_1 &= b + mx_1 \\ y_2 &= b + mx_2 \\ \vdots &\quad\ \ \vdots \\ y_n &= b + mx_n \end{aligned}$$

o bien

$$\mathbf{y} = A\mathbf{u} \tag{2}$$

donde

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix} \text{ y } \mathbf{u} = \begin{pmatrix} b \\ m \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Si los puntos no son colineales, entonces $\mathbf{y} - A\mathbf{u} \neq 0$ y el problema se transforma en

> encontrar un vector $\mathbf{u}$ tal que la norma euclidiana sea mínima.
>
> $$\|\mathbf{y} - A\mathbf{u}\| \tag{4}$$

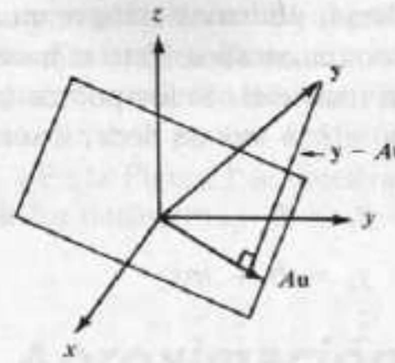
Nótese que en $\mathbb{R}^2$, $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$; en $\mathbb{R}^3$ $\|(x, y, z)\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, etc. Así que minimizar (4) es equivalente a minimizar la suma de los cuadrados que aparecen en (1).

Encontrar el vector minimizante $\mathbf{u}$ no es tan difícil como parece. Ya que A es una matriz $n \times 2$ y $\mathbf{u}$ es una matriz 2×1, el vector $A\mathbf{u}$ es un vector en $\mathbb{R}^n$ y pertenece a la imagen de A. La imagen de A es un subespacio de $\mathbb{R}^n$ de dimensión no mayor que dos (porque a lo más dos de las columnas de A son linealmente independientes). Suponemos que $n = 3$ para ilustrar lo que debe hacerse. En $\mathbb{R}^3$, la imagen de A será un plano o una recta que pasa por el origen (porque éstos son los únicos subespacios de $\mathbb{R}^3$ de dimensión uno o dos). Véase la Figura 3.

Llamemos $\bar{\mathbf{u}}$ al vector minimizante. Entonces, de la figura (y el teorema de Pitágoras) se ve que $\mathbf{y} - A\mathbf{u}$ se minimiza cuando es ortogonal a la imagen de A. Es decir, si $\bar{\mathbf{u}}$ es el vector minimizante, entonces, para todo vector $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$,

$$A\mathbf{u} \perp (\mathbf{y} - A\bar{\mathbf{u}}). \tag{5}$$

Figura 3
(Secc. 6.1)



Usando la definición del producto escalar en $\mathbb{R}^n$, (5) puede expresarse como

$$A\mathbf{u} \cdot (\mathbf{y} - A\bar{\mathbf{u}}) = 0$$

$$(A\mathbf{u})^t(\mathbf{y} - A\bar{\mathbf{u}}) = 0$$

$$(\mathbf{u}^t A^t)(\mathbf{y} - A\bar{\mathbf{u}}) = 0$$

o bien

$$\mathbf{u}^t(A^t\mathbf{y} - A^tA\bar{\mathbf{u}}) = 0. \tag{6}$$

Se puede cumplir la Ecuación (6) para todo vector $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ sólo si

$$A^t\mathbf{y} - A^tA\bar{\mathbf{u}} = 0 \tag{7}$$

Despejando $\bar{\mathbf{u}}$ de (7), se obtiene

$$\boxed{\bar{\mathbf{u}} = (A^tA)^{-1}A^t\mathbf{y}} \tag{8}$$

Aquí hemos supuesto que A^tA es inversible. Esto siempre se cumple cuando los n puntos datos no son colineales. La demostración de este enunciado es difícil y se pospone para el final de la sección.

Ejemplo 1 Encontrar la recta de mejor ajuste a los puntos de datos (1, 4), (−2, 5), (3, −1) y (4, 1).

Solución Aquí se tiene que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ y } \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$A^tA = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 30 \end{pmatrix}, \quad (A^tA)^{-1} = \frac{1}{84}\begin{pmatrix} 30 & -6 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} \text{ y}$$

$$\bar{\mathbf{u}} = (A^tA)^{-1}A^t\mathbf{y} = \frac{1}{84}\begin{pmatrix}30 & -6\\ -6 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\ 5\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{84}\begin{pmatrix}30 & -6\\ -6 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}9\\ -5\end{pmatrix} = \frac{1}{84}\begin{pmatrix}300\\ -74\end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix}3.57\\ -0.88\end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, la recta de mejor ajuste está dada por

$$y = 3.57 - 0.88x.$$

Esta recta y los cuatro puntos dados se representan en la Figura 4.

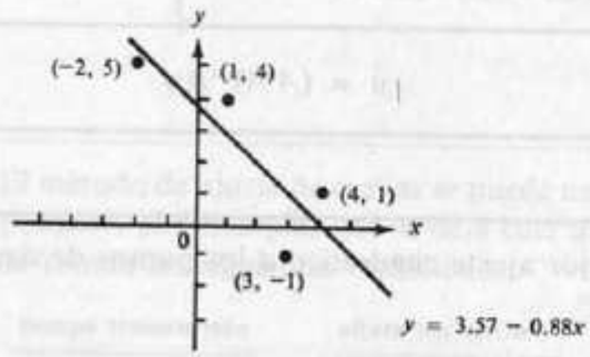


Figura 4
(Secc. 6.1)

6.2 Aproximación cuadrática

Aquí se pretende ajustar una curva cuadrática a los n puntos datos. Recuérdese que una cuadrática en x es cualquier expresión de la forma

$$y = a + bx + cx^2 \tag{9}$$

La Ecuación (9) es la de una parábola en el plano. Si los n puntos dados estuvieran en la parábola, se tendría

$$\begin{aligned} y_1 &= a + bx_1 + cx_1^2\\ y_2 &= a + bx_2 + cx_2^2\\ &\vdots\\ y_n &= a + bx_n + cx_n^2 \end{aligned} \tag{10}$$

$$\text{Para } \mathbf{y} = \begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix}1 & x_1 & x_1^2\\ 1 & x_2 & x_2^2\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ 1 & x_n & x_n^2\end{pmatrix} \text{ y } \mathbf{u} = \begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}, \tag{11}$$

(10) puede escribirse como

$$\mathbf{y} = A\mathbf{u},$$

igual que antes. Si los puntos dados no están todos en la misma parábola, entonces $\mathbf{y} - A\mathbf{u} \neq 0$ para cualquier vector $\mathbf{u}$ y nuestro problema vuelve a ser

> encontrar un vector u en $\mathbb{R}^3$ tal que $\|\mathbf{y} - A\mathbf{u}\|$ sea mínimo.

Usando un razonamiento similar al anterior, se puede demostrar que si los puntos de datos no están todos en una parábola, entonces $A'A$ es inversible y el vector $\bar{\mathbf{u}}$ está dado por

$$\boxed{\bar{\mathbf{u}} = (A'A)^{-1}A'\mathbf{y} \qquad (12)}$$

Ejemplo 2 Encontrar el mejor ajuste cuadrático a los puntos de datos del Ejemplo 1.

Solución

Aquí
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \end{pmatrix} \text{ y}$$

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces
$$A'A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 30 \\ 6 & 30 & 84 \\ 30 & 84 & 354 \end{pmatrix}, \quad (A'A)^{-1} = \frac{1}{4752}\begin{pmatrix} 3564 & 396 & -396 \\ 396 & 516 & -156 \\ -396 & -156 & 84 \end{pmatrix}$$

y

$$\bar{\mathbf{u}} = (A'A)^{-1}A'y = \frac{1}{4752}\begin{pmatrix} 3565 & 396 & -396 \\ 396 & 516 & -156 \\ -396 & -156 & 84 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4752}\begin{pmatrix} 3564 & 396 & -396 \\ 396 & 516 & -156 \\ -396 & -156 & 84 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 \\ -5 \\ 31 \end{pmatrix} = \frac{1}{4752}\begin{pmatrix} 17820 \\ -3852 \\ -180 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 3.75 \\ -0.81 \\ -0.04 \end{pmatrix}.$$

Entonces, el mejor ajuste cuadrático a los datos está dado por la parábola

$$y = 3.75 - 0.81x - 0.04x^2.$$

La parábola y los puntos de datos se muestran en la Figura 5.

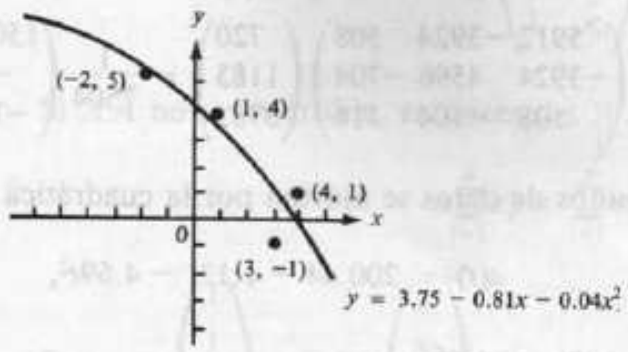


Figura 5
(Secc. 6.2)

Ejemplo 3 El método de ajuste de curvas se puede usar para medir constantes físicas. Supóngase, por ejemplo, que se deja caer un objeto desde una altura de 200 m. Se toman las siguientes mediciones:

tiempo transcurrido	**altura (en metros)**
0	200
1	195
2	180
4	120
6	25

Si se deja caer un objeto de una altura de 200 m, partiendo del reposo, entonces su altura después de t segundos está dada por

$$s = 200 - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

Para estimar el valor de g, podemos ajustar una cuadrática a los cinco puntos dados anteriormente. Los coeficientes del término en t^2 será, si las mediciones son exactas, una aproximación razonable al número $-(1/2)g$. Usando la misma notación que antes, se tiene

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 16 \\ 1 & 6 & 36 \end{pmatrix}, \quad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 16 & 36 \end{pmatrix} \text{ y } \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 200 \\ 195 \\ 180 \\ 120 \\ 25 \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$A^tA = \begin{pmatrix} 5 & 13 & 57 \\ 13 & 57 & 289 \\ 57 & 289 & 1569 \end{pmatrix}, \quad (A^tA)^{-1} = \frac{1}{7504}\begin{pmatrix} 5912 & -3924 & 508 \\ -3924 & 4596 & -704 \\ 508 & -704 & 116 \end{pmatrix},$$

y

$$\mathbf{u} = \frac{1}{7504}\begin{pmatrix} 5912 & -3924 & 508 \\ -3924 & 4596 & -704 \\ 508 & -704 & 116 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 16 & 36 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 200 \\ 195 \\ 180 \\ 120 \\ 25 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{7504}\begin{pmatrix} 5912 & -3924 & 508 \\ -3924 & 4596 & -704 \\ 508 & -704 & 116 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 720 \\ 1185 \\ 3735 \end{pmatrix} = \frac{1}{7504}\begin{pmatrix} 1504080 \\ -8460 \\ -35220 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 200.44 \\ -1.13 \\ -4.69 \end{pmatrix}$$

Así que los puntos de datos se ajustan por la cuadrática

$$s(t) = 200.44 - 1.13t - 4.69t^2,$$

y se tiene que $1/2g \approx 4.69$, o sea

$$g \approx 2(4.69) = 9.38 \text{ m/s}^2.$$

Este valor está razonablemente cerca del valor correcto, 9.81 m/s^2. Para obtener una aproximación más exacta de g sería necesario partir de observaciones más exactas.

Anotamos aquí que las aproximaciones por polinomios de orden superior se llevan a cabo virtualmente en la misma forma. Para ver los detalles, consúltense los Problemas 7 y 9.

Concluimos este capítulo demostrando el resultado que garantiza que la Ecuación (8) siempre será válida, excepto cuando los puntos de datos están en una misma recta vertical.

Teorema 1 ***(Opcional).*** Sean $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ n puntos en $\mathbb{R}^2$, y supóngase que no son iguales todas las x_i. Entonces si se da A como en (3), la matriz A^tA es una matriz de 2×2 inversible.

Nota. Si $x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_n$, entonces todos los puntos de datos están en la recta vertical $x = x_1$, y la mejor aproximación lineal es, claro está, esa recta.

Demostración del Teorema 1 Tenemos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix}.$$

Puesto que no todas las x_i son iguales, las columnas de A son linealmente independientes. Ahora bien,

$$A^tA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{pmatrix}.$$

Si A^tA no es inversible, entonces $\det A^tA = 0$. Pero esto quiere decir que

$$n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2. \tag{13}$$

Sea $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Entonces

$$\|\mathbf{u}\|^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = n,\ \|\mathbf{x}\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \text{ y } \mathbf{u} \cdot \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

por lo que la Ecuación (13) se puede escribir

$$\|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{x}\|^2 = |\mathbf{u} \cdot \mathbf{x}|^2$$

o, extrayendo raíces cuadradas,

$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{x}| = \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{x}\|.$$

Ahora, por la desigualdad de Schwartz $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{x}| \leq \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{x}\|$ dándose la igualdad si y sólo si $\mathbf{x}$ es un múltiplo constante de $\mathbf{u}$. Pero $\mathbf{u}$ y $\mathbf{x}$ son las columnas de A, que son linealmente independientes, por hipótesis. Esta contradicción demuestra el teorema. ■

Problemas • Capítulo 6

En los Problemas 1-3 encuéntrese la recta de mejor ajuste a los puntos de datos que se dan.

1. (1, 3), (−2, 4), (7, 0)
2. (−3, 7), (4, 9)
3. (1, −3), (4, 6), (−2, 5), (3, −1)

En los Problemas 4-6 encuéntrese el mejor ajuste cuadrático a los puntos de datos que se dan.

4. (2, −5), (3, 0), (1, 1), (4, −2)
5. (−7, 3), (2, 8), (1, 5)
6. (1, −1), (3, −6), (5, 2), (−3, 1), (7, 4)

7. La cúbica general está dada por

$$a + bx + cx^2 + dx^3.$$

Demuéstrese que la mejor aproximación cúbica a n puntos de datos está dada por

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = (A^tA)^{-1}A^t\mathbf{y},$$

donde $\mathbf{y}$ es lo mismo que antes, y

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 \end{pmatrix}.$$

8. Encuéntrese la mejor aproximación cúbica a los puntos de datos (3, −2), (0, 3), (−1, 4), (2, −2), (1, 2).

9. El polinomio general de grado k está dado por

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_kx^k.$$

Demuéstrese que el mejor ajuste de grado k a los n puntos de datos está dado por

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix} = (A^tA)^{-1}A^t\mathbf{y},$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^k \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^k \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^k \end{pmatrix}.$$

10. Todos los puntos (1, 5.52), (−1, 15.52), (3, 11.28) y (−2, 26.43) se encuentran en una misma parábola.

(a) Encontrar la citada parábola.

(b) Demostrar que $\|\mathbf{y} - A\bar{\mathbf{u}}\| = 0$.

11. Un fabricante compra grandes cantidades de ciertas refacciones para máquinas. Encuentra que su costo depende del número de cajas de piezas que compre una vez y que el costo por unidad disminuye al aumentar el número de unidades compradas. Supone que el costo es una función cuadrática del volumen y, de experiencia anterior, obtiene la tabla siguiente:

Número de cajas	Costo total
10	$150
30	$260
50	$325
100	$500
175	$670

Encuéntrese su función de costo total.

12. Una persona lanza al aire una pelota. Su altura está dada por $s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$. Se hicieron las siguientes mediciones:

Tiempo transcurrido (segundos)	Altura (en pies)
1	57
1.5	67
2.5	68
4	9.5

Usando estos datos, estímese

(a) la altura desde la cual se soltó la pelota

(b) su velocidad inicial

(c) g (en pie/s^2).

CAPÍTULO **7**

Teoría de los grafos

En los últimos años se ha puesto mucha atención en una área relativamente nueva de la investigación matemática que se llama **teoría de los grafos**. Estas representaciones, que serán definidas próximamente, sirven para estudiar las interrelaciones entre los componentes de redes de actividades que se presentan en el comercio, en las ciencias sociales, en la medicina y en muchas otras áreas. Por ejemplo, los grafos son útiles para estudiar las relaciones familiares en una sociedad tribal, la difusión de una enfermedad contagiosa, o una red de vuelos que conectan un número dado de ciudades importantes. La teoría de los grafos es una materia amplia. En este capítulo sólo se darán algunas definiciones y se mostrará la estrecha relación entre la teoría de los grafos y la teoría de matrices.

Mostramos ahora cómo se puede presentar un grafo en la práctica.

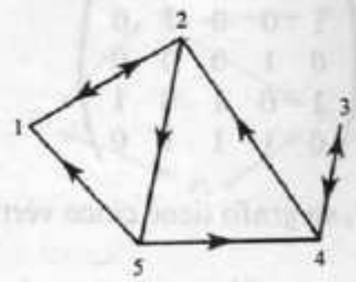
Ejemplo 1 Supóngase que estamos estudiando un sistema de comunicaciones compuesto de enlaces telefónicos. En este sistema hay cinco estaciones. En la tabla que sigue se indican las líneas disponibles desde y hacia las estaciones.

Tabla 1 *(Cap. 7)*

Estación	1	2	3	4	5
1		√			
2	√				√
3				√	
4		√	√		
5	√			√	

Por ejemplo, la marca en la casilla 1, 2 indica que hay una línea de la estación 1 a la estación 2. La información en esta tabla se puede representar por un grafo dirigido, como se muestra a continuación:

Figura 1 (Cap. 7)



En general, un **grafo dirigido** es una colección de n puntos llamados **vértices** y denotados por $V_1, V_2, \ldots, V_n$, con un número finito de **aristas** que unen pares de vértices. Cualquier grafo dirigido se puede representar por una matriz de $n \times n$, donde el número en la posición i, j es el número de aristas que unen el vértice i al vértice j.

Ejemplo 2 La representación matricial del grafo de la Figura 1 es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Ejemplo 3 Encontrar las representaciones matriciales de los siguientes grafos dirigidos.

Figura 2 (Cap. 7) (a)

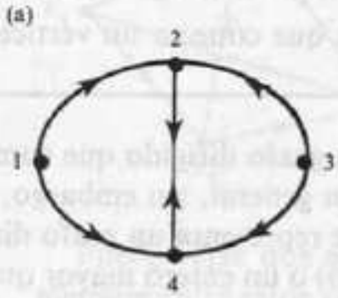
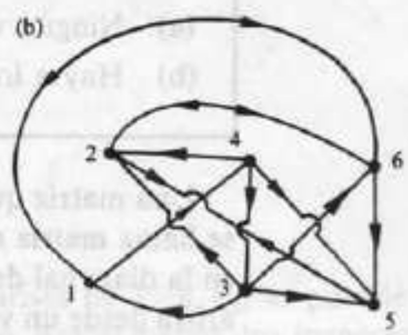


Figura 3 (Cap. 7) (b)



Solución

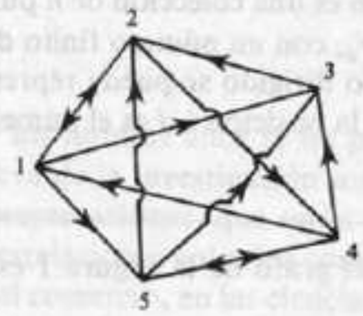
$$\text{(a) } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(b) } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 4 Trazar el grafo representado por la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución Como A es una matriz de 5×5, su grafo tiene cinco vértices, y es el que aparece a continuación:

Figura 4 (Cap. 7)



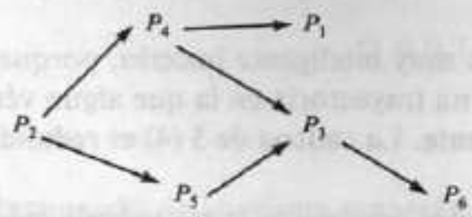
Observación. En los ejemplos considerados, los grafos dirigidos que han aparecido, satisfacen las dos condiciones siguientes:

(a) Ningún vértice está conectado consigo mismo.
(b) Hay a lo más una arista que conecta un vértice con otro.

Una matriz que representa un grafo dirigido que cumple estas condiciones se llama **matriz de incidencia.** En general, sin embargo, es posible tener un 1 en la diagonal de una matriz que representa un grafo dirigido (indicando una arista desde un vértice a sí mismo) o un entero mayor que 1 en la matriz (indicando más de una trayectoria de un vértice a otro). Para evitar situaciones más complicadas (pero que se pueden resolver), hemos supuesto, y así lo seguiremos haciendo, que se cumplen (a) y (b).

Ejemplo 5 Los sociólogos usan a menudo grafos dirigidos para estudiar interacciones en un grupo. En muchas situaciones de grupo, ciertos individuos dominan a otros. Este dominio puede ser físico, intelectual o emocional. Para ser más específicos, supongamos que en cierto grupo de seis personas, un sociólogo ha podido determinar quién domina a quién. (Esto se pudo hacer por pruebas sicolócigas, por medio de cuestionarios o, simplemente, por observación.) El siguiente grafo dirigido indica los descubrimientos del sociólogo:

Figura 5 (Cap. 7)

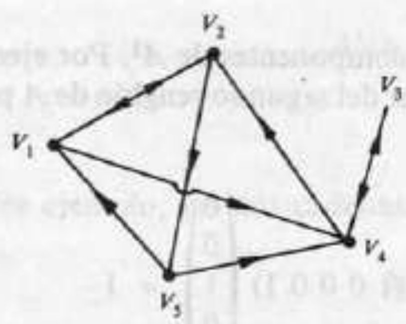


La representación matricial de este grafo es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De poca utilidad sería la representación matricial de los grafos si sólo fuera posible trazarlos. Hay varias preguntas que se podrían hacer sobre los grafos, que podrían no tener respuesta evidente. Para ilustrar esto, considérese el grafo siguiente:

Figura 6 (Cap. 7)



Puede verse que aunque no hay arista de V_1 a V_5, es posible mandar un mensaje entre estos vértices. De hecho, hay al menos dos maneras de hacerlo:

$$V_1 \to V_2 \to V_5, \tag{2}$$

y

$$V_1 \to V_4 \to V_2 \to V_5. \tag{3}$$

Una ruta de un vértice a otro se llama *trayectoria* o *cadena*. La trayectoria de V_1 a V_5 en (2) se llama *cadena de 2* (aristas), porque se recorren dos aristas. La trayectoria en (3) se denomina *cadena de 3*. En general, una trayectoria que recorre n aristas (y por lo tanto que pasa por $n + 1$ vértices) se llama *cade-*

na de n. Volviendo ahora a nuestro grafo, se ve que también se puede ir de V_1 a V_5 a través de la siguiente cadena de 5:

$$V_1 \to V_4 \to V_3 \to V_4 \to V_2 \to V_5. \tag{4}$$

Sin embargo, no sería muy inteligente hacerlo, porque en parte de esa trayectoria no se avanza. Una trayectoria en la que algún vértice se visita más de una vez se llama **redundante.** La cadena de 5 (4) es redundante porque el vértice 4 se visita dos veces.

Es muy interesante poder determinar la trayectoria más corta (si existe) que une dos vértices en un grafo dirigido. Existe un teorema que muestra cómo se puede hacer esto, pero primero haremos una observación interesante. Como hemos visto, la representación matricial del grafo del Ejemplo 1 está dada por:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculando queda

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Veamos más de cerca los componentes de A^2. Por ejemplo, el 1 en la posición 2, 4 es el producto escalar del segundo renglón de A por la cuarta columna de A:

$$(1\,0\,0\,0\,1)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$$

En el segundo renglón, el último 1 representa el enlace

$$V_2 \to V_5.$$

En la cuarta columna, el último 1 representa el enlace

$$V_5 \to V_4.$$

El producto de estos unos representa la cadena de 2:

$$V_2 \to V_5 \to V_4.$$

De manera semejante, el 2 en la posición 5, 2 de A^2 es el producto escalar del quinto renglón por la segunda columna de A:

$$(1\ 0\ 0\ 1\ 0)\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix} = 2\,.$$

Razonando de la misma manera, puede verse que esto indica las dos cadenas de 2:

$$V_5 \to V_1 \to V_2$$

y

$$V_5 \to V_4 \to V_2.$$

De hecho, generalizando estos hechos, se puede demostrar el siguiente resultado:

Teorema 1 Si A es la matriz de incidencia de un grafo dirigido, entonces la ij-ésima componente de A^2 representa el número de cadenas de 2 del vértice i al vértice j.

Razonando de igual manera, se puede demostrar que el número de cadenas de 3 que unen el vértice i al vértice j es la ij-ésima componente de A^3. En el Ejemplo 1:

$$A^3 = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 1 & 0\\1 & 2 & 1 & 0 & 1\\1 & 0 & 0 & 1 & 1\\1 & 2 & 1 & 1 & 0\\2 & 0 & 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

Por ejemplo, las dos cadenas de 3, del vértice 4 al vértice 2 son:

$$V_4 \to V_3 \to V_4 \to V_2$$

y

$$V_4 \to V_2 \to V_1 \to V_2$$

Ambas son redundantes. Las dos cadenas de 3, del vértice 5 al vértice 1 son:

$$V_5 \to V_4 \to V_2 \to V_1$$

y

$$V_5 \to V_1 \to V_2 \to V_1.$$

El teorema que sigue contesta la pregunta planteada antes sobre la búsqueda de una cadena mínima que una dos vértices. No se dará la demostración, pero partiendo de lo discutido antes, debe quedar razonablemente claro que se verifica el resultado.

Teorema 2 Sea A una matriz de incidencia de un grafo dirigido. Y sea también $a_{ij}^{(n)}$ la ij-ésima componente de A^n.

(a) Si $a_{ij}^{(n)} = k$, entonces hay exactamente k cadenas de n, del vértice i al vértice j.

Además,

(b) si $a_{ij}^{(m)} = 0$ para $m < n$, entonces la cadena más corta desde el vértice i al vértice j es una cadena de n.

Ejemplo 6 En el Ejemplo 1:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \text{ y } A^5 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Como $a_{13}^{(1)} = a_{13}^{(2)} = a_{13}^{(3)} = 0$ y $a_{13}^{(4)} = 1$, se ve que la trayectoria más corta desde el vértice 1 hasta el vértice 3 es una cadena de 4. Está dada por:

$$V_1 \to V_2 \to V_5 \to V_4 \to V_3.$$

Nótese también que hay cinco cadenas de 5 (todas ellas redundantes) que unen el vértice 2 consigo mismo.

Ejemplo 7 En nuestro ejemplo de sociología (Ejemplo 5) una cadena (que no es una arista) representa control indirecto de una persona sobre otra. Es decir, si Pedro domina a Pablo, que a su vez domina a María, puede verse que Pedro ejerce algún control (aunque indirecto) sobre María. Para determinar quién tiene control directo y/o indirecto sobre quién, basta calcular potencias de la matriz de incidencia A.

Se tiene así que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Del grafo se concluye, igual que de las matrices, que la persona P_2 tiene control directo o indirecto sobre otra persona. La primera tiene un control directo sobre P_4 y P_5, control de segundo orden sobre P_1 y P_3, y control de tercer orden sobre P_6.

Nota. En situaciones reales, las cosas se complican mucho más. Puede haber cientos de estaciones en una red de comunicaciones o cientos de individuos en un estudio sociológico de dominantes y pasivos. En estos casos, es esencial el uso de las matrices para poder manejar la enorme cantidad de datos que se debe analizar.

Antes de terminar este capítulo, mencionaremos brevemente un concepto de gran importancia en la teoría de grafos. Se dice que un grafo dirigido es **fuertemente conexo** si se puede llegar a cualquier vértice desde cualquier otro vértice. La gráfica del Ejemplo 1 es fuertemente conexa porque, como se vio en el Ejemplo 6, A^5 tiene sólo un cero. Así que es posible ir de un vértice a cualquier otro medio de una cadena de 5, con la única excepción de $V_1 \to V_2$. Pero hay una arista de V_1 a V_2. Es fácil ver que la gráfica del Ejemplo 5 no es fuertemente conexa.

El concepto de conexidad fuerte en un grafo es bastante importante en la teoría de matrices. Una discusión interesante de la conexión entre grafos fuertemente conexos y matrices irreducibles se realiza en el libro *Matrix Iterative Analysis*, de Richard Varga (Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, Nueva Jersey, 1962).

Problemas • Capítulo 7

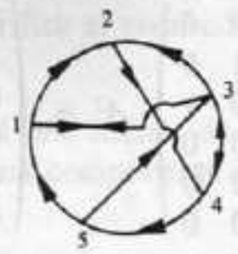
En los Problemas del 1-4, encuéntrense las matrices que representan los grafos dados.

1.

Figura 7 (Cap. 7)

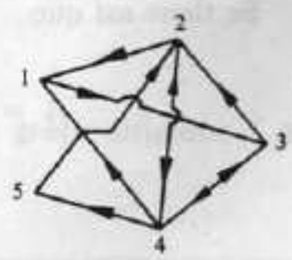
2.

Figura 8 (Cap. 7)



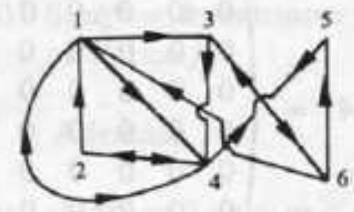
3.

Figura 9 (Cap. 7)



4.

Figura 10 (Cap. 7)



En los Problemas 5-7 dibújense los grafos representados por las matrices dadas.

5. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

8. Determínese el número de cadenas de 2, cadenas de 3 y cadenas de 4 que conectan los vértices del grafo del Problema 2.

9. Hágase lo mismo para el grafo del Problema 3.

10. Determínense cuáles de los grafos en los Problemas 1-7 son fuertemente conexos.

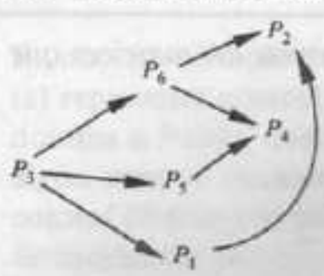
11. En cierta comunidad, ciertas parejas de personas están relacionadas por la sangre. Explíquese por qué debe ser simétrica la matriz que representa un grafo que muestra las relaciones.

12. Demuéstrese que no es redundante la trayectoria más corta que une dos vértices en un grafo dirigido.

13. Si A es la matriz de incidencia de un grafo dirigido, muéstrese que $A + A^2$ representa el número total de enlaces de uno y de dos pasos entre los vértices.

14. Describa la dominancia directa e indirecta expresada por el grafo siguiente:

Figura 11 (Cap. 7)



CAPÍTULO 8

Análisis de insumo y producción (o de entradas y salidas)

La macroeconomía es una rama de la economía que trata de los aspectos amplios y generales de un sistema económico, por ejemplo, en las relaciones entre los ingresos, las inversiones y los gastos de un país en su totalidad. Se han desarrollado muchas técnicas para tratar estos problemas en la macroeconomía. Discutiremos uno de los más importantes de tales métodos en esta sección.

Para introducir nuestro modelo suponemos que el Congreso de Estados Unidos aprobó una gran disminución en los gastos para construcción de carreteras. Si no se diera además un aumento en otras inversiones, se esperaría una disminución en los ingresos y en el empleo. Por otra parte, supóngase que el gobierno aumentara sus gastos militares en una cantidad equivalente a la disminución en la construcción de carreteras. ¿Cuál sería el cambio, si ocurriera alguno, en los ingresos y el empleo?

La respuesta es compleja por el hecho de que la construcción de carreteras y los proyectos militares usan el dinero de maneras distintas. Entonces, aunque podría darse un aumento en los ingresos y en el nivel de ocupación entre los trabajadores de industrias como las fabricantes de aviones y barcos, éso podría no compensar las pérdidas y el desempleo en tal industria constructora (al menos a corto plazo). El problema radica en que en la economía de Estados Unidos se producen muchos bienes y servicios altamente relacionados entre sí. Los aumentos o recortes en una industria se resienten frecuentemente también en otras industrias.

Un modelo para analizar estos efectos fue desarrollado por el economista estadunidense Wassily W. Leontief en 1936.* Tal modelo (o procedimiento)

* Este modelo fue presentado en el artículo precursor de Leontief "Qualitative Input and Output Relations in the Economic System of the United States", *Review of Economic Statistics* 18(1936):105-125. Una versión actualizada del modelo aparece en el libro de Leontief *Input-Output Analysis* (Nueva York: Oxford University Press, 1966). Leontief ganó el premio Nobel de economía en 1973 por su desarrollo del análisis de (de insumo y producción (o de entradas y salidas)).

se llama **análisis de entradas y salidas(o de insumo y producción)**. Antes de describir en detalle este modelo, presentamos un ejemplo sencillo.

Ejemplo 1 Considérese un modelo muy simplificado de una economía en la que se producen dos artículos: automóviles (incluyendo camiones) y acero. Cada año se da una **demanda externa** de 360,000 toneladas de acero y de 110,000 automóviles. Aquí la palabra *externa* significa que la demanda proviene de fuera de la economía. Por ejemplo, si fuera un modelo de una porción de la economía de Estados Unidos, la demanda podría venir de otros países (de tal manera que el acero y los automóviles se exportarían), de otras industrias en Estados Unidos, y de empresas privadas.

Pero la demanda externa no es la única que se da en las dos industrias consideradas. Se requiere acero para producir automóviles. También se requieren automóviles para producir automóviles, porque las plantas manufactureras de esos vehículos requieren autos y camiones para transportar los materiales y los empleados. De igual manera, la industria del acero requiere acero (para su maquinaria) y automóviles (para el transporte del producto y de los trabajadores) en su operación. Así que cada una de las dos industrias en el sistema impone demandas a sí misma y a la otra industria. Estas acciones se llaman **demandas internas.**

En nuestro modelo simplificado, se puede suponer que la industria del acero requiere 1/4 de tonelada de acero y 1/12 de automóvil (o camión) para producir 1 tonelada de acero (es decir, se usa un automóvil o camión en la producción de 12 toneladas de acero). También la industria automotriz requiere de 1/2 tonelada de acero y 1/9 de vehículo para producir un automóvil. La pregunta planteada por el modelo de Leontief de entradas y salidas es entonces: ¿Cuántas toneladas de acero y cuántos automóviles se deben producir cada año para que la disponibilidad de cada uno sea igual a la demanda total?

Solución Sean x y y el número total de toneladas de acero y el número de automóviles, respectivamente, en cierto año. Esto constituye la oferta (o lo disponible). Si, por ejemplo, se requiere 1/4 de tonelada de acero para producir una tonelada de este metal, se necesita entonces $1/4x$ toneladas de acero para producir x toneladas de acero. Similarmente, se requiere $1/2y$ toneladas de acero para producir y automóviles. Entonces, el total de la demanda interna en la industria productora del acero es de $1/4x + 1/2y$, y la demanda total (sumando la demanda externa) es de $1/4x + 1/2y + 360{,}000$. De manera semejante, la demanda total en la industria automotriz es de $1/12x + 1/9y + 110{,}000$. Igualando la oferta con la demanda, se obtiene el sistema

$$\begin{aligned} x &= \tfrac{1}{4}x + \tfrac{1}{2}y + 360{,}000 \\ y &= \tfrac{1}{12}x + \tfrac{1}{9}y + 110{,}000. \end{aligned} \qquad (1)$$

Como $x - 1/4x = 3/4x$ y $y - 1/9y = 8/9y$, se puede escribir el sistema (1) de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} \tfrac{3}{4}x - \tfrac{1}{2}y &= 360{,}000 \\ -\tfrac{1}{12}x + \tfrac{8}{9}y &= 110{,}000. \end{aligned} \qquad (2)$$

Resolveremos el sistema (2) por reducción de renglones.

$$\left(\begin{array}{cc|c} \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & 360{,}000 \\ -\frac{1}{12} & \frac{8}{9} & 110{,}000 \end{array}\right) \xrightarrow{M_1(\frac{4}{3})} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{2}{3} & 480{,}000 \\ -\frac{1}{12} & \frac{8}{9} & 110{,}000 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{A_{1,2}(\frac{1}{12})} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{2}{3} & 480{,}000 \\ 0 & \frac{5}{6} & 150{,}000 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{M_2(\frac{6}{5})} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{2}{3} & 480{,}000 \\ 0 & 1 & 180{,}000 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{A_{2,1}(\frac{2}{3})} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 600{,}000 \\ 0 & 1 & 180{,}000 \end{array}\right).$$

Entonces, para que la oferta sea exactamente igual a la demanda, se deben producir 600,000 toneladas de acero y 180,000 automóviles (o camiones).

Ahora describimos el modelo general de Leontief de insumo y producción. Supóngase que un sistema económico tiene n industrias. Otra vez, hay dos clases de demandas en cada industria. Primero está la demanda *externa* de fuera del sistema. Si el sistema es un país, por ejemplo, la demanda externa podría ser de otro país. En segundo lugar está la demanda de una industria sobre otra, dentro del mismo sistema. Como se planteó, en Estados Unidos se da una demanda en la producción de acero por por parte de la industria automotriz.

Sea e_i la demanda externa sobre la industria i. Sea a_{ij} la demanda interna sobre la industria i por la industria j. Más precisamente, a_{ij} representa el número de unidades de producto de la industria i necesarias para producir 1 unidad de producto de la industria j. Sea x_i la producción de la industria i. Ahora suponemos que la producción de cada industria es igual a su demanda (es decir, no hay sobreproducción). La demanda total es igual a la suma de las demandas interna y externa. Para calcular la demanda interna en la industria 2, por ejemplo, notamos que $a_{21}x_1$ es la demanda sobre la industria 2 por parte de la industria 1. Así, el total de la demanda interna sobre la industria 2 es $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n$.

Así llegamos al siguiente sistema de ecuaciones que se obtiene al igualar la demanda total con la producción de cada industria.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + e_1 &= x_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + e_2 &= x_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad \vdots \quad &\ \ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + e_n &= x_n \end{aligned} \tag{3}$$

O, escribiendo (3) de otra manera,

$$(1 - a_{11})x_1 - \quad a_{12}x_2 - \cdots - \quad a_{1n}x_n = e_1$$

$$
\begin{array}{rcl}
-a_{21}x_1 + (1-a_{22})x_2 - \cdots - \phantom{(1-a_{nn})}a_{2n}x_n &=& e_2 \\
\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots && \vdots \\
-a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \cdots + (1-a_{nn})x_n &=& e_n.
\end{array} \tag{4}
$$

El sistema (4) de n ecuaciones en n incógnitas es muy importante en el análisis económico.

Muchas veces conviene escribir los números a_{ij} en una matriz A, llamada **matriz de tecnología.** Se tiene así

$$
A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{5}
$$

Nótese que la matriz de tecnología es una matriz cuadrada.

Ejemplo 2 Supóngase que en un sistema económico con tres industrias las demandas externas son, respectivamente, de 10, 25 y 20. Considérese que $a_{11} = 0.2$, $a_{12} = 0.5$, $a_{13} = 0.15$, $a_{21} = 0.4$, $a_{22} = 0.1$, $a_{23} = 0.3$, $a_{31} = 0.25$, $a_{32} = 0.5$ y $a_{33} = 0.15$ Encontrar la producción en cada industria para equilibrar con exactitud la oferta con la demanda.

Solución En este caso, $n = 3$, $1 - a_{11} = 0.8$, $1 - a_{22} = 0.9$ y $1 - a_{33} = 0.85$. Así que el sistema (4) es el siguiente:

$$
\begin{aligned}
0.8x_1 - 0.5x_2 - 0.15x_3 &= 10 \\
-0.4x_1 + 0.9x_2 - 0.3x_3 &= 25 \\
-0.25x_1 - 0.5x_2 + 0.85x_3 &= 20
\end{aligned}
$$

Resolviendo este sistema mediante una calculadora, se obtiene, sucesivamente (haciendo uso de aproximación de cinco cifras significativas y el método de eliminación de Gauss-Jordan)

$$
\underline{\left(\begin{array}{ccc|c} 0.8 & -0.5 & -0.15 & 10 \\ -0.4 & 0.9 & -0.3 & 25 \\ -0.25 & -0.5 & 0.85 & 20 \end{array}\right)}
$$

Ésta es la matriz de tecnología

$$
\xrightarrow{M_1(\frac{1}{0.8})} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -0.625 & -0.1875 & 12.5 \\ -0.4 & 0.9 & -0.3 & 25 \\ -0.25 & -0.5 & 0.85 & 20 \end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow[A_{1,3}(0.25)]{A_{1,2}(0.4)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -0.625 & -0.1875 & 12.5 \\ 0 & 0.65 & -0.375 & 30 \\ 0 & -0.65625 & 0.80313 & 23.125 \end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{M_2(\frac{1}{0.65})}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -0.625 & -0.1875 & 12.5 \\ 0 & 1 & -0.57692 & 46.15385 \\ 0 & -0.65625 & 0.80313 & 23.125 \end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow[A_{2,3}(0.65625)]{A_{2,1}(0.625)}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -0.54808 & 41.34616 \\ 0 & 1 & -0.57692 & 46.15385 \\ 0 & 0 & 0.42453 & 53.41346 \end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{M_3(1/0.42453)}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -0.54808 & 41.34616 \\ 0 & 1 & -0.57692 & 46.15385 \\ 0 & 0 & 1 & 125.81787 \end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow[A_{3,2}(0.57692)]{A_{3,1}(0.54808)}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 110.30442 \\ 0 & 1 & 0 & 118.74070 \\ 0 & 0 & 1 & 125.81787 \end{array}\right)
$$

Se concluye que las producciones requeridas para igualar la disponibilidad con la demanda son, aproximadamente, $x_1 = 110$, $x_2 = 119$ y $x_3 = 126$.

Si $A = (a_{ij})$ es la matriz de tecnología, entonces

$$
I - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} 1 - a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & 1 - a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & 1 - a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{6}
$$

y el sistema (4) se puede escribir

$$
(I - A)\mathbf{x} = \mathbf{e}, \tag{7}
$$

donde $\mathbf{e} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}$. La matriz $I - A$ en este modelo se llama **matriz de Leontief.**

Suponiendo que dicha matriz de Leontief es inversible, el vector de producción $\mathbf{x}$ puede expresarse como

$$
\mathbf{x} = (I - A)^{-1}\mathbf{e} \tag{8}
$$

Hay una ventaja en escribir el vector de producción en la forma (8). La matriz de tecnología A es la matriz de las demandas internas, que —en periodos relativamente largos— permanecen fijas. Sin embargo, el vector $\mathbf{e}$ de la demanda externa puede cambiar con cierta frecuencia. Ordinariamente se requieren muchos cálculos para obtener $(I - A)^{-1}$. Pero una vez calculada esta matriz, se puede encontrar el vector de producción $\mathbf{x}$ correspondiente a cualquier vector $\mathbf{e}$ de demanda por una simple multiplicación de matrices. Si no se determina $(I - A)^{-1}$, se tendría que resolver el problema por eliminación de Gauss-Jordan cada vez que cambiara el vector $\mathbf{e}$.

Ejemplo 3 En un sistema económico con tres industrias, supóngase que la matriz A de tecnología está dada por

$$A = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.5 & 0.15 \\ 0.4 & 0.1 & 0.3 \\ 0.25 & 0.5 & 0.15 \end{pmatrix}$$

Encontrar la producción total correspondiente a cada uno de los siguientes vectores de demanda.

$$\text{(a)}\quad \mathbf{e} = \begin{pmatrix} 10 \\ 25 \\ 20 \end{pmatrix} \qquad \text{(b)}\quad \mathbf{e} = \begin{pmatrix} 15 \\ 20 \\ 40 \end{pmatrix} \qquad \text{(c)}\quad \mathbf{e} = \begin{pmatrix} 30 \\ 100 \\ 50 \end{pmatrix}$$

Solución La matriz de Leontief es

$$I - A = \begin{pmatrix} 0.8 & -0.5 & -0.15 \\ -0.4 & 0.9 & -0.3 \\ -0.25 & -0.5 & 0.85 \end{pmatrix}$$

La parte (a) se resolvió por eliminación de Gauss-Jordan en el Ejemplo 2. Ahora resolveremos los tres problemas esencialmente al mismo tiempo evaluando $(I - A)^{-1}$. Como en el Ejemplo 2, se hacen los cálculos conservando cinco cifras decimales (a la derecha del punto decimal).

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0.8 & -0.5 & -0.15 & 1 & 0 & 0 \\ -0.4 & 0.9 & 0.3 & 0 & 1 & 0 \\ 0.25 & -0.5 & 0.85 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{M_1(\frac{1}{0.8})} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -0.625 & -0.1875 & 1.25 & 0 & 0 \\ -0.4 & 0.9 & -0.3 & 0 & 1 & 0 \\ -0.25 & -0.5 & 0.85 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[A_{1,3}(0.25)]{A_{1,2}(0.4)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -0.625 & -0.1875 & 1.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0.65 & -0.375 & 0.5 & 1 & 0 \\ 0 & -0.65625 & 0.80313 & 0.3125 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{M_2\left(\frac{1}{0.65}\right)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -0.625 & -0.1875 & 1.25 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -0.57692 & 0.76923 & 1.53846 & 0 \\ 0 & -0.65625 & 0.80313 & 0.3125 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[A_{2,3}(0.65625)]{A_{2,1}(0.625)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -0.54808 & 1.73077 & 0.96154 & 0 \\ 0 & 1 & -0.57692 & 0.76923 & 1.53846 & 0 \\ 0 & 0 & 0.42453 & 0.81731 & 1.00961 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{M_3\left(\frac{1}{0.42453}\right)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -0.54808 & 1.73077 & 0.96154 & 0 \\ 0 & 1 & -0.57692 & 0.76923 & 1.53846 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1.92521 & 2.37818 & 2.35555 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[A_{3,2}(0.57692)]{A_{3,1}(0.54808)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2.78594 & 2.26497 & 1.29103 \\ 0 & 1 & 0 & 1.87992 & 2.91048 & 1.35896 \\ 0 & 0 & 1 & 1.92521 & 2.37818 & 2.35555 \end{array}\right)$$

Por lo tanto,

$$(I-A)^{-1} = \begin{pmatrix} 2.78594 & 2.26497 & 1.29103 \\ 1.87992 & 2.91048 & 1.35896 \\ 1.92521 & 2.37818 & 2.35555 \end{pmatrix}$$

¡Esto debe comprobarse!

$$\begin{pmatrix} 2.78594 & 2.26497 & 1.29103 \\ 1.87992 & 2.91048 & 1.35896 \\ 1.92521 & 2.37818 & 2.35555 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.8 & -0.5 & -0.15 \\ -0.4 & 0.9 & -0.3 \\ -0.25 & -0.5 & 0.85 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1.00001 & 0 & -0.00001 \\ 0 & 0.99999 & -0.00002 \\ 0.00001 & -0.00002 & 0.99998 \end{pmatrix}$$

Lo anterior verifica la corrección de la respuesta y manifiesta las inexactitudes pequeñas (en este caso) debidas a los errores de redondeo.

Ahora podremos resolver los problemas en cuestión:

(a) $$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.78594 & 2.26497 & 1.29103 \\ 1.87992 & 2.91048 & 1.35896 \\ 1.92521 & 2.37818 & 2.35555 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 25 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 110.30 \\ 118.74 \\ 125.82 \end{pmatrix}$$

de donde $x_1 \approx 110$, $x_2 \approx 119$, $x_3 \approx 126$. Esta es la respuesta obtenida en el Ejemplo 2.

(b) $$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.78594 & 2.26497 & 1.29103 \\ 1.87992 & 2.91048 & 1.35896 \\ 1.92521 & 2.37818 & 2.35555 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 \\ 20 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 138.73 \\ 140.77 \\ 170.66 \end{pmatrix}$$

Ahora $x_1 \approx 139$, $x_2 \approx 141$ y $x_3 \approx 171$.

(c) $$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.78594 & 2.26497 & 1.29103 \\ 1.87992 & 2.91048 & 1.35896 \\ 1.92521 & 2.37818 & 2.35555 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 30 \\ 100 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 374.63 \\ 415.39 \\ 413.35 \end{pmatrix}$$

Así que $x_1 \approx 375$, $x_2 \approx 415$ y $x_3 \approx 413$.

Obsérvese que todas estas respuestas se pueden verificar insertando los valores calculados x_1, x_2 y x_3 en la ecuación original, $(I - A)\mathbf{x} = \mathbf{e}$.

Observación. Requirió un poco más de trabajo en la parte (a) calcular $(I - A)^{-1}$ que el que se necesitó en el Ejemplo 2 para resolver el sistema por reducción de renglones. Sin embargo, cuando ya se tiene $(I - A)^{-1}$, se pudieron resolver (b) y (c) con muy poco trabajo adicional.

Ejemplo 4 Leontief usó su modelo para analizar la economía de Estados Unidos del año de 1958.* Este investigador dividió la economía en 81 sectores y los agrupó en seis familias de sectores relacionados. Por simplicidad, tratamos cada familia de sectores como un solo sector para poder analizar la economía estadunidense como una con seis industrias.

Tabla 1 (Cap. 8)

Sector	Ejemplos
Final no metálica (FN)	Muebles, alimentos procesados
Final metálica (FM)	aparatos domésticos, Vehículos automotores
Básica metálica (BM)	Productos de taller, minería
Básica no metálica (BN)	Agricultura, artes gráficas
Energía (E)	Petróleo, carbón
Servicios (S)	Diversiones, bienes raíces

Demandas Internas en la economía de EE.UU. en 1958

Tabla 2 (Cap. 8)

	FN	FM	BM	BN	E	S
FN	0.170	0.004	0	0.029	0	0.008
FM	0.003	0.295	0.018	0.002	0.004	0.016
BM	0.025	0.173	0.460	0.007	0.011	0.007
BN	0.348	0.037	0.021	0.403	0.011	0.048
E	0.007	0.001	0.039	0.025	0.358	0.025
S	0.120	0.074	0.104	0.123	0.173	0.234

* *Scientific American* (abril, 1965):26-27.

Estas industrias están enlistadas en la Tabla 1. La tabulación de entradas y salidas, Tabla 2, muestra las demandas internas en 1958 basadas en los datos de Leontief. Las unidades en la tabla son millones de dólares. Así, por ejemplo, el número 0.173 en la posición 6, 5 significa que para producir \$1 millón de energía, se necesita proporcionar \$0.173 millones = \$173,000 de servicios. De manera semejante, el 0.037 en la posición 4,2 quiere decir que para producir \$1 millón de productos finales metálicos, se necesita gastar \$0.037 millones = \$37,000 en productos básicos no metálicos. Por último, Leontief estimó las siguientes demandas sobre la economía de Estados Unidos de 1958 (en millones de dólares), según se muestra en la Tabla 3. Para poner en marcha la economía estadunidense en 1958 satisfaciendo todas las demandas externas, ¿cuántas unidades en cada sector se deben producir?

Tabla 3 (Cap. 8) *Demandas Externas sobre la Economía de E.U. en 1958 (millones de dólares)*

FN	\$99,640
FM	\$75,548
BM	\$14,444
BN	\$33,501
E	\$23,527
S	\$263,985

Solución La matriz de tecnología está dada por

$$A = \begin{pmatrix} 0.170 & 0.004 & 0 & 0.029 & 0 & 0.008 \\ 0.003 & 0.295 & 0.018 & 0.002 & 0.004 & 0.016 \\ 0.025 & 0.173 & 0.460 & 0.007 & 0.011 & 0.007 \\ 0.348 & 0.037 & 0.021 & 0.403 & 0.011 & 0.048 \\ 0.007 & 0.001 & 0.039 & 0.025 & 0.358 & 0.025 \\ 0.120 & 0.074 & 0.104 & 0.123 & 0.173 & 0.234 \end{pmatrix},$$

y así

$$\mathbf{e} = \begin{pmatrix} 99,640 \\ 75,548 \\ 14,444 \\ 33,501 \\ 23,527 \\ 263,985 \end{pmatrix}.$$

Para obtener la matriz de Leontief, restamos y entonces queda

$$I - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.170 & 0.004 & 0 & 0.029 & 0 & 0.008 \\ 0.003 & 0.295 & 0.018 & 0.002 & 0.004 & 0.016 \\ 0.025 & 0.173 & 0.460 & 0.007 & 0.011 & 0.007 \\ 0.348 & 0.037 & 0.021 & 0.403 & 0.011 & 0.048 \\ 0.007 & 0.001 & 0.039 & 0.025 & 0.358 & 0.025 \\ 0.120 & 0.074 & 0.104 & 0.123 & 0.173 & 0.234 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.830 & -0.004 & 0 & -0.029 & 0 & -0.008 \\ -0.003 & 0.705 & -0.018 & -0.002 & -0.004 & -0.016 \\ -0.025 & -0.173 & 0.540 & -0.007 & -0.011 & -0.007 \\ -0.348 & -0.037 & -0.021 & 0.597 & -0.011 & -0.048 \\ -0.007 & -0.001 & -0.039 & -0.025 & 0.642 & -0.025 \\ -0.120 & -0.074 & -0.104 & -0.123 & -0.173 & 0.766 \end{pmatrix}$$

Es muy tedioso el cálculo de la inversa de una matriz de 6×6. Usando tres decimales en una calculadora, se obtiene la siguiente matriz. Se omitieron los pasos intermedios.

$$(I - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1.234 & 0.014 & 0.006 & 0.064 & 0.007 & 0.018 \\ 0.017 & 1.436 & 0.057 & 0.012 & 0.020 & 0.032 \\ 0.071 & 0.465 & 1.877 & 0.019 & 0.045 & 0.031 \\ 0.751 & 0.134 & 0.100 & 1.740 & 0.066 & 0.124 \\ 0.060 & 0.045 & 0.130 & 0.082 & 1.578 & 0.059 \\ 0.339 & 0.236 & 0.307 & 0.312 & 0.376 & 1.349 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, el vector de producción "ideal" está dado por

$$\mathbf{x} = (I - A)^{-1}\mathbf{e} = \begin{pmatrix} 1.234 & 0.014 & 0.006 & 0.064 & 0.007 & 0.018 \\ 0.017 & 1.436 & 0.057 & 0.012 & 0.020 & 0.032 \\ 0.071 & 0.465 & 1.877 & 0.019 & 0.045 & 0.031 \\ 0.751 & 0.134 & 0.100 & 1.740 & 0.066 & 0.124 \\ 0.060 & 0.045 & 0.130 & 0.082 & 1.578 & 0.059 \\ 0.339 & 0.236 & 0.307 & 0.312 & 0.376 & 1.349 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 99{,}640 \\ 75{,}548 \\ 14{,}444 \\ 33{,}501 \\ 23{,}527 \\ 263{,}985 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 131{,}161 \\ 120{,}324 \\ 79{,}194 \\ 178{,}936 \\ 66{,}703 \\ 426{,}542 \end{pmatrix}$$

Esto quiere decir que se requerirían 131,161 unidades (con un valor de \$131,161 millones) de productos finales no metálicos; 120,324 unidades de productos finales metálicos; 79,194 unidades de productos metálicos básicos; 178,936 unidades de productos básicos no metálicos; 66,703 unidades de energía, y 426,542 unidades de servicio para mantener en marcha la economía de Estados Unidos. en 1958 y satisfacer las demandas externas.

Problemas • Capítulo 8

1. En el modelo de insumo y producción (o entradas y salidas) de Leontief, supóngase que hay tres industrias y además que $e_1 = 10$, $e_2 = 15$, $e_3 = 30$, $a_{11} = 1/3$, $a_{12} = 1/2$, $a_{13} = 1/6$, $a_{21} = 1/4$, $a_{22} = 1/4$, $a_{23} = 1/8$, $a_{31} = 1/12$, $a_{32} = 1/3$ y $a_{33} = 1/6$. Determine la producción de cada industria de manera que la disponibilidad u oferta iguale exactamente a la demanda.
2. Resuelva de nuevo el Problema 1 si $a_{11} = 0.1$, $a_{12} = 0$, $a_{13} = 0$, $a_{21} = 0.05$, $a_{22} = 0.01$, $a_{23} = 0.05$, $a_{31} = 0.1$, $a_{32} = 0.2$, $a_{33} = 0.1$, $e_1 = 10$, $e_2 = 25$, $e_3 = 15$.
3. Se pide consejo a un economista para asesorar a un país cuya economía consiste de tres industrias. Las demandas internas de estas tales industrias son $a_{11} = 0.2$, $a_{12} = 0.4$, $a_{13} = 0.2$, $a_{21} = 0.7$, $a_{22} = 0.3$, $a_{23} = 0.8$, $a_{31} = 0.3$, $a_{32} = 0.4$, $a_{33} = 0.1$. El economista se horroriza con estos datos y comenta que el país está en un serio problema económico. ¿Por qué llega a esa conclusión?
4. Encuéntrese el vector **x** de producción en el modelo de Leontief si $n = 3$, $\mathbf{e} = \begin{pmatrix} 30 \\ 20 \\ 40 \end{pmatrix}$ y además

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{10} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

5. Determine el vector de producción **x** para el Problema 4 si $\mathbf{e} = \begin{pmatrix} 10 \\ 40 \\ 15 \end{pmatrix}$.
6. Determine el vector **x** de producción para el Problema 4 si $\mathbf{e} = \begin{pmatrix} 35 \\ 100 \\ 60 \end{pmatrix}$.

★7. Considérese una economía muy simple de tres industrias, A, B y C, representadas por la tabla dada. Los datos son en millones de dólares de productos. Obtenga la matriz de tecnología y la matriz de Leontief correspondientes a este sistema de entradas y salidas.

Productor	**Consumidor**			**Demanda externa**	**Producción total**
	A	B	C		
A	90	150	225	75	540
B	135	150	300	15	600
C	270	200	300	130	900

[*Sugerencia*: Considérese el significado de los coeficientes a_{ij} en la matriz de tecnología A.]

8. En el Problema 7, supóngase que la demanda externa cambia a 50 para A, a 20 para B y a 60 para C. Calcúlese el nuevo vector de producción.

9. Resuelva de nuevo el Problema 8 si la demanda externa es de 80 para A, de 100 para B y de 120 para C.

★**10.** En una situación similar a la del Problema 7, la economía está representada en la tabla siguiente.

Productor	**Consumidor**			**Demanda externa**	**Producción total**
	A	B	C		
A	80	100	100	40	320
B	80	200	60	60	400
C	80	100	100	20	300

Determínese el vector de producción para la economía si la demanda externa cambia a 120 para A, a 40 para B y a 10 para C.

11. Resuelva otra vez el Problema 10 si la demanda externa cambia a 60 para A, a 60 para B y a 60 para C.

12. Una versión muy simplificada de la tabla de entradas y salidas para la economía de Israel en 1958 divide la economía en tres sectores —agricultura, manufacturas y energía— con el siguiente resultado.*

* Wassily Leontief, *Input-Output Economics* (Nueva York: Oxford University Press, 1966), 54-57.

	Agricultura	Manufactura	Energía
Agricultura	0.293	0	0
Manufactura	0.014	0.207	0.017
Energía	0.044	0.010	0.216

(a) ¿Cuántas unidades de producción agrícola se requieren para generar una unidad de producción agrícola?

(b) ¿Cuántas unidades de producción agrícola se requieren para generar 200,000 unidades de producción agrícola?

(c) ¿Cuántas unidades de producto agrícola intervienen en la producción de 50,000 unidades de energía?

(d) ¿Cuántas unidades de energía intervienen para generar 50,000 unidades de productos agrícolas?

13. Continuando con el Problema 12, las exportaciones (en miles de libras israelíes) en 1958 fueron

Agricultura	138,213
Manufacturas	17,597
Energía	1,786

(a) Obtenga y evalúe las matrices de tecnología y de Leontief.

(b) Determine el número de libras israelíes en productos agrícolas, productos manufacturados y en energía requeridos para activar este modelo de la economía israelí y exportar los valores indicados de productos.

14. La interdependencia entre la industria de vehículos de motor y otras industrias básicas en la economía de Estados Unidos de 1958 se describe por la siguiente tabla de entradas y salidas para vehículos automotores (V), acero (S), vidrio (G) y caucho (o hule) y plásticos (R).

	V	S	G	R
V	0.298	0.002	0	0
S	0.088	0.212	0	0.002
G	0.010	0	0.050	0.006
R	0.029	0.003	0.004	0.030

La demanda externa para estos productos (en millones de dólares) es

V	5444
S	3276
G	119
R	943

¿Cuántos millones de dólares de cada una de estas industrias se necesita para mantener activa la economía y satisfacer la demanda externa?

15. Un análisis de entradas y salidas en la economía británica de 1963* se muestra simplificado a continuación en términos de cuatro sectores: no metales (N), metales (M), energía (E) y servicios (S).

	N	M	E	S
N	0.184	0.101	0.355	0.059
M	0.062	0.199	0.075	0.031
E	0.029	0.023	0.150	0.015
S	0.104	0.112	0.075	0.076

Las demandas externas (en millones de libras) son

N	10,271
M	5,987
E	1,161
S	13,780

¿Cuántos millones de libras de producto de cada sector se requerirían para mantener activa la economía británica de 1963 y satisfacer la demanda externa?

* L.S. Berman, "Development of Input-Output Statistics", ed. W.F. Grossling, *Input-Output in the United Kingdom*, Proc. 1968 Manchester Conf. (Londres: Frank Cass, 1970):34-35.

CAPÍTULO **9**

Cadenas de Markov

9.1 Cadenas de Markov

En esta sección se discute una técnica matemática que se usa como modelo en una gran variedad de procesos en los negocios, así como en las ciencias sociales, biológicas y físicas. Dicho método, llamado **cadenas de Markov**, fue ideado por el matemático ruso A. A. Markov (1856-1922) en 1906. Inicialmente, se usaron las cadenas de Markov para analizar procesos en física y meteorología. Una de las primeras aplicaciones fue para predecir patrones de clima. Las aplicaciones más recientes incluyen el análisis de los movimientos de precios de bienes, el mantenimiento de maquinaria, el comportamiento de los animales en el laboratorio, la selección de productos por el consumidor, la longitud de las colas en un supermercado o un aeropuerto, en el manejo de inventarios en cuanto a nivel y variedad, y en administración de plantas.

Antes de empezar nuestra discusión de las cadenas de Markov, necesitamos desarrollar más nuestra discusión de probabilidades del Capítulo 2.

Probabilidad condicional Sea E un evento (resultado de un experimento) con $P(E) > 0$. Entonces la **probabilidad condicional** de un evento A dado que E ocurrió se denota por $P(A|E)$ y se expresa por

$$P(A|E) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)}. \tag{1}$$

Ejemplo 1 Dos dados normales se lanzan (con números 1 a 6). ¿Cuál es la probabilidad de que

(a) la suma de las tiradas sea 7?

(b) la suma sea 7 dado que en al menos uno de los dados salió un 2?

Solución (a) Hay 36 posibilidades [(1,1), (1,2), . . . , (1,6), (2,1), . . . , (2,6), . . . , (6,1), (6,2), . . . , (6,6)]. De éstas, seis dan una suma de 7: (1,6), (6,1), (2,5), (5,2), (3,4), (4,3). Así que

$$P(7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

(b) Se nos informa que hay al menos un 2. Por lo tanto, los únicos posibles resultados son (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (1,2), (3,2), (4,2), (5,2) y (6,2). De estos resultados equiprobables, sólo dos dan una suma de 7: (2,5) y (5,2). Por lo tanto

$$P(7|\text{ al menos un } 2) = \frac{2}{11}.$$

Podemos llegar a esta respuesta usando la fórmula de probabilidad condicional.

$$P(7|\text{ al menos un } 2) = \frac{P(7 \text{ y al menos un } 2)}{P(\text{al menos un } 2)}$$

$$= \frac{2/36}{11/36} = \frac{2}{11}.$$

Nota. El evento 7 y al menos un 2 ocurre de dos maneras: (2,5) y (5,2), por lo que su probabilidad es de 2/36.

Los resultados del último ejemplo se pueden representar usando un **diagrama de árbol**. Esto se hace en la Figura 1. De hecho, siempre que tengamos un experimento de dos (o más) partes, se pueden representar las distintas probabilidades en un diagrama de árbol. Vamos a usar los diagramas de árbol para ilustrar la teoría de las cadenas de Markov.

Antes de dar definiciones generales, empezamos con un ejemplo.

Ejemplo 2 La empresa de abastos Gourmet tiene el 40% del negocio de abastos en una ciudad de tamaño medio. Su único competidor, Distribuciones Finas y Servicios (DFS) tiene el otro 60%. Para aumentar su competitividad, Gourmet contrata a una empresa de publicidad para mejorar su imagen. Durante una extensa campaña de publicidad, se recogen los datos de ventas mensuales. Se encuentra que el 90% de los clientes de Gourmet regresan a Gourmet el mes siguiente, mientras que el 20% de los clientes de DFS se cambian a Gourmet.

(a) ¿Qué porcentaje de los clientes usa cada servicio después de un mes?

(b) ¿Qué porcentaje usa cada servicio después de 2 meses?

(c) ¿A la larga cómo se reparte el mercado entre las dos empresas?

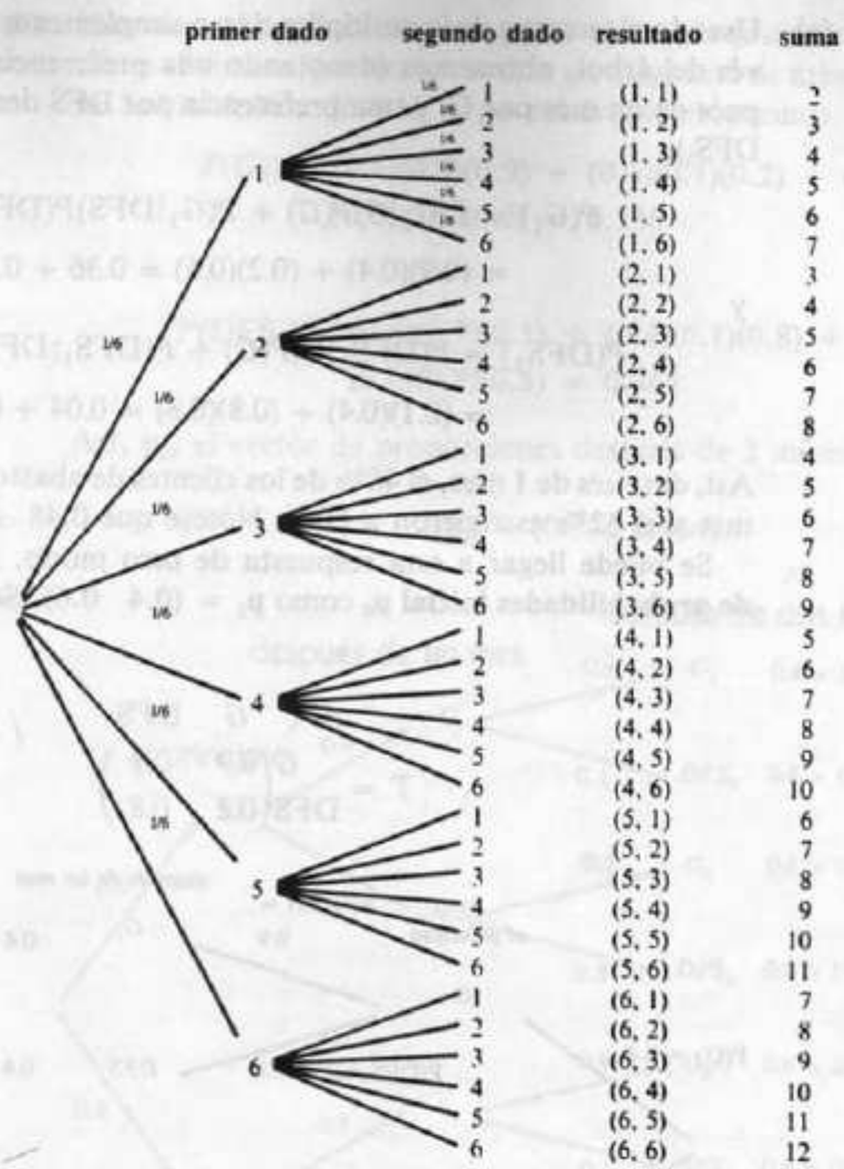


Figura 1
(Secc. 9.1)

Solución Resolveremos este problema en varios pasos. Primero, introducimos algo de terminología. En el lenguaje de las cadenas de Markov, el mercado de abastos en nuestra ciudad es un **sistema** en el que hay dos **estados**: Gourmet y DFS. Un cliente de abastos está en el estado Gourmet si usa los servicios de Gourmet. En el caso contrario, está en el estado DFS. Las probabilidades de cambiarse de un estado a otro se llaman **probabilidades de transición**. En nuestro problema, indicamos las probabilidades de transición en la Figura 2. Las cuatro probabilidades en las ramas de la derecha del árbol son todas probabilidades condicionales. Escribiéndolas, tenemos

$$P(\text{Gourmet}|\text{Gourmet}) = 0.9$$
$$P(\text{DFS}|\text{Gourmet}) = 0.1$$
$$P(\text{Gourmet}|\text{DFS}) = 0.2$$
$$P(\text{DFS}|\text{DFS}) = 0.8$$

(a) **Usando el teorema de la multiplicación o simplemente multiplicando a través del árbol, obtenemos (denotando una preferencia por Gourmet después de un mes por G_1 y una preferencia por DFS después de un mes por DFS_1),**

$$P(G_1) = P(G_1|G)P(G) + P(G_1|\text{DFS})P(\text{DFS})$$
$$= (0.9)(0.4) + (0.2)(0.6) = 0.36 + 0.12 = 0.48$$

y

$$P(\text{DFS}_1) = P(\text{DFS}_1|G)P(G) + P(\text{DFS}_1|\text{DFS})P(\text{DFS})$$
$$= (0.1)(0.4) + (0.8)(0.6) = 0.04 + 0.48 = 0.52$$

Así, después de 1 mes, el 48% de los clientes de abasto escogieron a Gourmet y el 52% escogieron a DFS. Nótese que $0.48 + 0.52 = 1$.

Se puede llegar a esta respuesta de otro modo. Definimos el **vector de probabilidades inicial $\mathbf{p}_0$** como $\mathbf{p}_0 = (0.4 \quad 0.6)$. Se define la **matriz de**

$$T = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} G & \text{DFS} \end{array} \\ \begin{array}{c} G \\ \text{DFS} \end{array} & \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix} \end{array}$$

(De \ A)

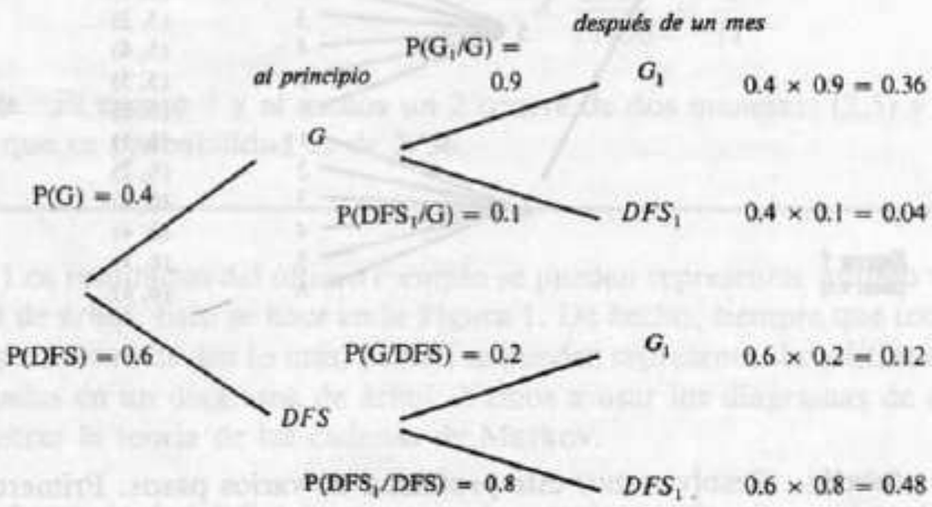


Figura 2 (Sec. 9.1)

La matriz de transición muestra las probabilidades de pasar de un estado a otro durante el experimento. Así, por ejemplo, la componente 1,2 de T es la probabilidad de pasar del estado 1 (Gourmet) al estado 2 (DFS) en un mes.

Ahora, observamos que

$$\mathbf{p}_0 T = (0.4 \quad 0.6)\begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix} = (0.48 \quad 0.52) = \mathbf{p}_1,$$

el vector de probabilidades de las proporciones después de un mes. El lector debe poder explicar por qué el producto $\mathbf{p}_0 T$ produce el mismo resultado que las multiplicaciones en el diagrama de árbol.

(b) Hay dos maneras de obtener $\mathbf{p}_2$, el vector de proporciones después de 2 meses. Primero, podemos dibujar un diagrama de árbol como en la Figura 3. Multiplicando a lo largo del árbol, obtenemos

$$P(G_2) = (0.4)(0.9)(0.9) + (0.4)(0.1)(0.2) + (0.6)(0.2)(0.9) + (0.6)(0.8)(0.2) = 0.536$$

y

$$P(\mathrm{DFS}_2) = (0.4)(0.9)(0.1) + (0.4)(0.1)(0.8) + (0.6)(0.2)(0.1) + (0.6)(0.8)(0.8) = 0.464.$$

Así, $\mathbf{p}_2$, el vector de proporciones después de 2 meses, está dado por

$$\mathbf{p}_2 = (0.536\ \ 0.464).$$

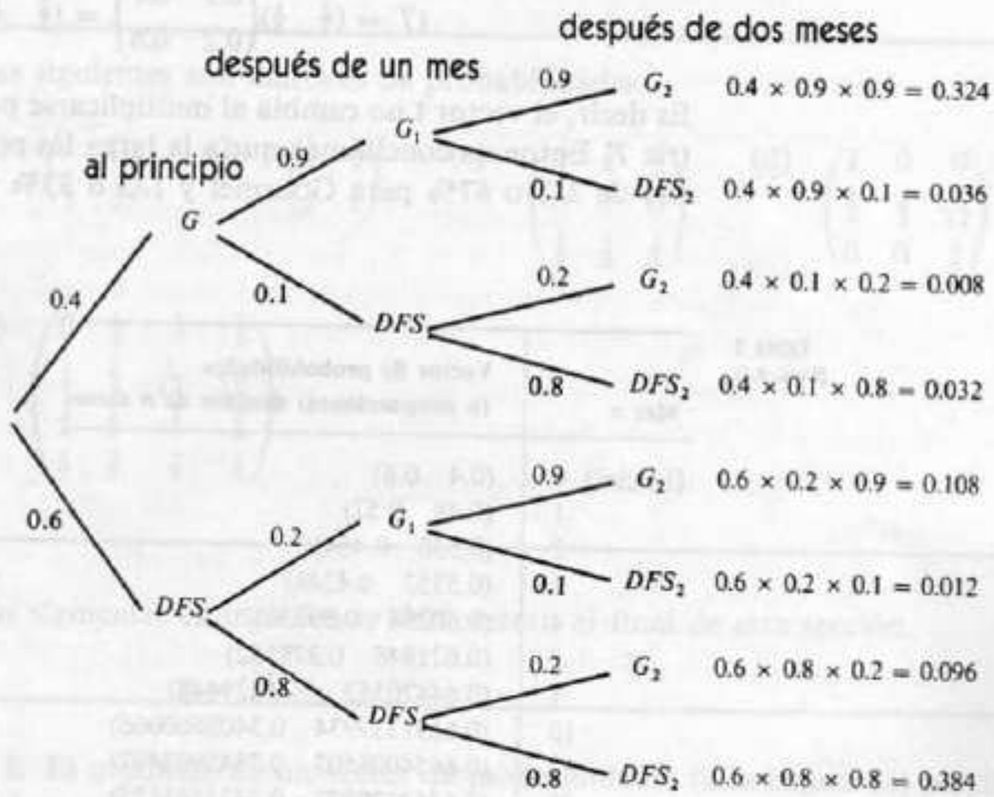


Figura 3
(Secc. 9.1)

Nótese que $0.536 + 0.464 = 1$. De otra manera, razonando como en la parte (a), se encuentra que

$$\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1 T = (0.48\quad 0.52)\begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix} = (0.536\quad 0.464).$$

(c) De las partes (a) y (b) concluimos que

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_0\, T$$
$$\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1\, T = (\mathbf{p}_0\, T)T = \mathbf{p}_0\, T^2$$

$$\mathbf{p}_3 = \mathbf{p}_2 T = (\mathbf{p}_0 T^2)T = \mathbf{p}_0 T^3$$
$$\mathbf{p}_4 = \mathbf{p}_3 T = \mathbf{p}_0 T^4$$

y así sucesivamente. Por ejemplo,

$$\mathbf{p}_3 = \mathbf{p}_2 T = (0.536 \quad 0.464)\begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix} = (0.5752 \quad 0.4248)$$

Continuando los cálculos en una calculadora programable, obtenemos los resultados de la Tabla 1. Se ve que al aumentar n (el número de meses), las proporciones tienden a un **vector fijo de probabilidades**

$$\mathbf{t} = (0.6666\ldots \quad 0.3333\ldots) = (\tfrac{2}{3} \quad \tfrac{1}{3}).$$

Este se llama **vector fijo** para la matriz de probabilidades T ya que

$$\mathbf{t}T = (\tfrac{2}{3} \quad \tfrac{1}{3})\begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix} = (\tfrac{2}{3} \quad \tfrac{1}{3}) = \mathbf{t}.$$

Es decir, el vector $\mathbf{t}$ no cambia al multiplicarse por la derecha por la matriz T. Entonces concluimos que a la larga las proporciones del mercado son de 2/3 o 67% para Gourmet y 1/3 o 33% para DFS.

Tabla 1 (Secc. 9.1)

Mes n	Vector de probabilidades (o proporciones) después de n meses
(Inicial) 0	(0.4 0.6)
1	(0.48 0.52)
2	(0.536 0.464)
3	(0.5752 0.4248)
4	(0.60264 0.39736)
5	(0.621848 0.378152)
7	(0.64470552 0.35529448)
10	(0.6591339934 0.3408660066)
15	(0.6654006503 0.3345993497)
20	(0.6664538873 0.3335461127)
25	(0.6666309048 0.3333690952)
30	(0.6666606562 0.3333393438)
40	(0.6666664969 0.3333335031)

Antes de dar otros ejemplos, discutiremos algunas propiedades generales de una cadena de Markov.

Vector de probabilidades El vector renglón de n componentes $\mathbf{p} = (p_1\, p_2\, \ldots\, p_n)$ es un **vector de probabilidades** si todas sus componentes son no negativas y la suma de sus componentes es 1:

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1.$$

Ejemplo 3 Los siguientes son vectores de probabilidades.

(a) $\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{12} & \frac{5}{12} \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ (f) $\begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{5} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{4}{15} \end{pmatrix}$

Matriz de probabilidades La matriz $n \times n$ designada por $P = (p_{ij})$ es una **matriz de probabilidades** si cada uno de sus renglones es un vector de probabilidades. Esto significa que todas sus componentes son no negativas y la suma de sus componentes en cada renglón es 1.

Ejemplo 4 Las siguientes son matrices de probabilidades.

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{5}{12} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{12} & \frac{5}{12} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{7} & \frac{3}{7} & \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$

Los siguientes enunciados se demuestran al final de esta sección.

Teorema 1

1. El producto de un vector de probabilidades (a la izquierda) por una matriz de probabilidades (a la derecha) es un vector de probabilidades.
2. El producto de dos matrices de probabilidades es una matriz de probabilidades.

Ejemplo 5 Sea $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$ y $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$. Verificar que $\mathbf{p}P$ es un vector de probabilidades.

Solución

$$\mathbf{p}P = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{32} & \frac{21}{32} & \frac{3}{16} \end{pmatrix}$$

es un vector de probabilidades ya que $5/32 + 21/32 + 3/16 = 1$. Esto ilustra el Enunciado 1.

Ejemplo 6 Sea $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ y $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{5}{12} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Verifíquese que PQ es una matriz de probabilidades.

Solución

$$PQ = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{5}{12} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{16} & \frac{1}{12} & \frac{29}{48} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{5}{12} \\ \frac{5}{12} & \frac{1}{9} & \frac{17}{36} \end{pmatrix}$$

Todas las componentes de PQ son no negativas. Además, $\frac{5}{16} + \frac{1}{12} + \frac{29}{48} = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{5}{12} = \frac{5}{12} + \frac{1}{9} + \frac{17}{36} = 1$. Así que PQ es una matriz de probabilidades. Esto ilustra el Enunciado 2.

Para definir una cadena de Markov, considérese un experimento con un espacio muestra finito $S = \{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$. Considérese una secuencia (o **cadena**) de experimentos realizados. Se dice que el experimento está en el **estado** E_i en el intento m-ésimo si E_i es el resultado del intento m-ésimo ensayo del experimento.

Cadena de Markov Una secuencia de intentos de un experimento es una **cadena de Markov** si

(a) el resultado del intento m-ésimo depende sólo del resultado del intento $(m - 1)$-ésimo y no de los resultados en los intentos anteriores, y
(b) la probabilidad de pasar del estado E_i al estado E_j en dos intentos sucesivos del experimento permanece constante.

Por ejemplo, si la probabilidad de pasar del estado E_2 al E_4 en el tercer intento es de 0.6, entonces la probabilidad de pasar de E_2 a E_4 en el cuarto o en el décimo intento, o en el quincuagésimo, es también de 0.6.

Nótese que en el Ejemplo 2 supusimos que la probabilidad de que un cliente escogiera a Gourmet en un mes dependía sólo de qué empresa de abasto había elegido el mes anterior.

Si el clima de hoy depende solamente del clima de ayer, entonces la observación y predicción del clima es un problema de cadenas de Markov. Si la probabilidad de escoger una marca particular de coche la próxima vez que piense comprar uno depende únicamente del auto que ya se tiene, entonces el problema del patrón de ventas de automóviles es un problema que se puede resolver por cadenas de Markov.

Por otra parte, si el clima de hoy es determinado por el clima de varios días anteriores, entonces no se trata de una cadena de Markov. Similarmente, si al hacer la próxima compra de un automóvil se toma en cuenta la marca de los últimos tres coches que se han tenido, entonces el análisis de los patrones de ventas de automóviles no corresponde a una cadena de Markov. Esto es así, ya que la probabilidad de escoger una marca determinada de automóvil en el intento m-ésimo es decir, su m-ésimo coche depende de las elecciones que se hayan hecho en tres casos anteriores: los de los autos $(m-1)$-ésimo, $(m-2)$-ésimo y $(m-3)$-ésimo.

Una cadena de Markov se caracteriza por las probabilidades de que el sistema pase de un estado a otro en intentos sucesivos.

Matriz de transición de una cadena de Markov La matriz de transición de una cadena de Markov es la matriz $n \times n$ de probabilidades $T = (p_{ij})$ cuya componente ij-ésima, p_{ij} es la probabilidad de que el sistema pase del estado E_i al estado E_j en intentos sucesivos del experimento.

Ejemplo 7 En el Ejemplo 1, la matriz de transición es $T = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}$. Esto quiere decir, por ejemplo, que la probabilidad de pasar del estado 1 (Gourmet) al estado 2 (DFS) es de 0.1.

Sea T la matriz de transición de una cadena de Markov. Como el producto de dos matrices de probabilidades es una matriz de probabilidades, se concluye que las matrices $T^2 = TT$, $T^3 = T^2T$, T^4, T^5, . . . son cada una, matrices de probabilidades.

Matriz regular y cadena de Markov regular Una matriz de probabilidades T es **regular** si todas sus componentes de al menos una de sus potencias T^m son estrictamente positivas (mayores que cero). Una cadena de Markov es **regular** si su matriz de transición es regular.

Ejemplo 8 ¿Cuáles de las siguientes matrices son matrices de transición para una cadena de Markov regular?

(a) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Solución (a) $T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ es regular porque todas sus componentes son positivas.

(b) $T^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$$T^3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{7}{8} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad T^4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{16} & \frac{15}{16} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

y así sucesivamente. Como siempre hay un cero en la posición 2,1 de T^m, concluimos que T *no es* regular.

(c) $$T^2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

por lo que T es regular.

(d) Todas las componentes son positivas, y así T es regular.

¿Por qué estudiamos cadenas de Markov? En el Ejemplo 1 vimos que la cadena de Markov regular (regular porque $T = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}$ tiene todas sus componentes positivas) tenía un vector de probabilidades fijo, $\mathbf{t} = (2/3 \quad 1/3)$ y que el vector de probabilidades $\mathbf{p}_n = \mathbf{p}_0 T^n$ tendía a $\mathbf{t}$ al crecer n. Esto no es un accidente.

Teorema 2 Si T es una matriz de probabilidades regular, entonces hay un único vector de probabilidades $\mathbf{t}$ tal que $\mathbf{t}T = \mathbf{t}$. Además, para cualquier vector de probabilidades $\mathbf{p}$, el vector de probabilidades $\mathbf{p}T^n$ se acerca más a $\mathbf{t}$ al crecer n. El **vector fijo t** se llama la **distribución estacionaria** de la cadena de Markov cuya matriz de transición es T. Además, al ir creciendo n, cada renglón de T^n tiende al vector fijo $\mathbf{t}$. (1)

Una demostración de parte de este teorema se da al final de la sección.

Ejemplo 9 Encontrar los vectores fijos para cada matriz regular.

(a) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Solución Se busca un vector de probabilidades $\mathbf{t}$ tal que $\mathbf{t}T = \mathbf{t}$. Si $\mathbf{t} = (x\ y)$, resolvemos la ecuación

$$(x \quad y)\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = (x \quad y)$$

o bien

$$\left(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{3}y \quad \tfrac{1}{2}x + \tfrac{2}{3}y\right) = (x \quad y)$$

Igualando las componentes, obtenemos

$$\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{3}y = x$$
$$\tfrac{1}{2}x + \tfrac{2}{3}y = y$$

o bien

$$-\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{3}y = 0$$
$$\tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{3}y = 0$$

Además, como $\mathbf{t}$ es un vector de probabilidades, debemos tener que $x + y = 1$. Esto nos lleva al sistema

$$-\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{3}y = 0$$
$$\tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{3}y = 0$$
$$x + y = 1$$

Recuérdese que $M_1(-2)$ significa multiplicar el primer renglón por -2; $A_{1,2}(-½)$ significa multiplicar el primer renglón por $-½$ y sumarlo al segundo renglón; $P_{2,3}$ significa intercambio (permuta) de los renglones segundo y tercero.

Haciendo reducción por renglones obtenemos, sucesivamente,

$$\left(\begin{array}{rr|r} -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{M_1(-2)} \left(\begin{array}{rr|r} 1 & -\frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[A_{1,3}(-1)]{A_{1,2}(-\frac{1}{2})} \left(\begin{array}{rr|r} 1 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{3} & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{M_3(\frac{3}{5})} \left(\begin{array}{rr|r} 1 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} \end{array}\right) \xrightarrow{A_{3,1}(\frac{2}{3})} \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} \end{array}\right) \xrightarrow{P_{2,3}} \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Así, $x = 2/5$, $y = 3/5$ y el único vector de probabilidades es $\mathbf{t} = (2/5 \quad 3/5)$.

Comprobación $\quad \mathbf{t}T = \left(\tfrac{2}{5} \quad \tfrac{3}{5}\right)\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \left(\tfrac{2}{5} \quad \tfrac{3}{5}\right) = \mathbf{t}.$

(b) De modo que

$$\mathbf{t}(x \quad y \quad z) = \mathbf{t}T = (x \quad y \quad z)\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

o bien

$$(x \quad y \quad z) = \left(\tfrac{3}{5}x + \tfrac{1}{4}y + \tfrac{1}{4}z \quad \tfrac{1}{5}x + \tfrac{1}{2}y + \tfrac{1}{4}z \quad \tfrac{1}{5}x + \tfrac{1}{4}y + \tfrac{1}{2}z\right),$$

y así

$$\tfrac{3}{5}x + \tfrac{1}{4}y + \tfrac{1}{4}z = x$$
$$\tfrac{1}{5}x + \tfrac{1}{2}y + \tfrac{1}{4}z = y$$
$$\tfrac{1}{5}x + \tfrac{1}{4}y + \tfrac{1}{2}z = z.$$

Entonces, junto con la condición $x + y + z = 1$, llegamos al sistema

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ -\tfrac{2}{5}x + \tfrac{1}{4}y + \tfrac{1}{4}z &= 0 \\ \tfrac{1}{5}x - \tfrac{1}{2}y + \tfrac{1}{4}z &= 0 \\ \tfrac{1}{5}x + \tfrac{1}{4}y - \tfrac{1}{2}z &= 0. \end{aligned}$$

Ahora hacemos reducción por renglones.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{A_{1,2}(\frac{2}{5}) \\ A_{1,3}(-\frac{1}{5}) \\ A_{1,4}(-\frac{1}{5})}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{13}{20} & \frac{13}{20} & \frac{2}{5} \\ 0 & -\frac{7}{10} & \frac{1}{20} & -\frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{20} & -\frac{7}{10} & -\frac{1}{5} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{M_2(\frac{20}{13})} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{8}{13} \\ 0 & -\frac{7}{10} & \frac{1}{20} & -\frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{20} & -\frac{7}{10} & -\frac{1}{5} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{A_{2,1}(-1) \\ A_{2,3}(\frac{7}{10}) \\ A_{2,4}(-\frac{1}{20})}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{13} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{8}{13} \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{3}{13} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{4} & -\frac{3}{13} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{M_3(\frac{4}{3})} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{13} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{8}{13} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{13} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{4} & -\frac{3}{13} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{A_{3,2}(-1) \\ A_{3,4}(\frac{3}{4})}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{13} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{13} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{13} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Así que $x = \frac{5}{13}$, $y = \frac{4}{13}$, $z = \frac{4}{13}$, y $\mathbf{t} = (\frac{5}{13} \;\; \frac{4}{13} \;\; \frac{4}{13})$.

Comprobación $\quad \mathbf{t}T = (\frac{5}{13} \;\; \frac{4}{13} \;\; \frac{4}{13})\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = (\frac{5}{13} \;\; \frac{4}{13} \;\; \frac{4}{13}).$

Observación. Para la matriz en la parte (a) de este ejemplo, usamos una calculadora para evaluar algunas de las potencias de T^m.

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.3333\ldots & 0.6666\ldots \end{pmatrix}$$

$$T^2 = \begin{pmatrix} \frac{5}{12} & \frac{7}{12} \\ \frac{7}{18} & \frac{11}{18} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4166\ldots & 0.5833\ldots \\ 0.3888\ldots & 0.6111\ldots \end{pmatrix}$$

$$T^4 = T^2T^2 \approx \begin{pmatrix} 0.400462963 & 0.599537037 \\ 0.399691358 & 0.600308642 \end{pmatrix}$$

$$T^8 = T^4T^4 \approx \begin{pmatrix} 0.4000003572 & 0.5999996428 \\ 0.3999997618 & 0.6000002382 \end{pmatrix}$$

$$T^{16} = T^8T^8 \approx \begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

$$T^m \approx \begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix} \quad \text{para } m > 16 \quad \text{(compruébese.)}$$

Las últimas dos matrices son correctas hasta diez decimales.

Ahora sea $\mathbf{p} = (a \;\; b)$ cualquier vector de probabilidades. Entonces para $m > 16$,

$$\mathbf{p}T^m = (a \;\; b)\begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix} = (0.4a + 0.4b \;\; 0.6a + 0.6b) = (0.4(a+b) \;\;\; 0.6(a+b)).$$

Como $a + b = 1$, vemos que, con diez decimales, $\mathbf{p}T^m = (0.4 \;\;\; 0.6) = (2/5 \;\;\; 3/5)$ para *cualquier* vector de probabilidades inicial $\mathbf{p}$. Esto ilustra el gran resultado de (1).

Ejemplo 10 Se coloca un ratón en una caja dividida en compartimientos, como se muestra en la Figura 4. En ausencia de más información, es razonable suponer que el ratón encontrará una puerta al azar para moverse de un compartimiento a otro. Si esta suposición es válida, a la larga puede esperarse que el ratón esté

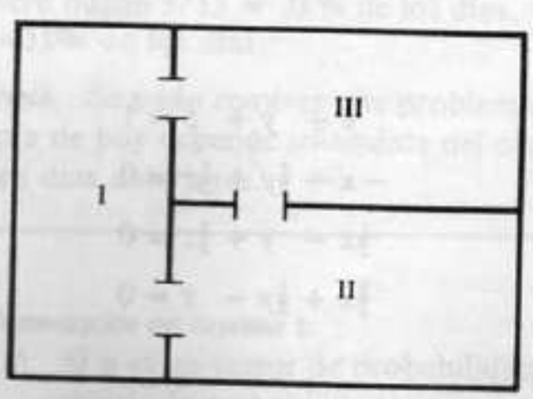


Figura 4
(Secc. 9.1)

en el interior de cada compartimiento con igual frecuencia. Wecker describe una serie de experimentos con ratones de campo que se puede analizar en estos términos.* Dejando que los ratones se muevan entre diez compartimientos, la mitad al descubierto y la mitad con techo de madera, Wecker pudo estudiar la fuerza de la preferencia de los ratones por el habitat abierto sobre el habitat cubierto.

Se puede analizar la situación de los ratones en términos de una cadena de Markov y demostrar que, a la larga, es válida nuestra suposición intuitiva de que el ratón pasaría tiempos equivalentes en cada uno de los tres compartimientos. Los tres estados obvios en este ejemplo son los compartimientos I, II y III. Como todas las puertas son igualmente fáciles de elegir, la probabilidad es de 1/2 de que el ratón se mueva a cada uno de los dos compartimientos que no ocupa en un momento dado. Esto da la matriz de transición

$$T = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Dado que

$$T^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

T es regular y tiene un único vector fijo de probabilidades $\mathbf{t}$. Si $\mathbf{t} = (x\ y\ z)$, entonces $x + y + z = 1$ y

$$(x \quad y \quad z)\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = (x \quad y \quad z)$$

o bien

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}y + \tfrac{1}{2}z &= x \\ \tfrac{1}{2}x \qquad + \tfrac{1}{2}z &= y \\ \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}y \qquad &= z \end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ -x + \tfrac{1}{2}y + \tfrac{1}{2}z &= 0 \\ \tfrac{1}{2}x - y + \tfrac{1}{2}z &= 0 \\ \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}y - z &= 0 \end{aligned}$$

* S.C. Wecker, "Habitat Selection", *Scientific American*, 211 (oct. 1964):109-116.

Entonces, haciendo reducción por renglones, obtenemos

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[A_{1,4}(-\frac{1}{2})]{\substack{A_{1,2}(1)\\ A_{1,3}(-\frac{1}{2})}} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow{M_2(\frac{2}{3})} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[A_{2,3}(\frac{3}{2})]{A_{2,1}(-1)} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow{M_3(\frac{2}{3})} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow[A_{3,4}(\frac{3}{2})]{A_{3,2}(-1)} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Así que $\mathbf{t} = (1/3 \quad 1/3 \quad 1/3)$, lo que quiere decir que, como se esperaba, el ratón pasará iguales tiempos en cada uno de los tres compartimientos.

Ejemplo 11 El clima de Montreal es bueno, regular o malo en cualquier día dado. Si el clima es bueno hoy, será bueno mañana con una probabilidad de 0.60, será regular con una probabilidad de 0.20 y será malo con una probabilidad de 0.20. Si el clima de hoy es regular, el de mañana será bueno, regular o malo con probabilidades respectivas de 0.25, 0.50 y 0.25. Por último, si el clima es malo hoy, las probabilidades son de 0.25, 0.25 y 0.50 para clima bueno, regular o malo, mañana. Esto se puede describir como una cadena de Markov de intentos de un experimento con tres posibles resultados: E_1, E_2 y E_3, que corresponden a clima bueno, regular o malo en un día dado. La matriz de transición para esta cadena de Markov es

$$P = \begin{array}{c} \text{De} \backslash \text{A} \\ B \\ R \\ M \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} G & I & M \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.60 & 0.20 & 0.20 \\ 0.25 & 0.50 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.50 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Se aprecia que esta matriz es regular. En el Ejemplo 9 se calculó el vector fijo $(5/13 \quad 4/13 \quad 4/13)$. Esto quiere decir que, a la larga, el clima de Montreal será bueno $5/13 \approx 38\%$ de los días, regular $4/13 \approx 31\%$ de los días, y malo $\approx 31\%$ de los días.

Nota. Se pudo resolver este problema apoyados en la suposición de que el clima de hoy depende solamente del clima de ayer, y no de lo que haya pasado en días anteriores.

Algunas demostraciones

Demostración del Teorema 1.

(a) Si $\mathbf{p}$ es un vector de probabilidades de n componentes y $P = (p_{ij})$ es una matriz de probabilidades $n \times n$, entonces $\mathbf{p}P$ es un vector de probabilidades con n componentes.

Demostración El vector de probabilidades dado es $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ y la matriz $n \times n$ de probabilidades dada es $P = (p_{ij})$. Defínase el vector $\mathbf{r} = \mathbf{p}P$. Entonces,

$$\mathbf{r} = \mathbf{p}P = (p_1, p_2, \ldots, p_n)\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= (p_1p_{11} + p_2p_{21} + \cdots + p_np_{n1}, \cdots, p_1p_{1n} + p_2p_{2n} + \cdots + p_np_{nn}).$$

En otras palabras, $\mathbf{r} = \mathbf{p}P$ es un vector renglón de n componentes, $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$, cuya componente i es $r_i = p_1p_{1i} + p_2p_{2i} + \ldots + p_np_{ni}$. Cada r_i es no negativa, porque es la suma de números no negativos. Para demostrar que $\mathbf{r}$ es un vector de probabilidades, se debe probar que la suma de sus componentes es 1.

$$\sum_{i=1}^{n} r_i = \sum_{i=1}^{n}(p_1p_{1i} + p_2p_{2i} + \ldots + p_np_{ni})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} p_1p_{1i} + \sum_{i=1}^{n} p_2p_{2i} + \cdots + \sum_{i=1}^{n} p_np_{ni}$$

$$= p_1\sum_{i=1}^{n} p_{1i} + p_2\sum_{i=1}^{n} p_{2i} + \ldots + p_n\sum_{i=1}^{n} p_{ni}$$

$$= p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1.$$

(b) Si $P = (p_{ij})$ y $Q = (q_{ij})$ son las matrices $n \times n$ de probabilidades, el producto de las matrices PQ es una matriz $n \times n$ de probabilidades.

Demostración Defínase el producto matricial $R = PQ = (r_{ij})$. Esta es una matriz $n \times n$ cuya componente ij es $r_{ij} = \sum_{k=1}^{n} p_{ik}q_{kj}$. Ya que las componentes de P y Q son no negativas, las componentes de $R = PQ$ son también no negativas. La suma de las componentes en el renglón i de R es

$$\sum_{j=1}^{n} r_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} p_{ik}q_{kj} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} p_{ik}q_{kj}$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(p_{ik}\sum_{j=1}^{n} q_{kj}\right) = \sum_{k=1}^{n} p_{ik} = 1.$$

En relación con esto, se invirtió el orden en la sumatoria y se usó el hecho de que $\sum_{k=1}^{n} p_{ik} = \sum_{j=1}^{n} q_{kj} = 1$, ya que P y Q son matrices de probabilidades. Hemos demostrado que *PQ es una matriz de probabilidades.* ■

Demostración Parcial del Teorema 2

Demostramos lo siguiente

Si $P = (p_{ij})$ es una matriz $n \times n$ de probabilidades, entonces existe un vector (no cero) de n componentes $\mathbf{t}$ tal que $\mathbf{t}P = \mathbf{t}$. Es decir, cada matriz de probabilidades tiene un vector fijo.

Demostración La ecuación $\mathbf{t}P = \mathbf{t}$ es equivalente a $\mathbf{t}(P - I) = 0$ o bien, tomando transpuestas, $(P - I)^t\mathbf{t}^t = 0^t$. Este sistema homogéneo tiene una solución no cero $\mathbf{t}$ si y sólo si

$$\det(P - I)^t = \det(P - I) = 0.$$

Esto es una consecuencia de la teoría de los determinantes. Pero $\det(P - I) = 0$ si y sólo si las columnas de la matriz $P - I$ son linealmente dependientes. Como P es una matriz de probabilidades, sabemos que

$$p_{11} + p_{12} + \dots + p_{1n} = p_{21} + p_{22} + \dots + p_{2n} = \dots$$

$$= p_{n1} + p_{n2} + \dots + p_{nn} = 1.$$

Estas ecuaciones se pueden escribir en la siguiente forma vectorial equivalente.

$$\begin{pmatrix} p_{11}-1 \\ p_{21} \\ \vdots \\ p_{n1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22}-1 \\ \vdots \\ p_{n2} \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} p_{1n} \\ p_{2n} \\ \vdots \\ p_{nn}-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Los vectores en la izquierda de esta ecuación son exactamente las columnas de $P - I$. Por lo tanto, las columnas de $P - I$ son linealmente dependientes, con lo que queda demostrado el resultado. ■

Problemas 9.1

En los Problemas 1-10, determínese si el vector dado es un vector de probabilidades.

1. $(\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2})$

2. $(\frac{1}{3} \quad \frac{1}{3})$

3. $(\frac{1}{5} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{1}{5})$

4. $(\frac{1}{4} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{4})$

5. $(\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2} \quad 1)$

6. $(\frac{1}{3} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{5}{12})$

7. $(1 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$

8. $(0 \quad 1 \quad 0 \quad 1)$

9. $(0.235 \quad 0.361 \quad 0.162 \quad 0.242)$

10. $(\frac{1}{10} \quad \frac{2}{10} \quad \frac{3}{10} \quad \frac{4}{10} \quad \frac{5}{10})$

En los Problemas 11-20, determínese si la matriz dada es una matriz de probabilidades.

11. $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

12. $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

14. $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} 0.99 & 0.02 & -0.01 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.98 & 0.1 & 0.1 \end{pmatrix}$ **16.** $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$

17. $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **18.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

19. $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$ **20.** $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{7} & \frac{2}{7} & \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{2}{11} & \frac{5}{11} & \frac{1}{11} & \frac{3}{11} \end{pmatrix}$

En los Problemas 21-30, se da una matriz T de transición y un vector inicial de probabilidades p_0. Calcúlense p_1, p_2 y p_3.

21. $T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$; $\mathbf{p}_0 = (\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2})$

22. $T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$; $\mathbf{p}_0 = (1 \quad 0)$

23. $T = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{7}{8} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$; $\mathbf{p}_0 = (0 \quad 1)$

24. $T = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{7}{8} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$; $\mathbf{p}_0 = (\frac{2}{5} \quad \frac{3}{5})$

25. $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$; $\mathbf{p}_0 = (\frac{1}{2} \quad \frac{3}{8} \quad \frac{1}{8})$

26. $T = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$; $\mathbf{p}_0 = (\frac{1}{5} \quad \frac{2}{5} \quad \frac{2}{5})$

27. $T = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$; $\mathbf{p}_0 = (\frac{2}{7} \quad \frac{1}{7} \quad \frac{4}{7})$

28. $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\mathbf{p}_0 = (1 \quad 0 \quad 0)$

29. $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\mathbf{p}_0 = (\frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{3})$

30. $T = \begin{pmatrix} 0.16 & 0.49 & 0.35 \\ 0.23 & 0.58 & 0.19 \\ 0.37 & 0.21 & 0.42 \end{pmatrix}$; $\mathbf{p}_0 = (0.31 \quad 0.44 \quad 0.25)$

En los Problemas 31-40, determínese si la matriz dada de probabilidades es regular. Si es regular, encuéntrese su único vector fijo de probabilidades.

31. $\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

32. $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$

33. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

34. $\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

★**35.** $\begin{pmatrix} a & 1-a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$, en donde $0 < a < 1$ y $0 < b < 1$

36. $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

37. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$

38. $\begin{pmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.5 \\ 0.4 & 0.4 & 0.2 \\ 0.3 & 0.6 & 0.1 \end{pmatrix}$

39. $\begin{pmatrix} 0.12 & 0.37 & 0.51 \\ 0.43 & 0.19 & 0.38 \\ 0.26 & 0.59 & 0.15 \end{pmatrix}$

40. $\begin{pmatrix} 0.283 & 0 & 0.162 & 0.555 \\ 0 & 0.217 & 0.498 & 0.285 \\ 0.361 & 0.203 & 0.092 & 0.344 \\ 0.085 & 0.416 & 0.122 & 0.377 \end{pmatrix}$

41. (a) Calcúlese un vector fijo de probabilidades para la matriz

$$T = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) ¿Es único este vector?

42. (a) Calcúlese un vector fijo de probabilidades para la matriz

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) ¿Es único este vector?

43. En un día determinado, una persona está sana o enferma. Si la persona está sana hoy, la probabilidad de que esté sana mañana se estima en un 98%. Si la persona está enferma hoy, la probabilidad de que esté sana mañana es de 30%. Descríbase la secuencia de estados de salud como una cadena de Markov. ¿Cuál es la matriz de transición?

44. Si la persona del Problema 43 está enferma hoy, ¿cuáles son las probabilidades de que se recupere mañana, dentro de 2 días o dentro de 3 días?

45. ¿Qué porcentaje de los días estará sana la persona del Problema 43?

46. Considérese el experimento de poner un ratón en la casa dibujada en la Figura 5.

(a) Suponiendo que el ratón tiene iguales probabilidades de escoger cualquier puerta para salir del compartimiento, descríbase este experimento como una cadena de Markov y determínese la matriz de transición.

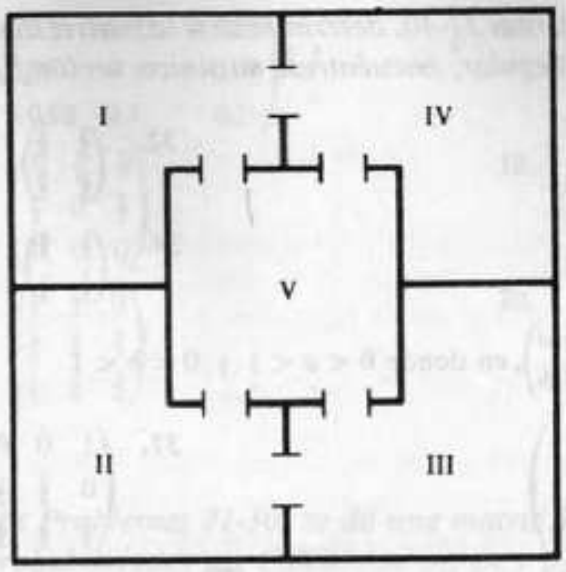


Figura 5
(Secc. 9.1)

(b) Encuéntrese el porcentaje de tiempo que a la larga estará el ratón en cada compartimiento.

47. Un examen consta de 100 preguntas de falso o verdadero. Para un estudiante promedio, el examen es tal que si contesta bien una pregunta, la probabilidad de que conteste correctamente la siguiente es de 3/4. Estímese la calificación promedio en este examen, suponiendo que la primera pregunta se contesta correctamente.

48. Un animal de laboratorio puede escoger una de tres comidas en unidades estándar. Después de largas observaciones, se encontró que si el animal escoge una comida en un intento, escogerá la misma en el siguiente intento con una probabilidad de 50% y escogerá las otras dos comidas en el siguiente intento con probabilidades de 25% cada una.

(a) Descríbase este proceso como una cadena de Markov y determínese la matriz de transición.

(b) Demuéstrese que, a la larga, se consumirán cantidades iguales de las tres comidas.

49. Hay cinco exámenes en un curso. Las calificaciones posibles en cada examen son A, B, C, D y E. Se estima que la probabilidad es de 60% que un estudiante obtenga la misma calificación que en el examen anterior, y de 10% para cada una de las otras posibilidades. Descríbase este proceso como una cadena de Markov. ¿Cuál es la matriz de transición?

50. (a) Si un estudiante recibe una A en el primer examen del Problema 49, ¿cuál es la probabilidad de que reciba una C en el segundo examen?

(b) Si un estudiante recibe una B en el segundo examen, ¿cuál es la probabilidad de que sus calificaciones en los tres exámenes restantes sean de B?

51. La UDrive Car Rental Company opera en California y cobra un cargo adicional para automóviles rentados en una ciudad y entregados en otra. Para determinar el cargo adecuado, se dividió el estado en tres áreas: norte, centro y sur. Se determinaron las probabilidades de recoger un automóvil en una área y de entregarlo en la misma área o en otra.

De \ A	Norte	Centro	Sur
Norte	0.6	0.3	0.1
Centro	0.2	0.5	0.3
Sur	0.1	0.2	0.7

Descríbase este proceso como una cadena de Markov y determínese la matriz de transición.

52. En el Problema 51, determínense los porcentajes de automóviles que, a la larga, estarán en cada una de las tres áreas.

53. Antonio Ramírez es un representante de ventas de una gran empresa librera. Vende libros de texto en una área, que se subdivide en cuatro regiones. Visita las universidades de una región cada semana y nunca visita la misma región en dos semanas consecutivas. Si en esta semana vende en la región I, tiene el 70% de probabilidades de pasar a la región II y el 30% de visitar la región IV la próxima semana. Si en esta semana vende en la región III, venderá en la región II la próxima semana. Si vende en alguna de las regiones II o IV en esta semana, venderá en alguna de las otras regiones con iguales probabilidades la semana siguiente. Descríbase el programa de viajes del Sr. Ramírez como una cadena de Markov y encuéntrese la matriz de transición.

54. En el Problema 53, ¿qué porcentaje de tiempo estará el Sr. Ramírez en cada región a la larga?

55. En el Problema 54, la empresa del Sr. Ramírez gasta $700, $650, $580 y $820 respectivamente, para pagar los gastos semanales en las cuatro regiones. ¿De cuánto serán los gastos semanales promedio, a la larga?

56. Una empresa necesita contratar copiadoras en renta, escogiendo entre dos máquinas. Las dos máquinas hacen copias que no se pueden distinguir. Cada máquina funciona o no funciona. Según los registros anteriores, se ha determinado que si la máquina I trabaja un día determinado, la probabilidad es de 0.95 que trabaje el día siguiente. Si no trabaja un cierto día, la probabilidad es de 0.75 que funcione el siguiente día. Si la máquina II trabaja hoy, la probabilidad es de 0.9 que trabaje mañana. Si no funciona hoy, la probabilidad es de 0.8 que trabaje mañana. ¿Qué máquina debe rentar la empresa?

57. En las elecciones para el Senado de un país, se ha determinado que los votos de una persona cambian según las probabilidades siguientes.

De \ A	Demócratas	Republicanos	Independientes
Demócratas	0.7	0.2	0.1
Republicanos	0.35	0.6	0.05
Independientes	0.4	0.3	0.3

A la larga, ¿qué porcentajes de los votantes votarán por los Demócratas, Republicanos e Independientes?

9.2 Cadenas de Markov absorbentes

En el experimento del Ejemplo 9.1.10 (véase la Figura 9.1.4) introducimos la modificación que consiste en que el ratón es sacado de la caja cuando llega al compartimiento III. Este nuevo procedimiento experimental se puede describir como una cadena de Markov si decimos que el sistema permanece en el tercer estado en todos los intentos una vez que ha alcanzado tal condición. Son muy comunes en las aplicaciones de las cadenas de Markov los estados con esta propiedad.

Estado absorbente Un estado E_i de una cadena de Markov se dice que es **absorbente** si, una vez alcanzado el estado E_i en algún intento, el sistema permanece en el estado E_i en todos los intentos futuros.

Cadena de Markov absorbente Una cadena de Markov es **absorbente** si tiene uno o más estados absorbentes y es posible llegar a un estado absorbente a partir de cualquiera de los estados no absorbentes.

Nota. Puede ser necesario pasar por varios estados no absorbentes para llegar a un estado absorbente.

Si el estado E_i es absorbente, la probabilidad de transición de E_i a E_i es de 1. En otras palabras, el estado E_i es absorbente si y sólo si $p_{ii} = 1$. El número de estados absorbentes de una cadena de Markov absorbente es igual al número de unos en la diagonal de su matriz de transición. Los estados no absorbentes de una cadena de Markov absorbente se llaman **estados transitorios**. La probabilidad de que el sistema esté en un estado transitorio disminuye al aumentar el número de intentos.

Ejemplo 1 Si el ratón (Ejemplo 9.1.10) permanece en el tercer compartimiento una vez que llega a él, la matriz de transición es

$$T = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En este caso E_1 y E_2 son estados transitorios y E_3 es un estado absorbente. Se observa que se puede llegar a E_3 partiendo de E_1 o E_2 y por lo tanto la cadena de Markov es absorbente.

Ejemplo 2 La matriz

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

es la matriz de transición de una cadena de Markov con tres estados. El segundo estado es absorbente. Se puede llegar a él a partir de E_3 en un intento y a partir de E_1 en dos intentos (ir primero de E_1 a E_3 con una probabilidad de 1/2 y después de E_3 a E_2 con una probabilidad de 1/3).

Ejemplo 3 Considérese un juego en el que cada uno de dos jugadores empieza con dos canicas. En cada movimiento del juego, el primer jugador tiene una probabilidad p de ganar una canica y una probabilidad $q = 1 - p$ de perder una canica. El juego termina cuando uno de los jugadores pierde sus dos canicas. Describir este juego como una cadena de Markov.

Solución Este juego tiene cinco estados, E_0, E_1, E_2, E_3 y E_4, que corresponden a los casos en los que el primer jugador tiene 0, 1, 2, 3 o 4 canicas. Los estados E_0 y E_4 son absorbentes y los estados E_1, E_2 y E_3 son no absorbentes o transitorios. La matriz de transición es

$$T = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & p_{03} & p_{04} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{30} & p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \\ p_{40} & p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El sistema empieza en el estado E_2. Es decir, la distribución inicial de probabilidades es $\mathbf{p}_0 = (0\ 0\ 1\ 0\ 0)$. En los movimientos siguientes, las distribuciones de probabilidades sucesivas son $\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_0 T = (0\ q\ 0\ p\ 0)$, $\mathbf{p}_2 = (q^2\ 0\ 2pq\ 0\ p^2)$, $\mathbf{p}_3 = (q^2\ 2pq^2\ 0\ 2p^2q\ p^2)$, $\mathbf{p}_4 = (q^2 + 2pq^3\ 0\ 4p^2q^2\ 0\ p^2 + 2p^3q)$, ... Después de muchos intentos, la probabilidad de que el sistema se encuentre en uno de los estados transitorios se hace muy pequeña. Esto quiere decir que después de un número grande de movimientos, es casi seguro que uno de los jugadores haya perdido sus dos canicas. Por ejemplo, si $p = 2/3$, entonces $q = 1/3$ y

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_4 &= ((\tfrac{1}{3})^2 + 2(\tfrac{2}{3})(\tfrac{1}{3})^3 \quad 0 \quad 4(\tfrac{2}{3})^2(\tfrac{1}{3})^2 \quad 0 \quad (\tfrac{2}{3})^2 + 2(\tfrac{2}{3})^3(\tfrac{1}{3})) \\ &= (\tfrac{7}{27} \quad 0 \quad \tfrac{8}{81} \quad 0 \quad \tfrac{52}{81}). \end{aligned}$$

Estas son las probabilidades de estar en un estado transitorio después de 4 jugadas.

El resultado del último ejemplo sugiere que cuando se trata de una cadena de Markov absorbente, el sistema llegará eventualmente a un estado absorbente. No demostraremos esto aquí, pero se usará este hecho en el resto de la sección. Hay dos preguntas que surgen de manera natural.

1. ¿Cuánto tiempo, en promedio, estará el sistema en algún estado transitorio antes de llegar a un estado absorbente?
2. Si hay más de un estado absorbente, ¿cuáles son las probabilidades a largo plazo de terminar en cada uno de los estados absorbentes?

Hay una técnica para responder a estas preguntas. La demostración de que esta técnica funciona es difícil y no la discutiremos aquí. En vez de ello, ilustramos la técnica en una matriz específica y luego usaremos la técnica en otros ejemplos.

Considérese la matriz

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esta es la matriz de transición de una cadena de Markov absorbente en la que los estados 2 y 4 son los absorbentes.

Paso 1. En la matriz de transición T, suprímanse los renglones correspondientes a los estados absorbentes. Llámese T' a esta nueva matriz.

$$T' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

Paso 2. Divídase la matriz T' en estados absorbentes y no absorbentes. Llámese S a la matriz correspondiente a los estados absorbentes y R a la correspondiente a los estados no absorbentes.

En nuestro ejemplo, las columnas 2 y 4 de T' representan los estados absorbentes:

Estados absorbentes

Estados no absorbentes

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}.$$

Así que

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{8} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad R = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{3} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}.$$

Paso 3. Calcúlese la matriz $Q = (I - R)^{-1}$. Aquí se tiene

$$I - R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{3} & \frac{3}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{8} \end{pmatrix}$$

y

$$Q = (I - R)^{-1} = \frac{48}{13}\begin{pmatrix} \frac{5}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{30}{13} & \frac{6}{13} \\ \frac{16}{13} & \frac{24}{13} \end{pmatrix}.$$

Nota. Llamamos Q a la **matriz fundamental** para la cadena de Markov absorbente.

Ahora podemos responder las preguntas.

Paso 4. La componente q_{ij} de Q se interpreta de la manera siguiente. Si partimos del estado transitorio i, q_{ij} es el número esperado de veces que nos encontraremos en el estado transitorio j antes de alcanzar algún estado absorbente. En nuestro ejemplo, el número $q_{21} = 16/13$ quiere decir que si partimos del segundo estado transitorio (que es el estado 3 en nuestro problema), volveremos al estado transitorio 1 un promedio de $16/13 \approx 1.23$ veces antes de pasar a un estado absorbente (estado 2 o estado 4). Además, como $16/13 + 24/13 = 40/13 \approx 3.08$, estaremos en algún estado transitorio un promedio de 3.08 veces si empezamos en el estado transitorio 2.

Paso 5. Calcúlese la matriz de probabilidades $A = QS$. Aquí,

$$A = QS = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 30 & 6 \\ 16 & 24 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{13}\begin{pmatrix} \frac{19}{4} & \frac{33}{4} \\ 6 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{19}{52} & \frac{33}{52} \\ \frac{6}{13} & \frac{7}{13} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.3654 & 0.6346 \\ 0.4615 & 0.5385 \end{pmatrix}.$$

Nótese que A es una matriz de probabilidades.

Para interpretar las componentes de A, le agregamos indicaciones.

$$\begin{array}{r} \\ \textbf{Estado transitorio 1} \\ \textbf{Estado transitorio 2} \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \textbf{Estado absorbente 1} & \textbf{Estado absorbente 2} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.3654 & 0.6346 \\ 0.4615 & 0.5385 \end{pmatrix} \end{array}$$

Esto significa que si empezamos en el estado transitorio 1, terminaremos en el estado absorbente 1 en $0.3654 = 36.54\%$ de las veces, y en el estado absorbente 2, en $0.6346 = 63.46\%$ de las veces. Al segundo renglón de A se le da una interpretación semejante.

Ahora aplicaremos nuestra técnica a una situación práctica.

Ejemplo 4 El Centerville Vo-Tech es una escuela técnica de cursos bianuales. Cada 2 años, el Consejo Directivo presenta un presupuesto para Centerville a la legislatura estatal. El presupuesto se basa en el número de alumnos que asisten a la escuela y en el número de alumnos que se espera que se gradúen. Para calcular estos números, los alumnos se clasifican en cuatro categorías: primer año, segundo año, graduados y suspendidos. La última categoría incluye a los alumnos que se pasan a otra escuela.

Después de haber recogido datos durante varios años, la escuela puede predecir las proporciones de los estudiantes que pasarán de una categoría a otra en un año dado. Estos datos se dan en la Tabla 1. Si hay 2000 estudiantes de primer año y 1500 estudiantes de segundo año en Centerville este año, ¿cuántos de estos estudiantes se llegarán a graduar?

Tabla 2
(Secc. 9.2)

De \ A	Primer año (P)	Segundo año (S)	Graduados (G)	Suspendidos (X)
Primer año	0.15	0.65	0	0.2
Segundo año	0	0.1	0.75	0.15
Graduados	0	0	1	0
Suspendidos	0	0	0	1

Solución Se puede describir este proceso como una cadena de Markov absorbente con cuatro estados, de los cuales dos (graduados y suspendidos) son absorbentes. La matriz de transición para esta cadena de Markov es

$$T = \begin{array}{c|cccc} \text{De}\backslash\text{A} & P & S & G & X \\ \hline P & 0.15 & 0.65 & 0 & 0.2 \\ S & 0 & 0.1 & 0.75 & 0.15 \\ G & 0 & 0 & 1 & 0 \\ X & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Paso 1.

$$T' = \begin{pmatrix} 0.15 & 0.65 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0.1 & 0.75 & 0.15 \end{pmatrix}$$

Paso 2.

$$R = \begin{pmatrix} 0.15 & 0.65 \\ 0 & 0.1 \end{pmatrix}, \qquad S = \begin{pmatrix} 0 & 0.2 \\ 0.75 & 0.15 \end{pmatrix}$$

Paso 3.

$$I - R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.15 & 0.65 \\ 0 & 0.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.85 & -0.65 \\ 0 & 0.9 \end{pmatrix}$$

y

$$Q = (I - R)^{-1} \approx \begin{pmatrix} 1.17647 & 0.84967 \\ 0 & 1.11111 \end{pmatrix}$$

Paso 4. Los números en Q indican que el estudiante promedio que está ahora en su primer año, permanecerá aproximadamente 1.18 años en primer año y 0.85 años en segundo año antes de alcanzar un estado absorbente (graduación o suspensión). El estudiante promedio de segundo año pasará 1.11 años en su segundo año antes de quedar graduado o suspendido.

Paso 5.

$$A = QS \approx \begin{pmatrix} 1.17647 & 0.84967 \\ 0 & 1.11111 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0.2 \\ 0.75 & 0.15 \end{pmatrix}$$

$$\approx \begin{pmatrix} 0.63726 & 0.36274 \\ 0.83333 & 0.16667 \end{pmatrix}$$

Esto quiere decir que el 63.7% de los estudiantes de primer año llegarán a graduarse (pasando al estado absorbente 1) y que el 36.3% serán suspendidos, mientras que el 83.3% y el 16.7% de segundo año se graduarán o serán suspendidos, respectivamente. Ahora, para contestar nuestras preguntas:

De los 2000 estudiantes de primer año,

$$2000 \times 0.63726 = 1275 \text{ se graduarán.}$$

De los 1500 estudiantes de segundo año,

$$1500 \times 0.83333 = 1250 \text{ se graduarán.}$$

Nota. En el Paso 5 se calculó el número de alumnos que eventualmente se graduarán, mientras que en el Paso 4 se determinó en cuánto tiempo "eventualmente" se realizará esto para el estudiante promedio.

Ejemplo 5 En el Ejemplo 1, E_1 y E_2 son estados transitorios, mientras que E_3 es absorbente.

Así, como $T = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, tenemos que

$$T' = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad S = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Ya que hay un solo estado absorbente, es evidente que se debe llegar a él partiendo de cualquiera de los estados no absorbentes, por lo que A debe ser la matriz $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Se puede usar este hecho para verificar nuestros cálculos.

Ahora $\quad I - R = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \quad$ y $\quad Q = (I - R)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}.$

El sentido de $q_{12} = 2/3$, por ejemplo, es que si el sistema empieza en el estado E_1, el valor esperado del número de veces que el sistema estará en el estado E_2 es de 2/3. De manera semejante, $q_{11} + q_{12} = 4/3 + 2/3 = 2$. En otras palabras, si el ratón está en el compartimiento I en el primer movimiento, el número esperado de movimientos (incluyendo el primero) antes de llegar al compartimiento III es de 2. Por último,

$$A = QS = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

como se esperaba.

Ejemplo 6 En el Ejemplo 3, la matriz de transición para nuestro juego es

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De modo que

$$T' = \begin{pmatrix} q & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & p \end{pmatrix}.$$

Como los estados primero y quinto son absorbentes, tenemos que

$$R = \begin{pmatrix} 0 & p & 0 \\ q & 0 & p \\ 0 & q & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad S = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}.$$

Por simplicidad, considérese el caso $p = q = 1/2$. Entonces

$$R = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \qquad S = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$I - R = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad (I - R)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} = Q.$$

Esto indica, por ejemplo, que si el primer jugador empieza con dos canicas, puede esperar que el juego dure $q_{21} + q_{22} = 1 + 2 + 1 = 4$ movimientos antes de que gane o pierda todo. Por último,

$$A = QS = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

Así que si el jugador 1 empieza con 1 canica (el estado transitorio 1), terminará con ninguna (el estado absorbente 1) 3/4 de las veces, y terminará con las 4 canicas (estado absorbente 2) 1/4 de las veces.

Problemas 9.2

En los Problemas 1-10 se da una matriz. Determínese si la matriz es la matriz de transición de una cadena de Markov absorbente. En caso afirmativo, encuéntrese el número de estados absorbentes.

1. $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **2.** $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ **3.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **5.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **6.** $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **8.** $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ **9.** $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{8} & 0 & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{4}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

En los Problemas 11-20, se da la matriz de transición de una cadena de Markov absorbente. Determínense las matrices T', R, S, Q y A.

11. $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **12.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **14.** $\begin{pmatrix} 0.2 & 0.7 & 0.1 \\ 0.6 & 0.1 & 0.3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} 0.4 & 0.4 & 0.2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **16.** $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

17. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **18.** $\begin{pmatrix} 0.21 & 0.46 & 0.13 & 0.20 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.31 & 0.25 & 0.21 & 0.23 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

19. $\begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{7} & \frac{2}{7} & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **20** $\begin{pmatrix} 0.17 & 0.23 & 0.15 & 0.32 & 0.13 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.15 & 0.21 & 0 & 0.38 & 0.26 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

21. Un animal de laboratorio debe desempeñar cierta tarea para recibir una unidad de alimento. La probabilidad de que logre hacer la tarea con éxito en cualquier intento es de 4/5. Supóngase que el animal repite su tarea hasta recibir un total de cuatro unidades de alimento. Descríbase este proceso como una cadena de Markov absorbente con cinco estados. ¿Cuál es la matriz de transición?

22. ¿Cuál es el número esperado de veces que se repetirá la tarea del Problema 21 hasta completar con éxito cuatro intentos?

★23. Dos jugadores, G_1 y G_2 se enfrentan en un juego. La probabilidad de que gane G_1 en cada movimiento es de 3/7. Supóngase que G_1 empieza con \$1. En cada movimiento, apuesta \$1 cada jugador y el juego continúa hasta que uno de los dos haya perdido todo su dinero.

(a) Descríbase este juego como una cadena de Markov con nueve estados.

(b) ¿Cuáles son las distribuciones de probabilidades de los estados después de un movimiento y después de dos movimientos?

(c) ¿Cuál es la probabilidad de que gane G_1?

24. En un juego del Problema 23, supóngase que G_2 apuesta todo su dinero en cada movimiento del juego.

(a) Descríbase este juego como una cadena de Markov con cinco estados.

(b) ¿Cuál es el número esperado de los movimientos de este juego?

(c) ¿Cuál es la probabilidad de que gane G_1?

25. Un animal de laboratorio debe escoger una de cuatro pantallas para recibir alimento. Las I y II, si se escogen, resultan en una cantidad muy pequeña de alimento. Las III y IV dan cantidades muy superiores del mismo. Si la III o la IV se eligen en un intento, se observa que se seguirá escogiendo la misma pantalla en todos los intentos posteriores. Si se escoge la pantalla I o si se escoge la II en un intento, entonces en el siguiente intento se escogerá cualquiera de las cuatro pantallas con igual probabilidad. Descríbase este proceso como una cadena de Markov absorbente con cuatro estados. Si se escoge la pantalla I en el primer intento, ¿cuál es el número esperado de intentos antes de que se escoja la pantalla III o la pantalla IV?

26. La Zephyr Electronics Co. fabrica tocacintas portátiles. Antes de mandar a ventas un casete o portacinta, se analiza el lote. Las categorías de inspección son: no funciona (NF), regular, bueno y excelente. Los portacintas NF se desechan, mientras que los lotes excelentes se envían inmediatamente a ventas. Los lotes regulares y buenos se regresan para ajuste y se vuelven a probar. Las proporciones de lotes regulares y buenos que cambian de categoría se dan en la tabla siguiente:

De \ A	NF	Regular	Buena	Excelente
Regular	0.05	0.25	0.35	0.35
Buena	0	0.15	0.2	0.65

(a) Descríbase este proceso de prueba como una cadena de Markov absorbente y calcúlese la matriz de transición.

(b) ¿Cuántas veces, en promedio, se volverá a inspeccionar un lote que ya se había probado y había resultado regular en la prueba anterior?

(c) ¿Cuántas veces, en promedio, se inspeccionará de nuevo un lote que ya se había probado y dio por resultado ser bueno?

(d) ¿Cuál es la probabilidad de que se deseche un lote regular?

(e) ¿Cuál es la probabilidad de que un lote regular llegue a ventas?

(f) De 30,000 lotes probados como buenos originalmente, ¿cuántos llegarán a ventas?

27. La empresa Mastervise expide tarjetas de crédito a 20,000 individuos en cierto estado. Su auditor descubre que 2356 de éstos no pagaron sus cuentas del mes pasado. La política de la empresa indica que si las cuentas no se han pagado en 3 meses consecutivos, se revocan los derechos del tarjetahabiente y la cuenta se pasa a una agencia de cobros. La experiencia anterior de Mastervise ha mostrado la experiencia de los cobros en la tabla siguiente.

De \ A	1 mes de retraso	2 meses de retraso	3 meses de retraso	Pagado	Cancelada
1 mes de retraso	0	0.35	0	0.65	0
2 meses de retraso	0	0	0.4	0.6	0
3 meses de retraso	0	0	0	0.3	0.7

(a) Descríbase este proceso como una cadena de Markov absorbente y encuéntrese su matriz de transición.

(b) ¿A cuántos de los pagadores morosos se les cancelarán sus tarjetas?

28. Con referencia al Problema 9.1.46, supóngase que una vez que un ratón llega al compartimiento II o al compartimiento IV, permanece allí.

(a) Si un ratón empieza en el compartimiento I, ¿cuántos compartimientos visitará, en promedio?

(b) ¿Qué porcentaje de los ratones que parten del compartimiento III terminarán en el compartimiento IV?

29. En el Ejemplo 4 se descubrió que el 30% de los estudiantes de primer año lo repiten, que el 45% llegan al segundo año y el 25% quedan suspendidos. Si los demás datos permanecen inalterados, ¿cuántos de los actuales 2000 estudiantes de primer año se llegarán a graduar?

★30. (a) Considérese un juego entre el equipo A y el equipo B con un total de n jugadores en los dos equipos. En cada movimiento del juego, un equipo gana un jugador del otro equipo y el juego continúa hasta que un equipo haya perdido todos sus miembros. Si hay k jugadores en el equipo A y $n - k$ jugadores en el equipo B, la probabilidad de que el equipo A gane un jugador en la siguiente jugada es $(k/n)^2$. Descríbase este juego como una cadena de

Markov absorbente. ¿Son "justas" las reglas? (Este es un modelo elemental de la competencia entre las especies.)

(b) En el juego anterior, supóngase que $k = 3$ y que $n = 6$. ¿Cuál es la distribución de probabilidades de los equipos después de un movimiento? ¿Cuál es después de dos movimientos?

CAPÍTULO **10**

Un modelo aplicado en psicología

En este capítulo se presenta un modelo sencillo para analizar un proceso de aprendizaje. Procedemos con cautela porque sólo las actividades más elementales, simplificadas, de la mente se pueden tratar con algún modelo que funcione. El modelo que describimos fue analizado inicialmente, de manera matemática, por G. H. Bower* y se llama **aprendizaje de pares asociados.**

En el modelo de Bower hay un investigador y uno o más sujetos. El investigador designa dos conjuntos: un conjunto de estímulos y un conjunto de respuestas. Para cada elemento s del conjunto S de estímulos, hay una respuesta correcta r en el conjunto R de respuestas. Así, en efecto, el investigador crea un conjunto de parejas ordenadas de la forma (s, r), donde $s \in S$ y $r \in R$. En el experimento original de Bower, S y R contenían diez elementos. Por ejemplo, S podría consistir de diez letras, y R de diez números asignados aleatoriamente a las diez letras. En un contexto distinto, S **podría** contener diez palabras en español, y R sus equivalentes en inglés. O, como ejemplo final, S podría contener diez sílabas sin sentido (da, dum, pa, etc.) y R un conjunto de sílabas adicionales, cada una de ellas asociada a cada una de las sílabas en S.†

Una vez definidos S y R, puede empezar el experimento. En cada intento del experimento, el investigador le muestra (o le dice) un elemento $s \in S$ al sujeto, y el sujeto responde con un elemento $r \in R$. El sujeto, claro está, trata de responder con la respuesta correcta, la r asociada con la s dada. Si el sujeto

* G.H. Bower, "Aplications of a Model to Paired Associate Learning", *Psychometrica*, Vol. 26, 1961, 255-280.

† En el experimento original de Bower, los estímulos consistían en diez pares de letras y las respuestas eran números 1 o 2. Es decir el sujeto recibía un par de letras y se le pedía responder "1" o "2". Después de cada intento, se le decía al sujeto si su respuesta era correcta. Si el sujeto podía contestar correctamente a cada uno de los diez estímulos dos veces consecutivas, se suponía que se había aprendido las respuestas correctas y así terminaba el experimento.

da la respuesta correcta, se registra un 0. Si da una respuesta incorrecta, se registra un 1, y el investigador le dice o le muestra la respuesta correcta.

Se supone que, inicialmente, el sujeto no sabe las respuestas correctas y tiene que adivinar. Si su respuesta es incorrecta, se le dará la respuesta correcta y, supuestamente, empezará a aprender. El experimento continúa hasta que el sujeto puede dar las respuestas correctas a los estímulos dados dos veces consecutivas. En ese momento se supone que ha aprendido completamente las respuestas.

Para analizar este modelo, se deben hacer cinco suposiciones más o menos razonables. Hacemos referencia a las parejas estímulo-respuesta en la forma (s, r).

Suposición A1 Cada pareja estímulo-respuesta está en uno de dos estados en cada intento del experimento: condicionado (C) o adivinando (G). Está en el estado C si el sujeto ha aprendido la respuesta correcta (r) a la pregunta dada o estímulo (s). Está en el estado G si el sujeto no sabe la respuesta correcta y debe adivinar.

Suposición A2 Inicialmente, todas las parejas están en estado G. Esto es, suponemos que al empezar el experimento, el sujeto no sabe ninguna de las respuestas correctas.

Suposición A3 Si un elemento está en el estado C en el intento n-ésimo del experimento, permanece en el estado C en todos los intentos siguientes. Es decir, una vez que el sujeto haya "aprendido" la respuesta adecuada a un estímulo dado, no la olvida.

Suposición A4 Si un elemento está en el estado G en el intento n-ésimo del experimento, hay una probabilidad $c > 0$ de que estará en el estado C en el intento $(n + 1)$-ésimo del experimento. Es decir, c es la probabilidad de que el sujeto aprenda la respuesta correcta antes del siguiente intento del experimento.

Nota. (A4) es la suposición menos plausible de las que se han presentado hasta ahora. Aquí se está suponiendo que (*i*) todos los elementos son igualmente fáciles (o difíciles) de aprender, y (*ii*) el sujeto no tiene más probabilidad de "aprender" la respuesta correcta después de muchos intentos que después de un solo intento de contestarla. Es de esperarse que si los sujetos son humanos de inteligencia normal, las probabilidades de aprender aumenten después de cada intento y de haber oído la respuesta correcta.

Suposición A5 Si el elemento está en el estado G y hay N respuestas posibles, la probabilidad es de $1/N$ de que el sujeto adivine la respuesta correcta. Es decir, en el estado de adivinar todas las respuestas son igualmente probables de ser escogidas.

Con estas suposiciones, se puede considerar el proceso de aprender la respuesta correcta por cada estímulo como una cadena de Markov con estados C y G.* La matriz de transición para esta cadena de Markov es

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} C & G \end{array} \\ \begin{array}{c} C \\ G \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1-c \end{pmatrix} \end{array}, \tag{1}$$

porque, por (A3), una vez que estamos en C, permanecemos en C. Además, por (A4), si estamos en G, la probabilidad es c de que estemos en C en el siguiente intento del experimento.

Usando la matriz de transición dada en (1) es fácil calcular la probabilidad de que un elemento esté en el estado C o G después de un intento cualquiera del experimento. Primero, por (A2), la distribución inicial es

$$\mathbf{p}^{(0)} = (0, 1). \tag{2}$$

Ahora bien

$$P^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1-c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1-c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c[1 + (1-c)] & (1-c)^2 \end{pmatrix},$$

$$P^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c[1 + (1-c) + (1-c)^2] & (1-c)^3 \end{pmatrix} \cdots$$

Continuando de esta manera (véase el Problema 15), se puede demostrar que

$$P^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c[1 + (1-c) + (1-c)^2 + \dots + (1-c)^{n-1}] & (1-c)^n \end{pmatrix}. \tag{3}$$

La fórmula para la suma de una progresión geométrica es

$$1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} = \frac{1-x^n}{1-x}, \text{ para } x \neq 1. \tag{4}$$

Así que

$$1 + (1-c) + (1-c)^2 + \dots + (1-c)^{n-1} = \frac{1-(1-c)^n}{1-c} \tag{5}$$

e insertando (5) en (3), tenemos

$$P^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1-(1-c)^n & (1-c)^n \end{pmatrix}. \tag{6}$$

* Nótese que hay una cadena de Markov para cada elemento estímulo-respuesta (s, r). Así, si hay diez parejas (s, r), como en los experimentos de Bower, habrá diez cadenas de Markov. Sin embargo, considerando nuestras suposiciones, todas las diez cadenas de Markov tendrán propiedades idénticas.

Entonces las probabilidades de que un elemento esté en el estado C o G después del intento n-ésimo son

$$\mathbf{p}^{(n)} = \mathbf{p}^{(0)}P^n = (0,\ 1)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1-(1-c)^n & (1-c)^n \end{pmatrix} = (1-(1-c)^n,\ (1-c)^n). \quad (7)$$

La fórmula (7) es muy reveladora. Como $0 < c \leq 1$, por (A4), tenemos que $0 \leq 1 - c < 1$. Así, $(1-c)^n \to 0$ cuando $n \to \infty$. Esto dice que mientras c no sea cero, la respuesta correcta al estímulo será aprendida. Cuanto mayor sea el valor de c, tanto más rápido será el aprendizaje.

Ejemplo 1 Sea $c = 0.25$. Entonces $1 - c = 0.75$. La siguiente Tabla da las probabilidades de que el elemento esté en el estado G o C después de cada intento:

Tabla 1 **(Cap. 10)**

Intento	$P(C) = 1 - (0.75)^n$	$P(G) = (0.75)^n$
0	1	0
1	0.25	0.75
2	0.4375	0.5625
3	0.5781	0.4219
4	0.6836	0.3164
5	0.7627	0.2373
6	0.8220	0.1780
7	0.8665	0.1335
8	0.8999	0.1001
9	0.9249	0.0751
10	0.9437	0.0563
11	0.9578	0.0422
12	0.9683	0.0317
13	0.9762	0.0238
14	0.9822	0.0178
15	0.9866	0.0134
16	0.9900	0.0100
17	0.9925	0.0075
18	0.9944	0.0056
19	0.9958	0.0042
20	0.9968	0.0032

Nótese que después del intento 16°, hay un 99% de certeza de que el sujeto habrá aprendido la respuesta correcta.

Es interesante analizar esta cadena de Markov en términos de la teoría de cadenas de Markov absorbentes (véase la Sección 9.2). Tal cadena es absorbente porque el estado C lo es también. Ahora usamos la notación de la Sección 9.2. Podemos escribir una nueva matriz de transición.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} G & C \end{array} \\ \mathbf{P}' = & \begin{pmatrix} 1-c & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \quad (8)$$

Entonces la matriz R (véase el Paso 2 en la Sección 9.2) es la matriz 1×1 denominada $R = (1 - c)$. También, la probabilidad es de 1 de que un elemento estará, inicialmente en el estado G. Así que $\mathbf{r}^{(0)}$ es el vector de una componente (1).

El número esperado de intentos antes de que el elemento sea "aprendido" está dado por (véase el Paso 3 en la Sección 9.2)

$$\mathbf{m} = \mathbf{r}^{(0)}(I - R)^{-1} = (1)(1-[1-c])^{-1} = \frac{1}{c} \tag{9}$$

Es decir, el sujeto estará adivinando, o en el estado transitorio G, un promedio de $1/c$ veces antes de aprender la respuesta correcta.

Ejemplo 2 En el Ejemplo 1 $c = 0.25$, de manera que la persona obtendrá un promedio adivinatorio de $\dfrac{1}{0.25} = 4$ veces, antes de aprender la respuesta correcta.

Pasamos ahora a una situación más complicada (y más interesante). En el modelo ya discutido no distinguimos entre adivinar correctamente y adivinar incorrectamente para un elemento en el estado G. Si se quiere distinguir entre estas posibilidades, se necesita analizar el modelo por medio de una cadena de Markov con tres estados:

E_1 : adivinando correctamente

E_2 : adivinando incorrectamente

E_3 : condicionado.

La matriz de transición para esta cadena de Markov es

$$P = \begin{array}{c} \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \quad E_1 \quad & \quad E_2 \quad & E_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \dfrac{(1-c)}{N} & (1-c)\left(1-\dfrac{1}{N}\right) & c \\ \dfrac{(1-c)}{N} & (1-c)\left(1-\dfrac{1}{N}\right) & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \tag{10}$$

Explicamos esto de la manera siguiente: p_{11} es la probabilidad de que el elemento empiece en E_1 y permanezca en E_1. Para hacer esto, el elemento debe empezar y permanecer en el estado G (con una probabilidad de $1 - c$) y la respuesta se adivinará correctamente (con una probabilidad de $1/N$ por (A5)). Así que $p_{11} = (1 - c)(1/N) = (1 - c)/N$. De manera similar $p_{21} = (1 - c)/N$. Después p_{12} es la probabilidad de que el elemento empiece en el estado G y permanezca en el estado G (con una probabilidad de $1 - c$) y el sujeto adivinará incorrectamente (con una probabilidad de $1 - 1/N$). Así $p_{12} = (1 - c)(1 - 1/N)$. Este razonamiento demuestra que $p_{22} = (1 - c)(1 - 1/N)$. Por último, las otras probabilidades se deducen del modelo más simple discutido anteriormente. De las suposiciones, se ve que la distribución inicial de probabilidades es

$$\mathbf{p}^{(0)} = \left(\frac{1}{N},\ 1 - \frac{1}{N},\ 0\right).$$

En nuestra nueva cadena de Markov, los estados transitorios son E_1 y E_2, mientras que E_3 es absorbente. La matriz R está dada por

$$R = \begin{pmatrix} \frac{1-c}{N} & (1-c)\left(1 - \frac{1}{N}\right) \\ \frac{1-c}{N} & (1-c)\left(1 - \frac{1}{N}\right) \end{pmatrix} \tag{11}$$

y

$$\mathbf{r}^{(0)} = \left(\frac{1}{N}, 1 - \frac{1}{N}\right). \tag{12}$$

Ejemplo 3 Consideramos el experimento del Ejemplo 1 con $N = 5$. Entonces, como $c = 0.25$, tenemos, de (10), (11) y (12),

$$P = \begin{pmatrix} 0.15 & 0.6 & 0.25 \\ 0.15 & 0.6 & 0.25 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; R = \begin{pmatrix} 0.15 & 0.6 \\ 0.15 & 0.6 \end{pmatrix} \text{ y } \mathbf{r}^{(0)} = (0.2,\ 0.8).$$

Entonces

$$Q = (I - R)^{-1} = \frac{1}{0.25}\begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.15 & 0.85 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.6 & 2.4 \\ 0.6 & 3.4 \end{pmatrix}$$

y

$$\mathbf{m} = \mathbf{r}^{(0)}Q = (0.2,\ 0.8)\begin{pmatrix} 1.6 & 2.4 \\ 0.6 & 3.4 \end{pmatrix} = (0.8,\ 3.2).$$

Es decir, el sujeto adivinará correctamente un promedio de 0.8 veces y adivinará incorrectamente 3.2 veces en promedio, antes de aprender la respuesta correcta.

Problemas • Capítulo 10

1. Un estudiante está tomando un curso de lectura en francés. Aprende el vocabulario escribiendo una palabra en francés en un lado de una tarjeta y su equivalente en español en el otro lado. Hay diez tarjetas. Hacemos las siguientes suposiciones:

(a) Inicialmente el estudiante conoce las diez palabras en español pero no tiene idea de qué palabra de francés corresponde a cada palabra en español. Tiene que adivinar.

(b) Al estudiante se le muestra una palabra en francés, da la palabra equivalente en español y, si no es correcta, se le muestra la otra cara de la tarjeta. El estudiante sabe la palabra o está adivinando.

(c) Si está adivinando, escoge una de las diez "respuestas" en español aleatoriamente.

(d) Siempre que aprende una palabra, ya no la olvida.

(e) Si adivina (correcta o incorrectamente) y se le muestra la palabra correcta, la probabilidad es de 0.3 de que sabrá el equivalente en español de la palabra en francés que acaba de ver, la próxima vez que se le muestre.

Con las suposiciones indicadas, encuéntrese la matriz de transición de la cadena de Markov con los estados K (si sabe una palabra dada) o G (si está adivinando).

2. En el Problema 1, ¿cuál es la probabilidad de que haya aprendido la traducción correcta de una palabra dada en francés antes de adivinar cuatro veces?

3. En el Problema 1 ¿cuántas veces se debe repetir el experimento hasta que la probabilidad sea de al menos 98% de que el estudiante haya aprendido la palabra?

4. En el Problema 1, ¿cuál es el número esperado de veces que el estudiante estará adivinando hasta que aprende la palabra?

5. En el Problema 1, encuéntrese la matriz de transición de la cadena de Markov asociada con tres estados: adivinar correctamente, adivinar incorrectamente y saber.

6. En el Problema 5, ¿cuál es el número esperado de veces que el estudiante adivinará incorrectamente hasta que se aprende una palabra dada?

7. En el Problema 5, ¿cuál es el número esperado de veces que el estudiante adivinará correctamente hasta que aprende la palabra?

8. En un experimento se coloca un mono frente a cuatro puertas. Cada puerta tiene una marca azul, roja, verde o café. Detrás de la puerta verde hay un plátano. Se deja que el mono abra una de las puertas. Si escoge la puerta verde, se le recompensa con el plátano. Si escoge cualquier otra puerta se le muestra el plátano, pero no se le da. El experimento se repite volviendo a cambiar las posiciones de las marcas, con el plátano detrás de la puerta verde. El objetivo es determinar cuánto se tarda el mono en darse cuenta de que no es la puerta, sino el color, lo que determina la posición de la recompensa. Los experimentos previos con otros monos han indicado que el mono tiene aproximadamente un 40% de oportunidades de aprender lo que pasa después del primer intento. Como en el Problema 1, se necesitan otras suposiciones. Encuéntrese la matriz de transición de este experimento, como en el Problema 1.

9. En el Problema 8, ¿cuál es la probabilidad de que el mono haya aprendido las reglas antes de su tercer intento de tomar el plátano?

10. En el Problema 8, ¿cuántos intentos debe hacer el mono para tener al menos un 95% de certeza de que ha aprendido la manera de jugar?

11. En el Problema 8, ¿cuántos intentos, en promedio, hará el mono hasta que aprenda las reglas?

12. En el Problema 8 encuéntrese la matriz de transición de la cadena de Markov asociada con tres estados: adivinar correctamente, adivinar incorrectamente y aprender las reglas.

13. En el Problema 12, ¿cuál es el número esperado de veces que el mono adivinará incorrectamente hasta que aprende a jugar?

14. En el Problema 12, ¿cuál es el número esperado de veces que adivinará correctamente?

15. Demuéstrese la Fórmula (3) por inducción matemática.

16. En el modelo de este capítulo, se discutieron cadenas de Markov de dos y de tres estados. Sean $E(G)$, $E(G_C)$ y $E(G_I)$, respectivamente, el número esperado de adivinaciones en la cadena de Markov de dos estados, el número esperado de adivinaciones correctas en la cadena de Markov de tres estados y el número esperado de adivinaciones incorrectas en la cadena de Markov de tres estados. Demuéstrese que

$$E(G_C) + E(G_I) = E(G).$$

17. Si P está dada por (10), demuéstrese, por inducción, que

$$P^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{N}(1-c)^n & \left(1-\frac{1}{N}\right)(1-c)^n & 1-(1-c)^n \\ \frac{1}{N}(1-c)^n & \left(1-\frac{1}{N}\right)(1-c)^n & 1-(1-c)^n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

CAPÍTULO

11 Un modelo para la teoría de las colas

Se llama *cola** a una fila como en la frase "formemos cola para comprar los boletos". La teoría de las colas es una rama de las matemáticas que describe las *líneas de espera*. Hay muchas aplicaciones de esta teoría. Por ejemplo, el gerente de un supermercado quiere asegurarse de que (1) no va a perder dinero por tener demasiada gente impacientándose en largas colas de salida, y (2) que no perderá dinero por pagar empleados en las cajas que estén ociosos, sin clientes que atender. Otro ejemplo lo da un viajero en una línea aérea. Para comprar el boleto en el aeropuerto, uno tiene que (1) hacer cola para adquirir el boleto, (2) hacer cola para pasar por la sección de seguridad, (3) esperar que el avión que se ha de tomar salga de una cola de aviones que están esperando la salida, (4) hacer otro tanto en el aterrizaje, (5) esperar el equipaje y (6) hacer cola para tomar un taxi.

En estas situaciones y otras semejantes, es muy interesante contestar esta pregunta: ¿cuál es el porcentaje de tiempo que habrá n personas en una cola, con $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$? Por razones obvias, el gerente de un supermercado o el supervisor en cualquier modo de viaje necesita contestar esta pregunta para mantener niveles razonables de satisfacción de clientes y de utilidades. Un análisis general de los modelos de colas está fuera del alcance de este texto. Sin embargo mostraremos cómo, en un modelo simplificado, se puede usar la teoría de matrices y la teoría de las cadenas de Markov para obtener una respuesta a la pregunta planteada.

Describiremos nuestro modelo, usando como ejemplo una sola cola en el mostrador de los boletos de la línea aérea. Hacemos las siguientes suposiciones:

(A1) En un periodo de un minuto hay una probabilidad de 1/3 de que una persona se agregue a la cola y una probabilidad de 2/3 de que no se agregue

* **N. del R.** Este es el nombre común para una sucesión de objetos o seres animados enfilados para guardar su posición o turno. (Se llama en inglés *queue*, que se pronuncia "kiu".)

nadie a la fila. Así, estamos suponiendo que en cualquier intervalo de un minuto nunca se agregará más de una persona a la cola.

(A2) Si se está atendiendo a una persona en un intervalo, la probabilidad es de 3/8 de que la persona recibirá su boleto y saldrá de la cola en el siguiente intervalo o lapso.

(A3) Todas las probabilidades son independientes de lo que haya sucedido en periodos anteriores.

(A4) Una persona no puede ser atendida en el mismo momento en el que llegó a la cola.

(A5) A lo más, una persona puede ser atendida en un solo periodo de un minuto.

(A6) Por una medida de "anticongestionamiento", la cola se cierra si hay cuatro personas esperando en ella. Es decir, hay un máximo de cuatro personas en la cola en cualquier momento.

Podemos ver este modelo muy simplificado como una cadena de Markov con cinco estados, donde el estado del sistema se define como el número de personas en la cola, incluyendo la persona que está siendo atendida. Los cinco estados se representan por los números 0, 1, 2, 3 y 4. Calculemos ahora la matriz de transición para esta cadena de Markov. Está dada por

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{13}{24} & \frac{5}{24} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{13}{24} & \frac{5}{24} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{13}{24} & \frac{5}{24} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{8} & \frac{5}{8} \end{pmatrix} \end{array}.$$

Lo explicamos de la manera siguiente:

(i) En el primer renglón tenemos $p_{00} = 2/3$ y $p_{01} = 1/3$. Podemos pasar del estado 0 al estado 0 sólo si nadie se agrega a la cola. Por (A1) este evento tiene una probabilidad de 2/3; (A1) explica también por qué $p_{01} = 1/3$.

(ii) En el segundo renglón tenemos $p_{10} = 1/4$, $p_{11} = 13/24$ y $p_{12} = 5/24$. Para pasar del estado 1 al estado 0 deben ocurrir dos eventos independientes: primero, la persona en turno es atendida y, segundo, no llega ninguna nueva persona a la cola. La probabilidad del primer evento es de 3/8, (por (A2)), y la probabilidad del segundo evento es de 2/3 (por (A1)). Así que

$$p_{10} = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{4}.$$

Después, para pasar del estado 1 al estado 1, debe ocurrir uno de dos eventos mutuamente excluyentes:

(a) no es atendida ninguna persona y ninguna persona llega a la cola o

(b) se atiende a una persona y una persona se agrega a la fila.

La probabilidad de (a) es de $5/8 \cdot 2/3$, y la probabilidad de (b) es entonces de $3/8 \cdot 1/3$. Así que

$$p_{11} = \frac{5}{8} \cdot \frac{2}{3} + \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{3} = \frac{10}{24} + \frac{3}{24} = \frac{13}{24}.$$

Por último, para pasar del estado 1 al estado 2, no se debe haber atendido a ningún cliente (con probabilidad de $5/8$) y una persona se habrá agregado a la cola (con una probabilidad de $1/3$). Así que

$$p_{12} = \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{24}.$$

Obsérvese que

$$p_{10} + p_{11} + p_{12} = \frac{1}{4} + \frac{13}{24} + \frac{5}{24} = 1.$$

(iii) Los renglones 3 y 4 se obtienen como el renglón 2.

(iv) En el quinto renglón tenemos que $p_{43} = 3/8$ y $p_{44} = 5/8$. Para pasar del estado 4 al estado 3, se debe haber atendido a una persona. Nótese que nadie se puede agregar a la cola, que **ahora** está cerrada, según (A6).

Similarmente, para pasar del estado 4 al estado 4 se debe no haber atendido a ningún cliente (con una probabilidad de $5/8$).

Recuérdese de la Sección 9.1, que una cadena de Markov es regular si una potencia P^m de su matriz de transacción P tiene componentes estrictamente positivas. Usando una calculadora, determinamos las primeras cuatro potencias de P a cuatro decimales:

$$P = \begin{pmatrix} 0.6667 & 0.3333 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.2500 & 0.5417 & 0.2083 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.2500 & 0.5417 & 0.2083 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.2500 & 0.5417 & 0.2083 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.3750 & 0.6750 \end{pmatrix}$$

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0.5278 & 0.4028 & 0.0694 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.3021 & 0.4288 & 0.2257 & 0.0434 & 0.0000 \\ 0.0625 & 0.2709 & 0.3976 & 0.2257 & 0.0434 \\ 0.0000 & 0.0625 & 0.2709 & 0.4236 & 0.2430 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0938 & 0.4375 & 0.4687 \end{pmatrix}$$

$$P^3 = \begin{pmatrix} 0.4526 & 0.4115 & 0.1215 & 0.0145 & 0.0000 \\ 0.3086 & 0.3894 & 0.2224 & 0.0705 & 0.0090 \\ 0.1094 & 0.2670 & 0.3282 & 0.2214 & 0.0741 \\ 0.0156 & 0.1016 & 0.2657 & 0.3770 & 0.2401 \\ 0.0000 & 0.0235 & 0.1602 & 0.4323 & 0.3841 \end{pmatrix}$$

$$P^4 = \begin{pmatrix} 0.4046 & 0.4041 & 0.1552 & 0.0332 & 0.0030 \\ 0.3031 & 0.3694 & 0.2192 & 0.0879 & 0.0203 \\ 0.1397 & 0.2631 & 0.2888 & 0.2161 & 0.0924 \\ 0.0358 & 0.1267 & 0.2593 & 0.3496 & 0.2286 \\ 0.0059 & 0.0528 & 0.1998 & 0.4116 & 0.3301 \end{pmatrix}$$

Como P^4 tiene componentes estrictamente positivas, se advierte que nuestra cadena de Markov es regular.

Como P es una matriz regular, hay un único vector de probabilidades $\mathbf{t}$ cuyas componentes son todas positivas, y tal que $\mathbf{t}P = \mathbf{t}$. Además, las matrices P^m tienden a matriz T (cuando crece m), cada uno de cuyos renglones es igual al vector $\mathbf{t}$. En nuestro caso las componentes de $\mathbf{t}$ son las probabilidades a largo plazo de la longitud de la fila. Para determinar $\mathbf{t}$ se parte de

$$\mathbf{t}P = \mathbf{t}$$

o sea

$$(p_0, p_1, p_2, p_3, p_4)\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{13}{24} & \frac{5}{24} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{13}{24} & \frac{5}{24} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{13}{24} & \frac{5}{24} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{8} & \frac{5}{8} \end{pmatrix} = (p_0, p_1, p_2, p_3, p_4)$$

y por tanto

$$\begin{aligned} \tfrac{2}{3}p_0 + \tfrac{1}{4}p_1 &= p_0 \\ \tfrac{1}{3}p_0 + \tfrac{13}{24}p_1 + \tfrac{1}{4}p_2 &= p_1 \\ \tfrac{5}{24}p_1 + \tfrac{13}{24}p_2 + \tfrac{1}{4}p_3 &= p_2 \\ \tfrac{5}{24}p_2 + \tfrac{13}{24}p_3 + \tfrac{3}{8}p_4 &= p_3 \\ \tfrac{5}{24}p_3 + \tfrac{5}{8}p_4 &= p_4 \end{aligned}$$

Ahora, como $\mathbf{t}$ es un vector de probabilidades, tenemos también que

$$p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1.$$

Entonces, combinando términos, obtenemos el sistema

$$\begin{aligned} -\tfrac{1}{3}p_0 + \tfrac{1}{4}p_1 &= 0 \\ \tfrac{1}{3}p_0 + \tfrac{1}{24}p_1 + \tfrac{1}{4}p_2 &= 0 \\ \tfrac{5}{24}p_1 + \tfrac{11}{24}p_2 + \tfrac{1}{4}p_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tfrac{5}{24}\,p_2 + \tfrac{11}{24}\,p_3 - \tfrac{3}{8}\,p_4 &= 0 \\ \tfrac{5}{24}\,p_3 - \tfrac{3}{8}\,p_4 &= 0 \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 &= 1. \end{aligned}$$

Escribimos ahora el sistema en forma de matriz aumentada y lo resolvemos por reducción de renglones. Para simplificar las cosas, empezamos multiplicando por 24 las primeras cinco ecuaciones:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -8 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & -11 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -11 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -11 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -9 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{M_1\left(\frac{1}{8}\right)} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -0.75 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & -11 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -11 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -11 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -9 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{A_{1,2}(-8) \\ A_{1,6}(-1)}}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -0.75 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -11 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -11 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -9 & 0 \\ 0 & 1.75 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{M_2\left(-\frac{1}{5}\right)} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -0.75 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -11 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -11 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -9 & 0 \\ 0 & 1.75 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{A_{2,1}(0.75) \\ A_{2,3}(-5) \\ A_{2,6}(-1.75)}}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -11 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 3.1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{M_3\left(-\frac{1}{5}\right)} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -0.9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -11 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 3.1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{A_{3,1}(0.9) \\ A_{3,2}(1.2) \\ A_{3,4}(-5) \\ A_{3,6}(-3.1)}}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1.08 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1.44 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4.72 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Como el quinto renglón es el cuarto multiplicado por -1, lo eliminamos y continuamos dividiendo el cuarto renglón entre -5:

$$\xrightarrow{M_4\left(-\frac{1}{5}\right)} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1.08 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1.44 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4.72 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{A_{4,1}(1.08) \\ A_{4,2}(1.44) \\ A_{4,3}(1.2) \\ A_{4,4}(-4.72)}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1.944 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2.592 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2.16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9.496 & 1 \end{array}\right)$$

Hasta aquí, todos los números son exactos. Los cálculos restantes los haremos con una exactitud de cinco decimales:

$$M_5\left(\frac{1}{9.496}\right)\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1.944 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2.592 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2.16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0.100531 \end{array}\right) \begin{array}{c} A_{5,1}(1.944) \\ A_{5,2}(2.592) \\ A_{5,3}(2.16) \\ A_{5,4}(1.8) \\ \ \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.20472 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0.27296 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0.22746 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0.18955 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0.10531 \end{array}\right)$$

Así, el vector fijo de probabilidades está dado por

$$(p_0, p_1, p_2, p_3, p_4) = (0.20472, 0.27296, 0.22746, 0.18955, 0.10531).$$

Esto significa, por ejemplo, que el vendedor de boletos está ocioso aproximadamente 20% del tiempo (ya que $p_0 \approx 0.20$). Por otra parte, la fila está cerrada casi 10% del tiempo, puesto que $p_4 \approx 0.10$, y esto significa que hay cuatro personas en la cola aproximadamente 10% del tiempo. Finalmente, hay una persona en la cola casi el 27% del tiempo; dos personas, aproximadamente el 23% del tiempo; y tres, casi el 19% del tiempo.

Hay que resaltar otra vez que se está manejando un modelo muy simplificado. Sin embargo, este ejemplo muestra el poder de las cadenas de Markov combinado con la teoría de las matrices para analizar casos interesantes.

Problemas • Capítulo 11

1. En el modelo de colas descrito en este capítulo, supóngase que la probabilidad es de 1/5 que una persona se agregue a la cola, y de 4/5 de que no se agregue nadie a la fila. Supóngase que la probabilidad es de 1/2 que la persona que está siendo atendida salga de la cola en un intervalo de tiempo. Síganse considerando las suposiciones (A3) a (A6).

   (a) Halle la matriz asociada con la cadena de Markov inherente al modelo.

   (b) Demuestre que la cadena de Markov es regular.

   (c) Obtenga las probabilidades a largo plazo de que haya n personas en la cola para $n = 0, 1, 2, 3$ y 4.

2. En un supermercado, el número de personas que se agrega a la cola "rápida" (gente con menos de 10 artículos) es aleatorio pero tiene un promedio de 7 personas cada 10 minutos entre el mediodía y las 2:00 p.m. La persona que está siendo atendida saldrá de la cola un minuto después con una probabilidad de 3/4. Si hay más de cinco personas en la fila, se cierra la misma. Estímese el porcentaje de tiempo que

   (a) la persona que atiende la caja esté inactiva y

   (b) que la línea de espera estará cerrada.

CAPÍTULO 12

Un modelo de crecimiento de población

En este capítulo se mostrará cómo se pueden usar la teoría de los valores y vectores característicos para analizar ciertos modelos de crecimiento de población. La primera parte del capítulo contiene un análisis de un modelo que describe el crecimiento de una población.*

Supóngase que para cierta especie, la población en un periodo (que puede ser de una hora, una semana, un año, etc.) es un múltiplo constante de la población en el periodo anterior. Esto podría suceder, por ejemplo, si las generaciones son distintas y cada organismo produce μ descendientes y después muere. Un ejemplo son las bacterias, que se dividen en dos a intervalos regulares. Entonces $\mu = 2$. Sea p_n la población al final del periodo n-ésimo. Entonces, bajo las suposiciones anteriores, tenemos que

$$p_n = \mu p_{n-1}.$$

Así, si p_0 denota la población inicial, se tiene que $p_1 = \mu p_0$, $p_2 = \mu p_1 = \mu(\mu p_0) = \mu^2 p_0$, etcétera, por lo que

$$p_n = \mu^n p_0. \tag{1}$$

Si $\mu = 1$, la población permanece constante. Si $\mu < 1$, la población disminuye, y si $\mu > 1$, aumenta.

Este modelo es obviamente demasiado simplista para que sea de mucha utilidad. El número de descendientes producidos no es sólo función del número de adultos sino también de la edad de los adultos. Por ejemplo, una población humana en la que todas las mujeres tuvieran más de 50 años de edad, tendría

* El material de esta parte proviene de un artículo por D. Cooke, "A 2 × 2 Matrix Model of Population Growth", en *The Mathematical Gazette*, 61(416), 1977, pp. 120-123.

una tasa de multiplicación muy distinta que otra población en la que las mujeres tuvieran todas edades entre 20 y 30 años. Para desarrollar una descripción más exacta de la realidad, usamos un modelo matricial que permite aplicar distintas tasas de multiplicación a los grupos de distintas edades.

Observamos ahora un modelo de crecimiento de la población para una cierta especie de aves. En esta población de aves, suponemos que el número de hembras es igual al número de machos. Sea $p_{j,n-1}$ la población de hembras jóvenes (inmaduras) en el año $n-1$, y sea $p_{a,n-1}$ el número de hembras adultas en el año $n-1$. Algunos de los pájaros jóvenes morirán durante el año. Suponemos que una cierta proporción, α, de los pájaros jóvenes sobreviven para llegar a ser adultos en la primavera del año n. Cada pájaro hembra sobreviviente produce huevos más tarde en la primavera, que empollados, producen, en promedio, k hembras jóvenes en la siguiente estación primaveral. Los adultos también mueren, y la proporción de adultos que sobrevive de una primavera a la otra es β.

Es un hecho interesante y notable que no resulta demasiado simplista suponer que la proporción de los animales que sobreviven es constante. Esto se observa como el caso más natural en las poblaciones naturales de las aves que han sido estudiadas. La tasa de supervivencia de los adultos de muchas especies de aves es independiente de la edad. Tal vez pocos pájaros en libertad sobrevivan lo suficiente como para exhibir los efectos de la vejez. Además, para muchas de las especies, el número de descendientes parece que no recibe la influencia de la edad de la madre.

En la notación introducida anteriormente, $p_{j,n}$ y $p_{a,n}$ representan, respectivamente, las poblaciones de hembras jóvenes y adultas en el año n. Juntando toda la información dada, llegamos al siguiente sistema 2×2:

$$\begin{aligned} p_{j,n} &= kp_{a,n-1} \\ p_{a,n} &= \alpha p_{j,n-1} + \beta p_{a,n-1} \end{aligned} \tag{2}$$

o

$$\mathbf{p}_n = A\mathbf{p}_{n-1} \tag{3}$$

donde

$$\mathbf{p}_n = \begin{pmatrix} p_{j,n} \\ p_{a,n} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & k \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}.$$

Está claro de (3) que $\mathbf{p}_1 = A\mathbf{p}_0$, $\mathbf{p}_2 = A\mathbf{p}_1 = A(A\mathbf{p}_0) = A^2\mathbf{p}_0, \ldots$, y así sucesivamente, por lo que

$$\boxed{\mathbf{p}_n = A^n\mathbf{p}_0} \tag{4}$$

donde $\mathbf{p}_0$ es el vector de las poblaciones iniciales de hembras jóvenes y adultas.

La Ecuación (4) es como la Ecuación (1), excepto que se ha podido distinguir entre las tasas de supervivencia de los pájaros jóvenes y adultos.

Ejemplo 1 Sea

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0.3 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

Esto significa que cada hembra adulta produce dos descendientes hembras. Como el número de machos se supone igual al número de hembras, cada hembra produce al menos cuatro huevos. Del modelo se ve que α y β están en el intervalo [0, 1]. Como los pájaros jóvenes tienen menor probabilidad de supervivencia que los adultos, se debe tener que $\alpha < \beta$.

En la tabla siguiente, suponemos que inicialmente hay diez hembras (y diez machos) adultas y que no hay pájaros jóvenes. Los cálculos se hicieron en una computadora, pero el trabajo no sería demasiado laborioso si se utilizara una calculadora de mano. Por ejemplo,

$$\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0.3 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 5 \end{pmatrix},$$

de manera que $p_{j,1} = 20$, $p_{a,1} = 5$, la población femenina total después de un año es de 25, y la relación de hembras jóvenes a adultas es de 4 a 1. En el segundo año,

$$\mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0.3 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 8.5 \end{pmatrix},$$

lo que redondeamos a $\begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix}$, porque no puede haber 8 1/2 pájaros adultos. En la tabla se tabularon las relaciones $p_{j,n}/p_{a,n}$ y las relaciones T_n/T_{n-1} del número total de hembras en los años sucesivos.

Año n	Núm. de aves jóvenes $p_{j,n}$	Núm. de aves adultas $p_{a,n}$	Población total de hembras T_n en el año n	$p_{j,n}/p_{a,n}$*	T_n/T_{n-1}*
0	0	10	10	0	—
1	20	5	25	4.00	2.50
2	10	8	18	1.18	0.74
3	17	7	24	2.34	1.31
4	14	8	22	1.66	0.96
5	17	8	25	2.00	1.13
10	22	12	34	1.87	1.06
11	24	12	36	1.88	1.07
12	25	13	38	1.88	1.06
20	42	22	64	1.88	1.06

* Los datos en estas columnas se obtienen después de redondear los números en las columnas anteriores. Así, por ejemplo, en el año 2 se tiene que $p_{j,2}/p_{a,2} = 10/8.5 = 1.176470588 \approx 1.18$.

En la tabla aparece que la relación $p_{j,n}/p_{a,n}$ se está acercando a la constante 1.88, mientras que la población total está aumentando a una tasa constante de 6% al año. Veamos si es posible determinar por qué es así en este caso.

Primero regresamos al Caso general (4). Supóngase que A tiene los vectores característicos reales y distintos λ_1 y λ_2 con vectores característicos correspondientes $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$. Como $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son linealmente independientes, podemos escribir

$$\mathbf{p}_0 = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 \tag{5}$$

para algunos números reales a_1 y a_2. Entonces (4) se transforma en

$$\mathbf{p}_n = A^n(a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2). \tag{6}$$

Pero $A\mathbf{v}_1 = \lambda_1\mathbf{v}_1$ y $A^2\mathbf{v}_1 = A(A\mathbf{v}_1) = A(\lambda_1\mathbf{v}_1) = \lambda_1 A\mathbf{v}_1 = \lambda_1(\lambda_1\mathbf{v}_1) = \lambda_1^2\mathbf{v}_1$. Así puede verse que $A^n\mathbf{v}_1 = \lambda_1^n\,\mathbf{v}_1$, $A^n\mathbf{v}_2 = \lambda_2^n\,\mathbf{v}_2$, y de (6),

$$\mathbf{p}_n = a_1\,\lambda_1^n\,\mathbf{v}_1 + a_2\lambda_2^n\,\mathbf{v}_2. \tag{7}$$

La ecuación característica de A es

$$\begin{vmatrix} -\lambda & k \\ \alpha & \beta-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \beta\lambda - k\alpha = 0$$

o sea

$$\lambda = \frac{\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 4\alpha k}}{2}.$$

Por hipótesis, $k > 0$, $0 < \alpha < 1$ y $0 < \beta < 1$, por lo que $4\alpha k > 0$, y $\beta^2 + 4\alpha k > 0$, lo que quiere decir que los valores característicos son efectivamente reales y distintos, y que uno de los valores característicos, λ_1, es positivo; otro λ_2, es negativo, y $|\lambda_1| > |\lambda_2|$. Podemos escribir (7) como

$$\mathbf{p}_n = \lambda_1^n\left(a_1\,\mathbf{v}_1 + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^n a_2\mathbf{v}_2\right). \tag{8}$$

Como $\left|\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\right| < 1$, se ve que $(\lambda_2/\lambda_1)^n$ se hace muy pequeño al crecer n. Así, para n grande,

$$\mathbf{p}_n \approx a_1\lambda_1^n\mathbf{v}_1. \tag{9}$$

Esto quiere decir que a la larga la distribución de edades se estabiliza y es proporcional a $\mathbf{v}_1$. Cada grupo de edades cambiará por un factor de λ_1 cada año. Así, a largo plazo, la Ecuación (4) actúa exactamente como la Ecuación (1). A corto plazo, es decir, antes de que se alcance la "estabilidad", los números oscilan. La magnitud de esta oscilación depende de la magnitud de λ_2/λ_1 (que es negativa, explicando así la oscilación).

Ejemplo 1 *(Continuación)*

Para

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0.3 & 0.5 \end{pmatrix},$$

tenemos que $\lambda^2 - 0.5\lambda - 0.6 = 0$, o bien

$$\lambda = \frac{0.5 \pm \sqrt{0.25 + 2.4}}{2} = \frac{0.5 \pm \sqrt{2.65}}{2},$$

así que $\lambda_1 = 1.06$ y $\lambda_2 = -0.56$. Esto explica el 6% de aumento en la población que se observó en la última columna de la tabla. Correspondiendo al valor característico $\lambda_1 = 1.06$, calculamos

$$(A - 1.06I)\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1.06 & 2 \\ 0.3 & -0.56 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

o sea $1.06x_1 = 2x_2$, por lo que $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.53 \end{pmatrix}$ es un vector característico. De manera semejante

$$(A + 0.56)\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0.56 & 2 \\ 0.3 & 1.06 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

por lo que $0.56x_1 + 2x_2 = 0$ y $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.28 \end{pmatrix}$ es un segundo vector característico. Obsérvese que en $\mathbf{v}_1$ tenemos $1/0.53 \approx 1.88$. Esto explica la relación $p_{j,n}/p_{a,n}$ en la quinta columna de la tabla.

Observación. En los cálculos anteriores se perdió precisión porque se hizo redondeo a sólo dos decimales. Se puede obtener una exactitud mucho mayor usando una calculadora manual o una computadora. Por ejemplo, utilizando una calculadora manual, se obtiene con facilidad, $\lambda_1 = 1.06394103$, $\lambda_2 = -0.5639410298$,

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.531970515 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.2819705149 \end{pmatrix},$$

y la relación de $p_{j,n}$ a $p_{a,n}$ se ve que es de $1/0.5319710515 \approx 1.879801537$.

Es notable cuánta información queda disponible de un simple cálculo de valores característicos. Es muy interesante saber si una población crecerá o se reducirá en su totalidad. Una población aumentará si $\lambda_1 > 1$ y la condición para

$$\frac{\beta + \sqrt{\beta^2 + 4\alpha k}}{2} > 1, \quad \text{o bien} \quad \sqrt{\beta^2 + 4\alpha k} > 2 - \beta,$$

de manera que

$$\beta^2 + 4\alpha k > (2 - \beta)^2 = 4 - 4\beta + \beta^2$$

Esto nos lleva a $4\alpha k > 4 - 4\beta$, es decir,

$$\boxed{k > \frac{1-\beta}{\alpha} \qquad (10)}$$

En el Ejemplo 1 se tenía $\beta = 0.5$, $\alpha = 0.3$, de donde (10) se cumple si $k > 0.5/0.3 \approx 1.67$.

En este punto sería adecuado describir dos limitaciones obvias de este modelo:

(1) Las tasas de natalidad y de mortalidad frecuentemente cambian de año a año y dependen particularmente del clima. Este modelo supone un ambiente constante.

(2) Los ecologistas han descubierto que para muchas especies las tasas de natalidad y de mortalidad varían según el tamaño de la población. En particular, una población no puede crecer cuando ha llegado a cierto nivel de tamaño, debido a los efectos de recursos limitados de alimentación y a la sobrepoblación. Es evidente que una población no puede crecer de manera indefinida a una tasa constante. De otra manera, esa población llenaría la Tierra.

A pesar de estas limitaciones, el modelo puede ser muy útil en situaciones relacionadas con ciertas especies consideradas en un periodo relativamente corto.

El modelo de crecimiento de la población de los pájaros que describimos es un caso especial de lo que se llama **modelo de crecimiento de población de Leslie,** que se desarrolló alrededor de 1940. En el modelo de Leslie, las hembras se clasifican en m clases por edades, en vez de en dos. Se supone que todas las clases de las edades son de igual amplitud. Así, si M años es la máxima edad (teórica) en años alcanzable por una hembra de la especie, cada grupo de edades representa M/m años. Denominamos $G_1, G_2, \ldots, G_m$ a los m grupos de edades. Entonces resulta que

Grupo	Edades representadas (en función de un intervalo)
G_1	$[0, M/m)$
G_2	$[M/m, 2M/m)$
G_3	$[2M/m, 3M/m)$
$\vdots$	$\vdots$
G_{m-1}	$[(n-2)M/m, (n-1)M/m)$
G_m	$[(n-1)M/m, M]$

Ahora hacemos suposiciones muy similares a las anteriores:

(a) ***Tiempos de Observación***. Observamos la población en intervalos de tiempo iguales a las amplitudes de los grupos de edades. Entonces

$$t_0 = 0$$

$$t_1 = M/m$$

$$t_2 = 2M/m$$

$$t_n = nM/m.$$

(b) ***Variables de la Población***. Se define que

$P_{i,n}$ = número de hembras en el grupo i-ésimo de las edades, G_i, después del periodo n.

(c) ***Suposiciones de Nacimientos***. Definimos

k_i = número promedio de hembras nacidas en un solo periodo a una hembra en G_i.

Suponemos que al menos una $k_i > 0$, por lo que deben ocurrir por lo menos algunos nacimientos.

(d) ***Suposición de Supervivencia***. Por definición

β_i = proporción de hembras en G_i que sobreviven para llegar a formar parte del grupo $(i + 1)$-ésimo de edades G_{i+1}.

Claramente,

$$0 \leq \beta_i \leq 1$$

Suponemos que $\beta_i > 0$. De otra forma no habría hembras en el grupo $i + 1$ de las edades.

Ahora juntamos todos estos hechos. Primero, ¿cuántas hembras hay en G_1 después del periodo n? Es decir ¿cuánto vale $p_{1,n}$? Evidentemente

$p_{1,n}$ = número total de hembras nacidas de las hembras en todos los m grupos de las edades entre el tiempo t_{n-1} y el t_n.

Así que

$$p_{1,n} = k_1 p_{1,n-1} + k_2 p_{2,n-1} + \ldots + k_m p_{m,n-1}. \tag{11}$$

El resto de los cálculos son más sencillos. El número de hembras en G_{i+1} en el tiempo t_n es igual al número de hembras en G_i en el tiempo t_{n-1} que pudieron sobrevivir para pasar a G_{i+1}. Así que

$$p_{i+1,n} = \beta_i p_{i,n-1}. \tag{12}$$

Ahora definimos

$$\mathbf{p}_n = \begin{pmatrix} p_{1,n} \\ p_{2,n} \\ \vdots \\ p_{m,n} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & & k_m \\ \beta_1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & \beta_2 & \cdots & & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \beta_{n-1} & 0 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Entonces las Ecuaciones (11) y (12) pueden escribirse en la forma más compacta

$$\mathbf{p}_n = A\mathbf{p}_{n-1}. \tag{14}$$

Si $p_0 = \begin{pmatrix} p_{1,0} \\ p_{2,0} \\ \vdots \\ p_{m,0} \end{pmatrix}$ es un vector que da el número inicial de hembras en cada grupo de edades, se ve inmediatamente, de (14), que

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1 &= A\mathbf{p}_0 \\ \mathbf{p}_2 &= A\mathbf{p}_1 = A^2\mathbf{p}_0 \\ \mathbf{p}_3 &= A\mathbf{p}_2 = A^3\mathbf{p}_0 \\ &\vdots \\ \mathbf{p}_n &= A\mathbf{p}_{n-1} = A^n\mathbf{p}_0. \end{aligned} \tag{15}$$

Obsérvese la semejanza entre las Ecuaciones (15) y (4).

Como vimos antes, en el caso 2×2, la matriz A tiene dos valores característicos reales λ_1 y λ_2 con $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$ y $|\lambda_1| > |\lambda_2|$. Cuando sucede esto decimos que λ_1 es un **valor característico estrictamente dominante**. Por desgracia, esto no sucede siempre en una matriz A si $m > 2$. Varias cosas pueden andar mal. Primero, la matriz A, definida por (13), puede tener valores característicos complejos, y esto sucede con frecuencia. Segundo, si λ_i es el valor característico de mayor valor absoluto, podemos tener otro valor característico λ_j, con $|\lambda_i| = |\lambda_j|$. Sin embargo, el teorema siguiente, que enunciamos sin demostración, resuelve la mayor parte de estas dificultades.

Teorema 1 Sea A definida por (13) y supongamos que

(i) $k_i \geq 0$ para $i = 1, 2, \ldots, m$.

(ii) Al menos dos k_i sucesivas son estrictamente positivas. Es decir, existe un número j tal que $k_j > 0$ y $k_{j+1} > 0$.

(iii) $0 < b_i \leq 1$ para $i = 1, 2, \ldots, m$.

Entonces

(a) La matriz A tiene un único valor característico positivo λ_1.

(b) λ_1 es simple. Es decir, λ_1 tiene multiplicidad algebraica de 1.

(c) Correspondiendo a λ_1 hay un vector característico $\mathbf{v}$ con componentes positivas.

(d) Cualquier otro valor característico, λ_i, de A satisface

$$|\lambda_i| < \lambda_1.$$

Nota. Es necesaria la hipótesis (ii) para poder concluir (d) (véase el Problema 10).

Usando este teorema podemos analizar este sistema más complicado de manera semejante a la que se usó para analizar el modelo anterior de la población de los pájaros. Para simplificar las cosas, supongamos que A tiene n vectores característicos linealmente independientes.* Es decir, suponemos que A es diagonalizable. Sean $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ estos vectores característicos. Entonces, como $\mathbf{p}_0 \in \mathbb{R}^m$ y $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ forman una base en $\mathbb{R}^m$, existen constantes $c_1, c_2, \ldots, c_m$, tales que

$$\mathbf{p}_0 = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_m\mathbf{v}_m. \tag{16}$$

Pero, como vimos antes,

$$A^n\mathbf{v}_i = \lambda^n\mathbf{v}_i. \tag{17}$$

Introduciendo (16) y (17) en (15), obtenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{p}_n &= A^n\mathbf{p}_0 = A^n(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_m\mathbf{v}_m)\\ &= c_1\lambda_1^n\mathbf{v}_1 + c_2\lambda_2^n\mathbf{v}_2 + \ldots + c_m\lambda_m^n\mathbf{v}_m.\end{aligned} \tag{18}$$

Luego, factorizando λ_1^n en el lado derecho de (18), queda

$$\mathbf{p}_n = \lambda_1^n\left[c_1\mathbf{v}_1 + c_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^n\mathbf{v}_2 + \ldots + c_m\left(\frac{\lambda_m}{\lambda_1}\right)^n\mathbf{v}_m\right]. \tag{19}$$

Pero, por el Teorema 1(d), tenemos que $\left|\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right| < 1$, por lo que $\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^n \to 0$ cuando $n \to \infty$. Así que, para n grande,

$$\mathbf{p}_n \approx c_1\lambda_1^n\mathbf{v}_1 \tag{20}$$

---

* Esta suposición es realmente innecesaria. Sin embargo, si A no es diagonalizable, el análisis se hace más complicado. Entonces, es necesario trabajar con vectores característicos generalizados. Estos se presentan en la reducción de A a su forma canónica de Jordan.

Igual que antes, vemos que a largo plazo se estabiliza la distribución de las edades a un valor proporcional a $\mathbf{v}_1$. Cada uno de los grupos de edades cambiará por un factor λ_1 anualmente. Además, si "normalizamos" $\mathbf{v}_1$ de manera que sus componentes tengan una suma de 1, las componentes de $\mathbf{v}_1$ expresa los porcentajes (eventuales) de las hembras en cada uno de los grupos de las edades. Por último notamos que

si $\lambda_1 > 1$, la población finalmente crece,
si $\lambda_1 = 1$, la población es estable finalmente,

y

si $\lambda_1 < 1$, la población finalmente disminuye.

Ejemplo 2 Aplicamos este modelo al crecimiento de una población humana. Para simplificar suponemos que ninguna mujer de menos de 15 años o de más de 45 años tiene descendencia. Además, simplificamos el modelo observando sólo los tres siguientes grupos de las edades

$$G_1 : [0, 15)$$
$$G_2 : [15, 30)$$
$$G_3 : [30, 45).$$

Entonces, obviamente, $k_1 = 0$. Suponemos además que $k_2 = 1$, $k_3 = 0.5$, $\beta_1 = 0.9$ y $\beta_2 = 0.8$ La matriz A está dada por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0.5 \\ 0.9 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 \end{pmatrix}.$$

Continuando, tenemos que

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0.5 \\ 0.9 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0.8 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 0.9\lambda + 0.36 = 0.$$

Las raíces de este polinomio (con cinco decimales) son

$$\lambda_1 = 1.10690$$
$$\lambda_2 = -0.55345 + 0.13756i$$
$$\lambda_3 = -0.55345 + 0.13756i.$$

Nótese que

$$|\lambda_2| = |\lambda_3| = \sqrt{(-0.55345)^2 + (0.13756)^2} \approx 0.5703.$$

Para encontrar $\mathbf{v}_1$, resolvemos

$$\begin{pmatrix} -1.1069 & 1 & 0.5 \\ 0.9 & -1.1069 & 0 \\ 0 & 0.8 & -1.1069 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Una solución es $x_1 = 1.7017$, $x_2 = 1.3836$, $x_3 = 1$. Como $x_1 + x_2 + x_3 = 4.0853$, dividimos entre 4.0853 para obtener el vector característico normalizado

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 0.41654 \\ 0.33868 \\ 0.24478 \end{pmatrix}.$$

Entonces, podemos concluir lo siguiente:

(i) Después de muchos años, la población aumentará en aproximadamente 10.7% en cada periodo de 15 años.

(ii). El porcentaje de mujeres de 45 años o menos, será finalmente de 41.6% de menos de 15 años, 33.9% entre 15 y 30 años y 24.5% entre 30 y 45 años.

Problemas • Capítulo 12

En los Problemas 1-6 use el modelo de la población de aves discutido en la primera parte del capítulo.

En los Problemas 1-3 encuentre el número de hembras jóvenes y adultas después de 1, 2, 5, 10, 19 y 20 años. Obtenga después las relaciones a largo plazo de $p_{j,n}$ a $p_{a,n}$ y de T_n a T_{n-1}.

(Sugerencia: Úsense las Ecuaciones (7) y (9) y una calculadora manual y hágase redondeo a cuatro decimales.)

1. $\mathbf{p}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \end{pmatrix}$: $k = 3$, $\alpha = 0.4$, $\beta = 0.6$.

2. $\mathbf{p}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \end{pmatrix}$: $k = 1$, $\alpha = 0.3$, $\beta = 0.4$.

3. $\mathbf{p}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \end{pmatrix}$: $k = 4$, $\alpha = 0.7$, $\beta = 0.8$.

4. Demuestre que si $\alpha = \beta$ y $\alpha > 1/2$, entonces aumentará siempre la población de aves a largo plazo, si se produce al menos una hembra en promedio como descendencia de cada hembra adulta.

5. Demuestre que, a la larga, la relación $p_{j,n}/p_{a,n}$ tiende al valor k/λ_1.

6. Suponga que dividimos a los pájaros adultos en dos grupos de edades: los de 1 a 5 años, y los de más de 5 años. Considere que la tasa de supervivencia para los pájaros del primer grupo es β, mientras que para los del segundo grupo es γ (y $\beta > \gamma$). Supóngase que los pájaros del primer grupo se dividen por edades de

manera equitativa (es decir, si hay 100 pájaros en el grupo, entonces 20 son de 1 año de edad, 20 son de 2 años, etc.). Formule un modelo de matriz 3×3 para esta situación.

7. En el Ejemplo 2 suponga que inicialmente hay 10,000 hembras de menos de 15 años, 15,000 hembras entre 15 y 29 años y 8,000 hembras entre 30 y 45 años. Calcule el número de hembras en cada uno de estos grupos de edad después de (a) 1 año, (b) 3 años, (c) 5 años y (d) 10 años.
8. En el Ejemplo 2 considere que hay un cuarto grupo de mujeres, entre 45 y 60 años de edad. Sea $\beta_3 = 0.7$. Estime los porcentajes de mujeres en cada uno de los cuatro grupos de edad después de un número grande de años.
9. Describa las proporciones de equilibrio de una población dividida en tres grupos de edades, donde $k_1 = k_2 = 3$, $k_3 = 2$, $\beta_1 = 0.8$ y $\beta_2 = 0.6$.
10. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcule los valores característicos de A y demuestre que todos tienen el mismo valor absoluto.

11. Sea A la matriz dada en (13) y sea

$$f(x) = \frac{k_1}{x} + \frac{k_2\beta_1}{x^2} + \frac{k_3\beta_1\beta_2}{x^3} + \cdots + \frac{k_n\beta_1\beta_2 \ldots \beta_{n-1}}{x^n}$$

Demuestre que si λ es un valor característico de A, entonces $f(\lambda) = 1$.

12. Sea $f(x)$ la función dada en el Problema 11. Pruébese que
    (a) $f(x)$ es una función estrictamente decreciente,
    (b) $f(x)$ tiene una asíntota vertical en $x = 0$, y
    (c) $f(x) \to 0$ cuando $x \to \infty$.
13. Usando los resultados de los Problemas 11 y 12 demuestre que la matriz A tiene exactamente una raíz positiva.
14. Pruebe que $\lambda_1 = 1$ si y sólo si

$$k_1 + k_2\,\beta_1 + k_3\beta_1\beta_2 + \ldots + k_n\beta_1\beta_2 \ldots \beta_{n-1} = 1$$

15. Demuestre que la cantidad

$$k_1 + k_2\,\beta_1 + k_3\beta_1\beta_2 + \ldots + k_n\beta_1\beta_2 \ldots \beta_{n-1}$$

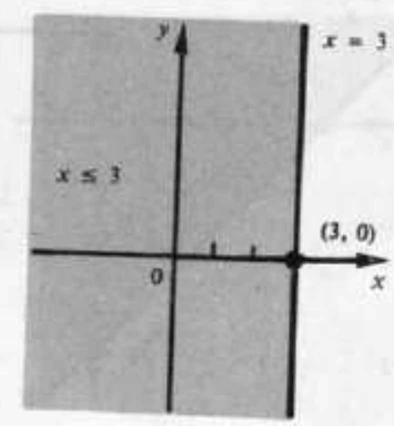
representa el número esperado de hembras de la descendencia nacidas de una hembra durante su tiempo de vida.

Respuestas a problemas seleccionados

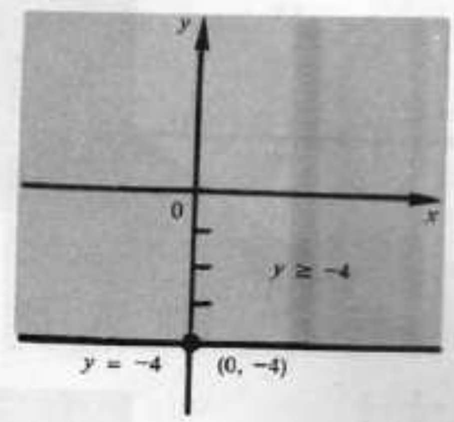
Capítulo 1

Sección 1.1

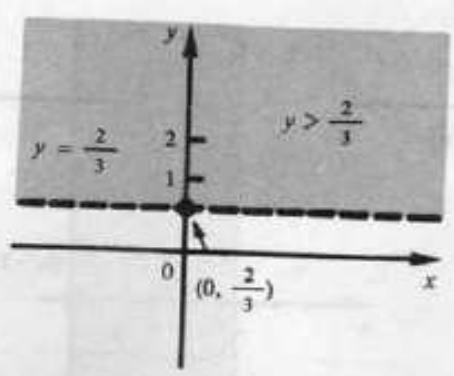
1.



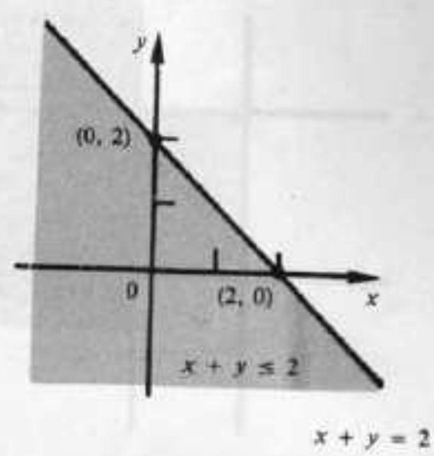
3.



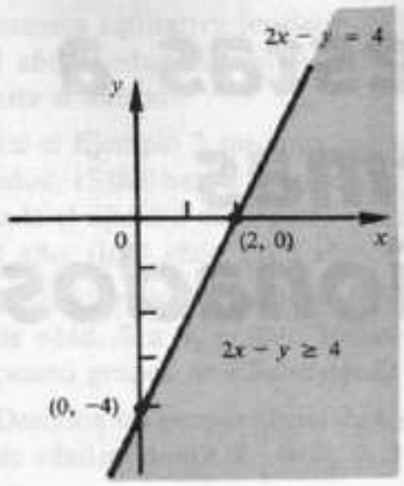
5.



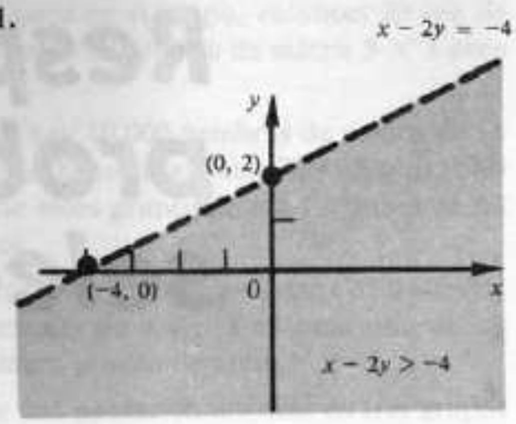
7.



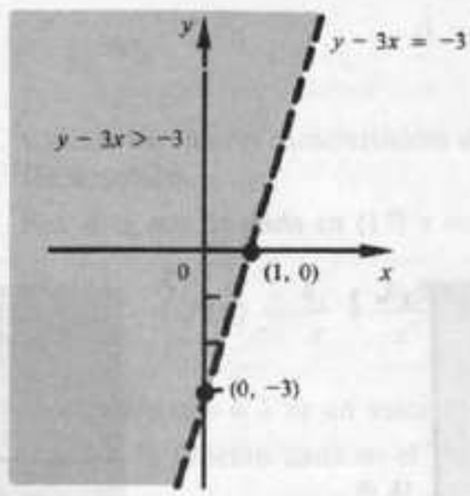
9.



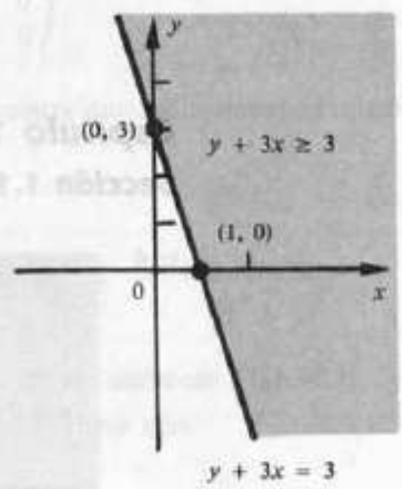
11.



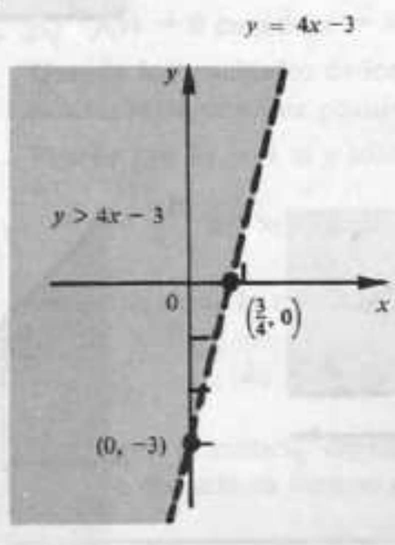
13.



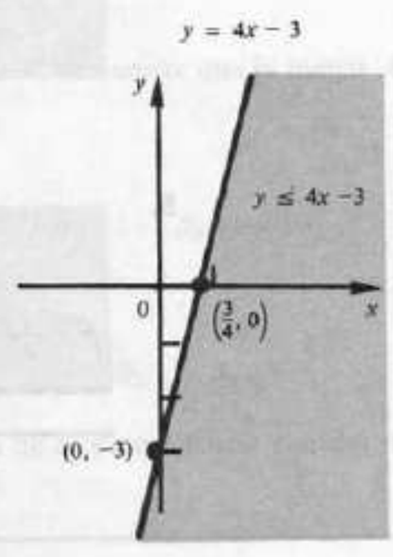
15.



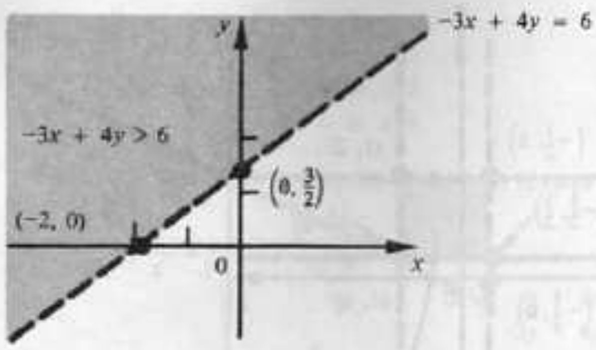
17.



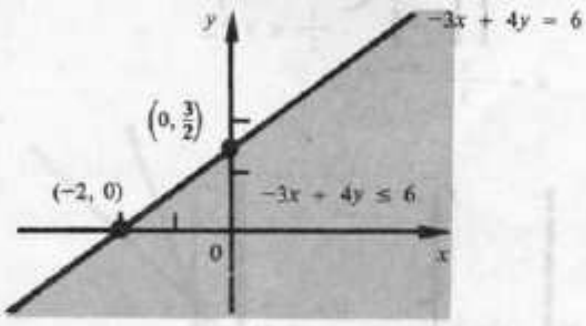
19.



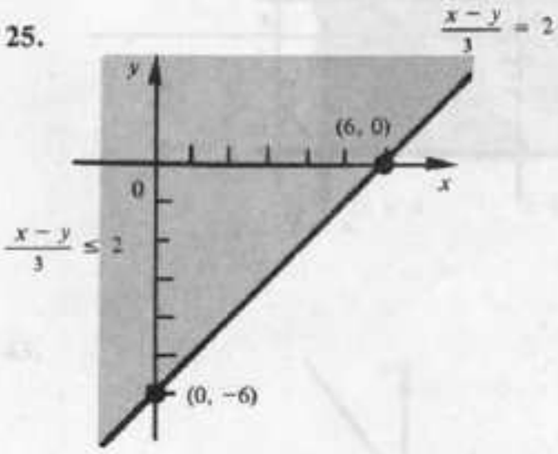
21.



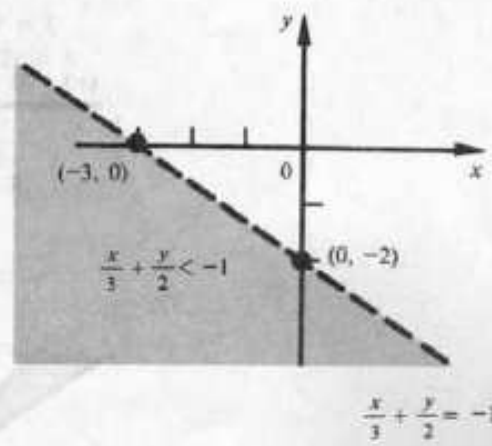
23.



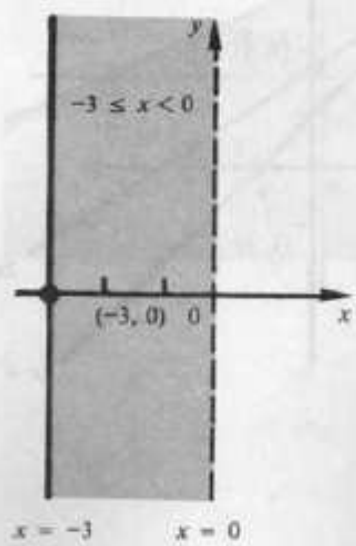
25.



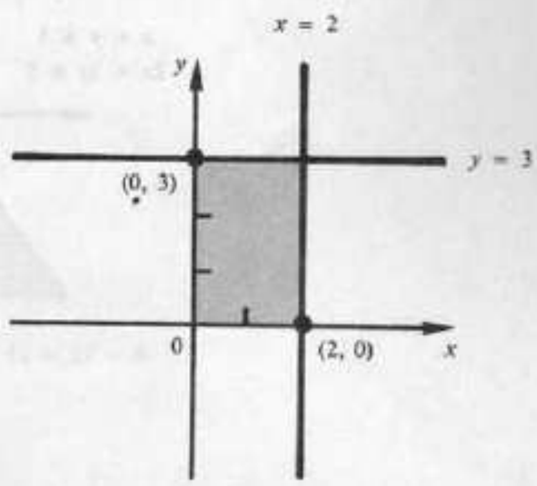
27.



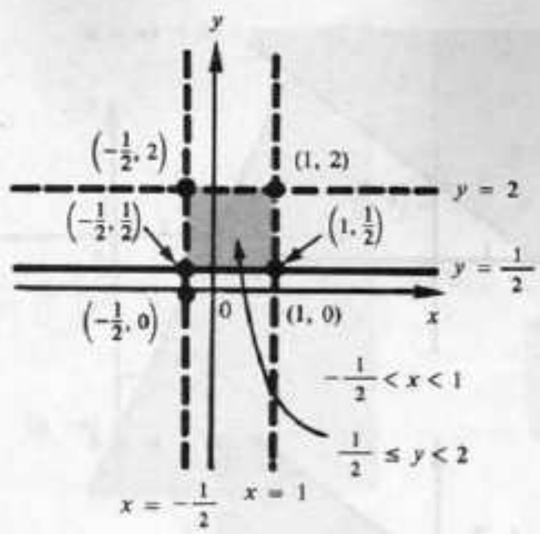
29.



31.

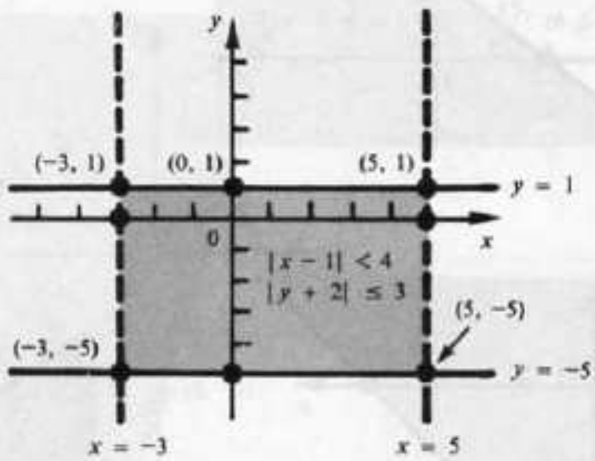


33.



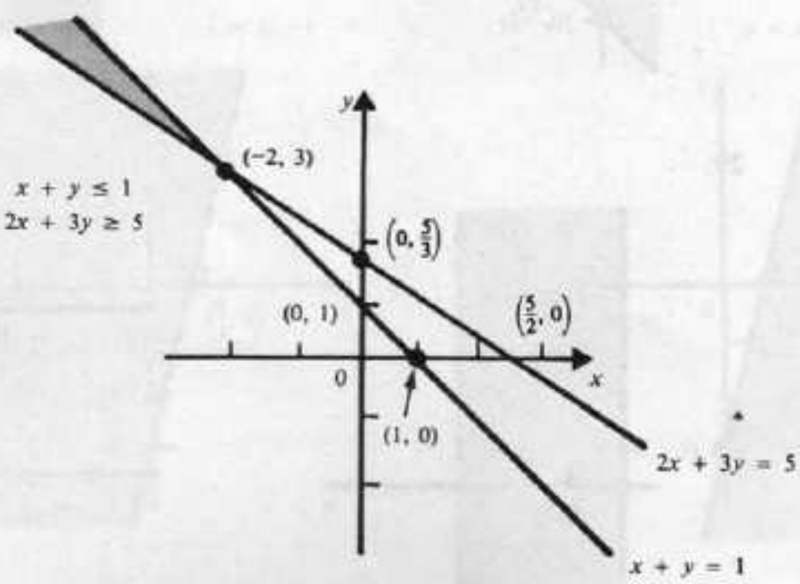
y
$\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$
(1, 2)
$y = 2$
$\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$
$\left(1, \frac{1}{2}\right)$
$y = \frac{1}{2}$
$\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$
0
(1, 0)
x
$-\frac{1}{2} < x < 1$
$\frac{1}{2} \leq y < 2$
$x = -\frac{1}{2}$
$x = 1$

35.



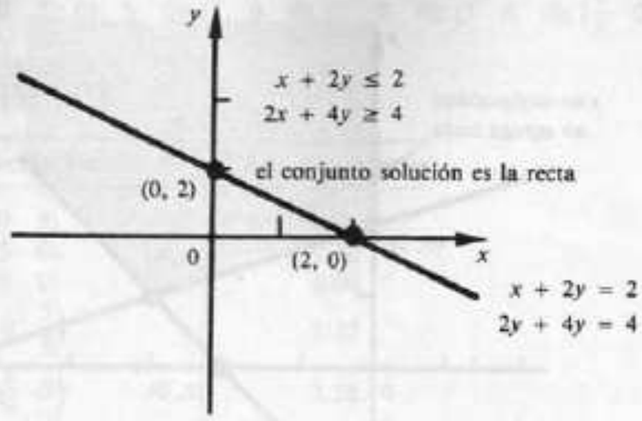
y
(−3, 1)
(0, 1)
(5, 1)
$y = 1$
0
x
$|x - 1| < 4$
$|y + 2| \leq 3$
(5, −5)
(−3, −5)
$y = -5$
$x = -3$
$x = 5$

37.

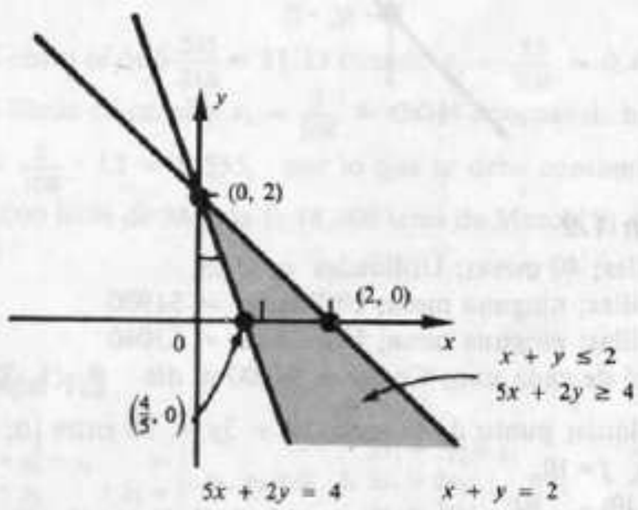


y
(−2, 3)
$x + y \leq 1$
$2x + 3y \geq 5$
$\left(0, \frac{5}{3}\right)$
(0, 1)
$\left(\frac{5}{2}, 0\right)$
0
x
(1, 0)
$2x + 3y = 5$
$x + y = 1$

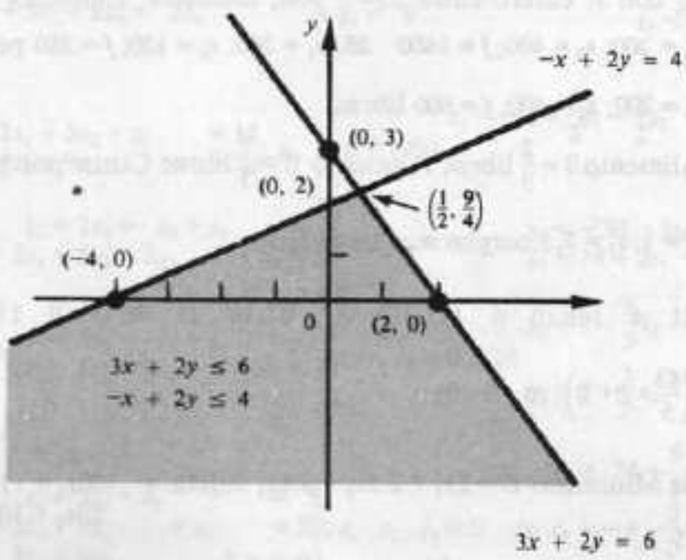
39.


y
x + 2y ≤ 2
2x + 4y ≥ 4
el conjunto solución es la recta
(0, 2)
0
(2, 0)
x
x + 2y = 2
2y + 4y = 4

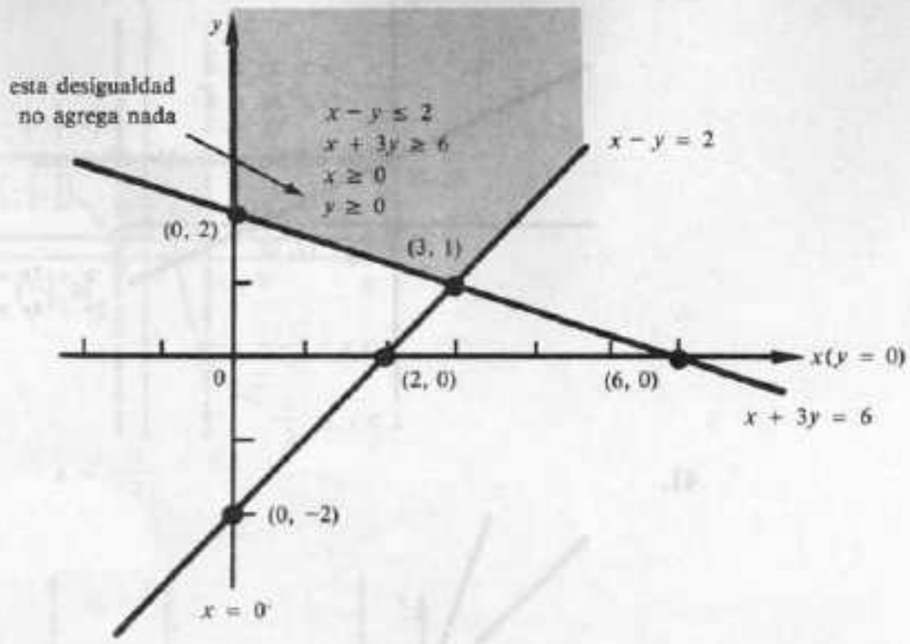
41.


y
(0, 2)
(2, 0)
0
x
x + y ≤ 2
5x + 2y ≥ 4
(4/5, 0)
5x + 2y = 4
x + y = 2

43.


y
−x + 2y = 4
(0, 3)
(0, 2)
(1/2, 9/4)
(−4, 0)
0
(2, 0)
3x + 2y ≤ 6
−x + 2y ≤ 4
3x + 2y = 6

45.



Sección 1.2

1. 65 sillas; 40 mesas; Utilidades = \$525.
3. 380 sillas; ninguna mesa; Utilidades = \$1900
5. 380 sillas; ninguna mesa; Utilidades = \$3040
7. 5 mgd de cada uno; Costo = \$4000 al día **9.** $(1, 3)$; $f = 13$

11. Cualquier punto de la recta $2x + 3y = 10$ entre $\left(0, \frac{10}{3}\right)$ y $(2, 2)$ dará un máximo valor de $f = 10$.

13. $\left(\frac{10}{11}, \frac{10}{11}\right)$; $f = \frac{80}{11}$ **15.** $(0, 1)$; $f = 12$ **17.** $(2, 1)$; $g = 13$ **19.** $(1, 0)$; $g = 3$

21. Cualquier punto de la recta $4s_1 + 2s_2 = 1200$ dará 1200 lb. Escójase s_1 de la especie S_1 con s_1 entero entre 234 y 300, inclusive. Entonces $s_2 = 600 - 2s_1$

23. $s_1 = 200$; $s_2 = 400$; $f = 1600$ **25.** $s_1 = 260$; $s_2 = 120$; $f = 380$ peces

27. $s_1 = 200$; $s_2 = 400$; $f = 600$ libras

29. Alimento I $= \frac{2}{3}$ libra; Alimento II $= \frac{7}{3}$ libra; Costo por libra $= \$\frac{8}{9} \approx 89$¢

31. $s_1 = 1$; $s_2 = 5$; Energía = 13 unidades

35. $(1 \;\; 4 \;\; 10)$; $(0 \;\; 4 \;\; 11)$; $\left(\frac{13}{3} \;\; \frac{32}{3} \;\; 0\right)$; $(0 \;\; 15 \;\; 0)$; $(2 \;\; 0 \;\; 11)$; $(0 \;\; 0 \;\; 13)$;
$\left(\frac{43}{5} \;\; 0 \;\; 0\right)$; $(0 \;\; 0 \;\; 0)$

37. (a) Minimizar $C = 2x_1 + 2.5x_2 + 0.8x_3$ sujeta a:
$$\begin{array}{rl} x_1 + x_2 + 10x_3 \ge 1 & x_1 \ge 0 \\ 100x_1 + 10x_2 + 10x_3 \ge 50; & x_2 \ge 0 \\ 10x_1 + 100x_2 + 10x_3 \ge 10 & x_3 \ge 0 \end{array}$$

(b) $(0 \;\; 0 \;\; 0)$; $\left(0 \;\; 0 \;\; \frac{1}{10}\right)$; $(0 \;\; 0 \;\; 5)$; $(0 \;\; 0 \;\; 1)$; $(0 \;\; 1 \;\; 0)$; $(0 \;\; 5 \;\; 0)$; $\left(0 \;\; \frac{1}{10} \;\; 0\right)$; $(1 \;\; 0 \;\; 0)$;
$\left(\frac{1}{2} \;\; 0 \;\; 0\right)$; $(1 \;\; 0 \;\; 0)$; $\left(0 \;\; \frac{49}{9} \;\; -\frac{4}{9}\right)$; $\left(0 \;\; \frac{1}{11} \;\; \frac{1}{11}\right)$; $\left(0 \;\; -\frac{4}{9} \;\; \frac{49}{9}\right)$; $\left(\frac{49}{99} \;\; 0 \;\; \frac{5}{99}\right)$; $(1 \;\; 0 \;\; 0)$;
$\left(\frac{4}{9} \;\; 0 \;\; \frac{5}{9}\right)$; $\left(\frac{4}{9} \;\; \frac{5}{9} \;\; 0\right)$; $(1 \;\; 0 \;\; 0)$; $\left(\frac{49}{99} \;\; \frac{5}{99} \;\; 0\right)$; $\left(\frac{53}{108} \;\; \frac{5}{108} \;\; \frac{5}{108}\right)$

(c) $(0\ \ 0\ \ 5)$; $(0\ \ 5\ \ 0)$; $(1\ \ 0\ \ 0)$; $(1\ \ 0\ \ 0)$; $(1\ \ 0\ \ 0)$; $\left(\frac{4}{9}\ \ 0\ \ \frac{5}{9}\right)$; $\left(\frac{4}{9}\ \ \frac{5}{9}\ \ 0\right)$; $(1\ \ 0\ \ 0)$; $\left(\frac{53}{108}\ \ \frac{5}{108}\ \ \frac{5}{108}\right)$

(d) Solución factible	Costo (en dólares)
$(0\ \ 0\ \ 5)$	4.00
$(0\ \ 5\ \ 0)$	12.50
$(1\ \ 0\ \ 0)$	2.00
$\left(\frac{4}{9}\ \ 0\ \ \frac{5}{9}\right)$	1.33
$\left(\frac{4}{9}\ \ \frac{5}{9}\ \ 0\right)$	2.28
$\left(\frac{53}{108}\ \ \frac{5}{108}\ \ \frac{5}{108}\right)$	1.13

(e) El costo es de $\$\frac{245}{216} \approx \$1.13$ cuando $x_1 = \frac{53}{108} \approx 0.49$ galones de leche, $x_2 = \frac{5}{108} \approx 0.046$ libras de carne y $x_3 = \frac{5}{108} \approx 0.046$ docenas de huevos consumidos diariamente. Nota: $\frac{5}{108} \cdot 12 = 0.555$, por lo que se debe consumir poco más de $\frac{1}{2}$ huevo al día.

39. 8,000 latas de Mezcla 1; 18,000 latas de Mezcla 2; 4,000 latas de Mezcla 3; Ventas: \$1160

Sección 1.3

1. $\begin{aligned} x_1 + x_2 + s_1 \quad &= 3 \\ 2x_1 + x_2 \quad + s_2 &= 7 \end{aligned}$; $s_1, s_2 \geq 0$ **3.** $\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + s_1 \quad\quad &= 10 \\ 3x_1 + 2x_2 \quad + s_2 \quad &= 30 \\ 4x_1 + 7x_2 \quad\quad + s_3 &= 20 \end{aligned}$; $s_1, s_2, s_3 \geq 0$

5. $\begin{aligned} 7x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + s_1 \quad\quad &= 8 \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 12x_4 \quad + s_2 \quad &= 12 \\ 2x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 2x_4 \quad\quad + s_3 &= 9 \end{aligned}$; $s_1, s_2, s_3 \geq 0$ **7.** $\begin{aligned} x_1 &= \frac{20}{3} - \frac{7}{3}x_2 - \frac{1}{3}s_2 \\ s_1 &= -\frac{5}{3} + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}s_2 \end{aligned}$

9. (a) $\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 + s_1 \quad &= 12 \\ 4x_1 + 9x_2 \quad + s_2 &= 20 \end{aligned}$; $s_1, s_2 \geq 0$ (b) $\begin{aligned} x_1 &= -4 + \frac{9}{2}s_1 - \frac{5}{2}s_2 \\ x_2 &= 4 - 2s_1 + s_2 \end{aligned}$

11. (a) $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + s_1 \quad &= 8 \\ 2x_1 + 5x_2 + 5x_3 \quad + s_2 &= 35 \end{aligned}$; $s_1, s_2 \geq 0$ (b) $\begin{aligned} x_1 &= -30 - 5s_1 + 2s_2 + 5x_3 \\ x_2 &= 19 + 2s_1 - s_2 - 3x_3 \end{aligned}$

13. (a) $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + s_1 \quad &= 8 \\ 2x_1 + 5x_2 + 5x_3 \quad + s_2 &= 35 \end{aligned}$; $s_1, s_2 \geq 0$ (b) $\begin{aligned} x_2 &= 1 - \frac{3}{5}x_1 - s_1 + \frac{1}{5}s_2 \\ x_3 &= 6 + \frac{1}{5}x_1 + s_1 - \frac{2}{5}s_2 \end{aligned}$

15. (a) $\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + s_1 \quad\quad &= 5 \\ 2x_1 + 7x_2 \quad + s_2 \quad &= 20 \\ 3x_1 + 8x_2 \quad\quad + s_3 &= 40 \end{aligned}$; $s_1, s_2, s_3 \geq 0$ (b) $\begin{aligned} x_1 &= 24 + \frac{8}{5}s_2 - \frac{7}{5}s_3 \\ x_2 &= -4 - \frac{3}{5}s_2 + \frac{2}{5}s_3 \\ s_1 &= -7 + \frac{1}{5}s_2 + \frac{1}{5}s_3 \end{aligned}$

17. (a) $\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 8x_3 + s_1 \quad\quad &= 12 \\ 2x_1 + 5x_2 + 12x_3 \quad + s_2 \quad &= 25 \\ 3x_1 + 6x_2 + 13x_3 \quad\quad + s_3 &= 60 \end{aligned}$; $s_1, s_2, s_3 \geq 0$ (b) $\begin{aligned} s_1 &= 12 - 2x_1 - 4x_2 - 8x_3 \\ s_2 &= 25 - 2x_1 - 5x_2 - 12x_3 \\ s_3 &= 60 - 3x_1 - 6x_2 - 13x_3 \end{aligned}$

$$x_1 = \frac{1}{2}[25 - 5x_2 - 12x_3 - s_2]$$

19. (a) Igual que 17(a) (b) $s_1 = -13 + x_2 + 4x_3 + s_2$ **21.** b

$$s_3 = \frac{45}{2} + \frac{3}{2}x_2 + 5x_3 + \frac{3}{2}s_2$$

Sección 1.4

1.
$$\begin{array}{|ccc|cc|c|}\hline 2 & -1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & f \\ \hline\end{array}$$

3.
$$\begin{array}{|ccc|ccc|c|}\hline 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 2 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & f \\ \hline\end{array}$$

5.
$$\begin{array}{|cc|cc|c|}\hline 2 & 3 & 1 & 0 & 7 \\ 5 & 8 & 0 & 1 & 4 \\ \hline 1 & -1 & 0 & 0 & f \\ \hline\end{array}$$

7.
$$\begin{array}{|ccc|cc|c|}\hline 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 6 \\ \hline 3 & 2 & 4 & 0 & 0 & f \\ \hline\end{array}$$

9.
$$\begin{array}{|ccc|ccc|c|}\hline 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & -2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ \hline 1 & 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & f \\ \hline\end{array}$$

11.
$$\begin{array}{ccc|cc|c|c} x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 & & \\ \hline \frac{2}{3} & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & x_2 \\ -1 & 0 & 4 & 0 & 1 & 2 & s_2 \\ \hline -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & f-\frac{4}{3} & \\ \hline\end{array}$$

13.
$$\begin{array}{ccc|cc|c|c} x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 & & \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & x_3 \\ -2 & -1 & 0 & -1 & 1 & 1 & s_2 \\ \hline -1 & -2 & 0 & -3 & 0 & f-3 & \\ \hline\end{array}$$

15. $\left(\frac{4}{5} \quad 0\right); f = \frac{4}{5}$ **17.** $\left(\frac{3}{5} \quad \frac{8}{5}\right); f = \frac{52}{5}$

19. (0 5 0); $f = 5$; o (3 2 0) o... Realmente, hay un número infinito de puntos en el conjunto de restricciones que satisface $f = 5$.

21. (2 1); $f = 18$ **23.** $\left(\frac{5}{4} \quad \frac{25}{8} \quad 0\right); f = \frac{15}{2}$ **25.** $\left(\frac{13}{4} \quad 0 \quad \frac{1}{2}\right); f = \frac{15}{4}$

27. A = 137.5; B = 25; X = 0; Utilidades: $8500

29. 0 galones de chocolate; 300 galones de vainilla; 75 galones de plátano; Utilidades: $341.25

31. 2.5 onzas de jarabe; 1.5 onzas de crema; 4 onzas de soda; 4 onzas de helado; Calorías: 422

33. 4 anillos; 10 pares de aretes; 0 pisacorbatas; 3 collares; Utilidades: $1600; NOTA: El joyero puede hacer 2 pisacorbatas en vez de un anillo, obteniendo las mismas utilidades, por lo que hay más soluciones.

35. (a) 160 de la categoría I; 0 de la categoría II; 0 de la categoría III; Ingresos: \$16,000
(b) 160 de la categoría I; 0 de la categoría II; 0 de la categoría III; Número: 160

37. 1 de la especie I; 5 de la especie II; Energía: 13 unidades

Sección 1.5

1. $\begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ **3.** $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ **5.** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ **7.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **9.** $\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & j \end{pmatrix}$

11. Minimizar $g = 5y_1 + 7y_2 + y_3$
sujeta a: $y_1 + 3y_2 + y_3 \geq 2$; $y_1 \geq 0$
$2y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 5$ $y_2 \geq 0$
$y_3 \geq 0$

13. Maximizar $f = x_1 + x_2$
sujeta a: $2x_1 + x_2 \leq 2$; $x_1 \geq 0$
$x_1 + 2x_2 \leq 3$ $x_2 \geq 0$

15. Minimizar $g = 5y_1 + 6y_2$
sujeta a: $y_1 + 2y_2 \geq 1$; $y_1 \geq 0$
$y_1 + y_2 \geq 1$ $y_2 \geq 0$
$y_1 + 3y_2 \geq 1$

17. Maximizar $f = 13x_1 + 21x_2 + 11x_3$
sujeta a: $x_1 + 4x_2 - 3x_3 \leq 2$; $x_1 \geq 0$
$2x_1 + x_2 - x_3 \leq 5$ $x_2 \geq 0$
$x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 3$ $x_3 \geq 0$

19. Minimizar $g = 12y$
sujeta a: $y \geq 1$
$2y \geq 2$
$3y \geq -1$
$4y \geq 5$
$y \geq 0$

21. $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$; $g = \frac{5}{3}$ **23.** $\begin{pmatrix} \frac{41}{7} & 0 & \frac{50}{7} \end{pmatrix}$; $g = \frac{232}{7}$

25. $\frac{2}{3}$ libra de alimento I; $\frac{7}{3}$ libra de alimento II; Costo $\$\frac{8}{3}$; Costo por libra $= \$\frac{8}{9} \approx 89¢$

27. (20 40 40); Costo = \$12

Capítulo 2

Sección 2.1

1. Estrictamente determinado; $\mathbf{p} = (0 \ \ 1 \ \ 0)$; $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ **3.** No estrictamente determinado

5. Estrictamente determinado; $\mathbf{p} = (0 \ \ 0 \ \ 1)$; $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ **7.** No estrictamente determinado

9. Estrictamente determinado; $\mathbf{p} = (0 \ \ 1 \ \ 0 \ \ 0)$; $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

11. $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$; no estrictamente determinado

13. $\begin{pmatrix} -2 & 3 & -4 \\ 3 & -4 & 5 \\ -4 & 5 & -6 \end{pmatrix}$; no estrictamente determinado

15. $\begin{array}{c|ccc} A \backslash B & I & N & D \\ \hline I & & & \\ N & & \left(\begin{smallmatrix} -1 & -3 & -11 \\ 4 & 0 & -5 \\ 9 & 3 & -1 \end{smallmatrix}\right) & \\ D & & & \end{array}$; A y B deben disminuir los precios [I = aum.; N = no cambia; D = dism.]

17. $\begin{array}{c|ccc} D \backslash R & 0 & 1 & 2 \end{array}$ $\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array}\begin{pmatrix} 0 & -3 & -7 \\ 3 & 0 & -3 \\ 7 & 3 & 0 \end{pmatrix}$; los dos deben hacer campaña por 2 días en la región con 60,000 votantes

19. $\begin{array}{c|cc} P \backslash R & \text{En casa} & \text{No está en casa} \end{array}$ $\begin{array}{l} \text{Tel. a tel.} \\ \text{Pers. a pers.} \end{array}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1.5 & 0 \end{pmatrix}$; no estrictamente determinado

21. La empresa debe adoptar la política lógica; el sindicato debe buscar una solución legal.

Sección 2.2

1. 4 **3.** $\frac{3}{2}$ **5.** 2 **7.** $\frac{8}{3}$ **9.** $\frac{149}{40} = 3.725$ **11.** $\mathbf{p}_0 = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$; $\mathbf{q}_0 = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$; $v = \frac{1}{2}$

13. $\mathbf{p}_0 = \begin{pmatrix}\frac{4}{5} & \frac{1}{5}\end{pmatrix}$; $\mathbf{q}_0 = \begin{pmatrix}\frac{2}{5} \\ \frac{3}{5}\end{pmatrix}$; $v = \frac{2}{5}$ **15.** $\mathbf{p}_0 = (1 \quad 0)$; $\mathbf{q}_0 = \begin{pmatrix}1 \\ 0\end{pmatrix}$; $v = 0$; Justo

17. $\mathbf{p}_0 = (1 \quad 0)$; $\mathbf{q}_0 = \begin{pmatrix}0 \\ 1\end{pmatrix}$; $v = -1$ **19.** $\mathbf{p}_0 = (1 \quad 0)$; $\mathbf{q}_0 = \begin{pmatrix}1 \\ 0\end{pmatrix}$; $v = 3$

21. $\mathbf{p}_0 = \begin{pmatrix}\frac{3}{5} & \frac{2}{5}\end{pmatrix}$; $\mathbf{q}_0 = \begin{pmatrix}0 \\ \frac{4}{5} \\ \frac{1}{5}\end{pmatrix}$; $v = \frac{18}{5}$

23. $\mathbf{p}_0 = \begin{pmatrix}\frac{5}{6} & 0 & \frac{1}{6} & 0\end{pmatrix}$; $\mathbf{q}_0 = \begin{pmatrix}\frac{5}{6} \\ 0 \\ \frac{1}{6}\end{pmatrix}$; $v = \frac{29}{6}$ **27.** $\mathbf{p}_0 = \begin{pmatrix}\frac{19}{36} & \frac{17}{36}\end{pmatrix}$; $\mathbf{q}_0 = \begin{pmatrix}\frac{19}{36} \\ \frac{17}{36}\end{pmatrix}$;

Injusto, ya que $v = \frac{1}{36} \neq 0$ **29.** Cualquiera estrategia es óptima.

31. Cosechar temprano. **33.** Sembrar en 1500 acres sólo del cultivo II.

37. $\mathbf{p}_0 = (1 \quad 0)$; $\mathbf{q}_0 = \begin{pmatrix}0 \\ 1\end{pmatrix}$; $v_A = 2$; $v_B = 4$

39. (a) Si $t = 0$, entonces $\mathbf{p}_0 = (1 \quad 0)$ y $\mathbf{q}_0 = \begin{pmatrix}1 \\ 0\end{pmatrix}$; si $0 < t < 1$, entonces $\mathbf{p}_0 = (1 - t \quad t)$ y $\mathbf{q}_0 = \begin{pmatrix}1 - t \\ t\end{pmatrix}$; si $t = 1$, entonces $\mathbf{p}_0 = (0 \quad 1)$ y $\mathbf{q}_0 = \begin{pmatrix}0 \\ 1\end{pmatrix}$ (b) si $0 \le t < \frac{1}{2}$, entonces $\mathbf{p}_0 = (1 \quad 0)$ y $\mathbf{q}_0 = \begin{pmatrix}0 \\ 1\end{pmatrix}$; si $\frac{1}{2} \le t \le 1$, entonces $\mathbf{p}_0 = (1 \quad 0)$ y $\mathbf{q}_0 = \begin{pmatrix}1 \\ 0\end{pmatrix}$

(c) Si $0 \le t < \frac{1}{2}$, entonces $\mathbf{p}_0 = (0 \quad 1)$ y $\mathbf{q}_0 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$; si $\frac{1}{2} < t \le 1$, entonces $\mathbf{p}_0 = (1 \quad 0)$ y $\mathbf{q}_0 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$; si $t = \frac{1}{2}$, entonces $\mathbf{p}_0$ puede ser cualquier estrategia y $\mathbf{q}_0 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

41. (b) $v = \frac{2t-1}{4t-2} = \frac{1}{2}$

Sección 2.3

1. (a) $\mathbf{p}_0 = \left(\frac{5}{7}, \frac{2}{7}\right)$, $\quad \mathbf{q}_0 = \left(\frac{6}{7}, \frac{1}{7}\right)$

(b) $\mathbf{p}_0 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$, $\quad \mathbf{q}_0 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

2. (a) $\mathbf{p}_0 = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, 0\right)$, $\quad \mathbf{q}_0 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$, $v = \frac{1}{2}$

(b) $\mathbf{p}_0 = (1, 0, 0)$, $\quad \mathbf{q}_0 = (0, 0, 1)$, $v = 2$

5. $\mathbf{p}_0 = (1, 0, 0, 0)$, $\quad \mathbf{q}_0 = (0, 0, 0, 1)$, $v = 2$

6. $\mathbf{p}_0 = \left(\frac{100}{101}, \frac{1}{101}\right)$, $\quad \mathbf{q}_0 = \left(\frac{91}{101}, \frac{10}{101}\right)$, $v = \frac{1000}{101}$

Capítulo 3

1. $x_5 = 400$ es el mínimo buscado. Las demás variables del flujo de tránsito satisfacen lo siguiente

$700 \le x_1 \le 800$
$x_2 = 600$
$0 \le x_3 \le 100$
$x_4 = 0$
$500 \le x_6 \le 600$
$0 \le x_7 \le 100$

2. $x_2 = 200$ es el mínimo requerido. Las demás variables del flujo de tránsito satisfacen las ecuaciones

$x_1 + x_{10} = 400$
$x_3 - x_9 + x_{10} + x_{11} = 800$
$x_4 + x_{11} = 400$
$x_5 - x_9 + x_{11} = 400$
$x_6 + x_{11} = 1000$
$x_7 - x_9 + x_{11} = 600$
$x_8 - x_{10} = 400$
$x_{12} = 0$

Una solución es $x_1 = 400$, $x_2 = 200$, $x_3 = 800$, $x_4 = 400$, $x_5 = 400$, $x_6 = 1000$, $x_7 = 600$, $x_8 = 400$, $x_9 = x_{10} = x_{11} = x_{12} = 0$

Capítulo 4

1. 166 97 187 107 226 132 96 57 183 107 172 111 233 136 12 7 25 125 103 61 253 148
2. −2 100 171 −17 28 120 −12 24 91 −4 53 100 −1 39 63 −19 9 97 −11 43 118
3. LOS SAPOS SALTAN
4. ME GUSTA CANTAR

Capítulo 5

1. 0.495 **2.** $\frac{6241}{6400}, \frac{158}{6400}, \frac{1}{6400}$

3. Si Aa se cruza con AA, Aa o aa, entonces P(Aa) $= \frac{1}{2}$ en cada caso.

4. Si el progenitor original es AA, entonces no hay posibilidad de que un descendiente sea recesivo. Si el progenitor original es Aa, entonces p(aa) $= \frac{1}{2}$, y si el progenitor original es recesivo, entonces p(aa) = 1. Una vez que un descendiente es recesivo, todos los descendientes sucesivos serán recesivos. La única manera de asegurar que no haya descendientes recesivos es empezando con un progenitor dominante. Así, a largo plazo, p(aa) = 1 − u, donde u es la proporción de adultos AA.

5. $u_{2n+1} \to \frac{1}{3},\ v_{2n+1} \to \frac{1}{3},\ w_{2n+1} \to 0,\ u_{2n} \to \frac{5}{12},\ v_{2n} \to \frac{1}{2},\ w_{2n} \to \frac{1}{12}$

6. $A_1A_1, A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4, A_2A_2, A_2A_3, A_2A_4, A_3A_3, A_3A_4, A_4A_4$

7. (a) $$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Como P es triangular, sus valores característicos son sus componentes en la diagonal.

Capítulo 6

1. $y = \frac{408}{126} - \frac{57}{126}x \approx 3.24 - 0.45x$

2. $y = \frac{385}{49} + \frac{14}{49}x = \frac{55}{7} + \frac{2}{7}x \approx 7.86 + 0.29x$

Nótese que ésta es la recta que pasa por los dos puntos.

3. $y = \frac{162}{84} - \frac{10}{84}x \approx 1.93 - 0.12x$

4. $y = \frac{360}{80} - \frac{432}{80}x + \frac{80}{80}x^2 = 4.5 - 5.4x + x^2$

5. $y = \frac{13536}{5184} + \frac{10800}{5184}x + \frac{1584}{5184}x^2 \approx 2.61 + 2.08x + 0.31\,x^2$

Esta es la ecuación de la parábola que pasa por los tres puntos.

6. $y = -\frac{475840}{173824} - \frac{110464}{173824}x + \frac{41024}{173824}x^2 \approx -2.74 - 0.64x + 0.24\,x^2$

8. $y = \frac{3600}{1008} - \frac{1704}{1008}x - \frac{1080}{1008}x^2 + \frac{336}{1008}x^3 \approx 3.57 - 1.69x - 1.07\,x^2$

10. $y = 8.55 - 5x + 1.97x^2$

11. $y \approx 108.71 + 4.906x - 0.00973x^2$

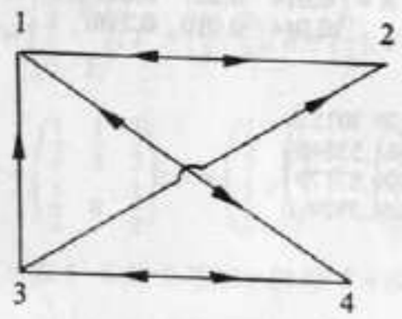
12. El mejor ajuste cuadrático a estos datos está dado por

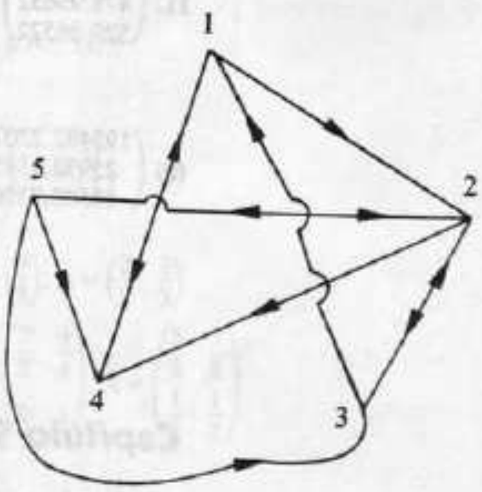
$$s = \frac{809.15625}{14.25} + \frac{4525.3125}{74.25}t - \frac{1137.375}{74.25}t^2 \approx 10.9 + 60.95t - 15.32t^2$$

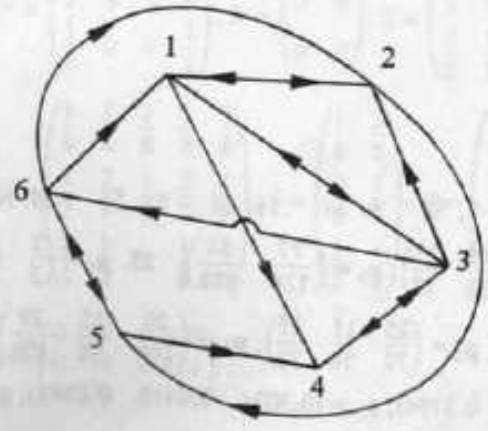
(a) $s_0 \approx 10.9$ pie (b) $v_0 \approx 60.95$ pie/s
(c) $g \approx 2(-15.32) = -30.64$ pie/s

Capítulo 7

1. $\begin{pmatrix} 0&1&1&0 \\ 0&0&0&0 \\ 1&1&0&0 \\ 1&0&0&0 \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} 0&1&1&0&0 \\ 0&0&0&1&0 \\ 1&1&0&1&0 \\ 0&0&1&0&1 \\ 1&0&1&0&0 \end{pmatrix}$ 3. $\begin{pmatrix} 0&0&1&0&0 \\ 1&0&0&0&0 \\ 0&1&0&1&0 \\ 1&1&1&0&1 \\ 0&1&0&0&0 \end{pmatrix}$ 4. $\begin{pmatrix} 0&0&1&0&0&0 \\ 1&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&1&0&1 \\ 1&1&0&0&1&0 \\ 0&0&0&1&0&0 \\ 1&0&0&0&1&0 \end{pmatrix}$

5.


6.


7.


8. Hay una cadena de 2 entre 11, 12, 32, 33, 42, 43; una cadena de 3 entre 12, 13, 31, 32, 41, 42; y una cadena de 4 entre 11, 12, 32, 33, 42, 43.
9. Hay una cadena de 2 entre 12, 14, 23, 32, 33, 35, 41, 43, 44 y 51; dos cadenas de 2 entre 31, 42; una cadena de 3 entre 12, 13, 15, 22, 24, 31, 34, 44, 45, 53; dos cadenas de 3 entre 11, 32, 33, 42, 43 y tres cadenas de 3 entre 41; una cadena de 4 entre 11, 14, 22, 23, 25, 35, 45, 52, 54; dos cadenas de 4 entre 12, 13, 21, 33, 34, 44; tres cadenas de 4 entre 31, 32, 41 y cuatro cadenas de 4 entre 42, 43.
10. Los grafos en los Problemas 2, 3, 4, 5, 6 y 7
14. Directos: $3 > 1, 5, 6$; $1 > 2$; $5 > 4$; $6 > 2, 4$
Indirectos: $3 > 2, 4$

Capítulo 8

1. $\begin{pmatrix} 72.65306 \\ 55.10204 \\ 65.30612 \end{pmatrix}$

3. Por ejemplo, $a_{21} + a_{22} + a_{23} = 0.7 + 0.3 + 0.8 = 1.8$. Esto significa que la demanda para la producción de la industria 2 es mayor que la producción de la misma.

5. $\begin{pmatrix} 57.14286 \\ 178.57143 \\ 73.80952 \end{pmatrix}$ **7.** $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{5}{18} & \frac{5}{12} \\ \frac{9}{40} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{10} & \frac{2}{9} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}; I - A = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{5}{18} & -\frac{5}{12} \\ -\frac{9}{40} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{10} & -\frac{2}{9} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ **9.** $\begin{pmatrix} 896.14679 \\ 1017.02752 \\ 922.27523 \end{pmatrix}$

11. $\begin{pmatrix} 500.21739 \\ 478.95652 \\ 529.56522 \end{pmatrix}$ **13.** (a) $A = \begin{pmatrix} 0.293 & 0 & 0 \\ 0.014 & 0.207 & 0.017 \\ 0.044 & 0.010 & 0.216 \end{pmatrix}; I - A = \begin{pmatrix} 0.707 & 0 & 0 \\ -0.014 & 0.793 & -0.017 \\ -0.044 & -0.010 & 0.784 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 195492.2207 \\ 25932.85859 \\ 13580.33966 \end{pmatrix}$ **15.** $\begin{pmatrix} 16179.30153 \\ 9661.53840 \\ 2498.87179 \\ 18108.3929 \end{pmatrix}$

Capítulo 9

Sección 9.1

1. Sí **3.** No **5.** No **7.** Sí **9.** Sí **11.** Sí **13.** Sí **15.** No **17.** Sí **19.** Sí

21. $\mathbf{p}_1 = \left(\frac{5}{8} \quad \frac{3}{8}\right)$; $\mathbf{p}_2 = \left(\frac{19}{32} \quad \frac{13}{32}\right)$; $\mathbf{p}_3 = \left(\frac{77}{128} \quad \frac{51}{128}\right)$ **23.** $\mathbf{p}_1 = \left(\frac{2}{3} \quad \frac{1}{3}\right)$; $\mathbf{p}_2 = \left(\frac{22}{72} \quad \frac{50}{72}\right)$; $\mathbf{p}_3 = \left(\frac{433}{864} \quad \frac{431}{864}\right)$

25. $\mathbf{p}_1 = \left(\frac{11}{48} \quad \frac{13}{24} \quad \frac{11}{48}\right)$; $\mathbf{p}_2 = \left(\frac{25}{72} \quad \frac{11}{36} \quad \frac{25}{72}\right)$; $\mathbf{p}_3 = \left(\frac{29}{108} \quad \frac{25}{54} \quad \frac{29}{108}\right)$

27. $\mathbf{p}_1 = (0.2214 \quad 0.4 \quad 0.3786)$; $\mathbf{p}_2 = (0.3034 \quad 0.4418 \quad 0.2548)$; $\mathbf{p}_3 = (0.3098 \quad 0.4994 \quad 0.1908)$

29. $\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ **31.** Regular; $\begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$ **33.** No es regular

35. Regular; $\begin{pmatrix} \frac{b}{1-a+b} & \frac{1-a}{1-a+b} \end{pmatrix}$ **37.** No es regular **39.** Regular; (0.2843 0.3768 0.3390)

41. (a) (0 0 1) (b) Sí **43.** $T = \begin{pmatrix} 0.98 & 0.02 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}$ **45.** 93.75%

47. 50 correctas, 50 incorrectas = 50%

49. $\begin{pmatrix} 0.6 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.6 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.6 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.6 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.6 \end{pmatrix}$

51. $T = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.3 & 0.1 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.1 & 0.2 & 0.7 \end{pmatrix}$ **53.** $\begin{pmatrix} 0 & \frac{7}{10} & 0 & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$

55. \$679.15 **57.** Demócrata: 54.64%;
republicano: 35.05%;
independiente: 10.31%

Sección 9.2

1. Sí; 1 **3.** Sí; 2 **5.** No **7.** Sí; 2 **9.** Sí; 2

11. $T = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $T' = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$; $R = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \end{pmatrix}$; $S = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \end{pmatrix}$; $Q = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \end{pmatrix}$; $A = (1)$

13. $T' = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$; $R = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$; $S = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$; $Q = \begin{pmatrix} 2 & \frac{2}{3} \\ 1 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$; $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

15. $T' = (0.4 \quad 0.4 \quad 0.2)$; $R = (0.4)$; $S = (0.4 \quad 0.2)$; $Q = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \end{pmatrix}$; $A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

17. $T' = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$; $R = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $S = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$; $Q = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $A = \begin{pmatrix} \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

19. $T' = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{7} & \frac{2}{7} & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$; $S = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$; $R = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{7} & \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$; $Q = \begin{pmatrix} 1.321 & 0.642 & 0.257 \\ 0.367 & 1.734 & 0.294 \\ 0.514 & 1.028 & 1.211 \end{pmatrix}$;

$A = \begin{pmatrix} 0.381 & 0.619 \\ 0.578 & 0.422 \\ 0.509 & 0.491 \end{pmatrix}$

21. $\begin{pmatrix} 0.2 & 0.8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0.8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

23. (a) $E_0, E_1, E_2, \ldots, E_8$ en donde E_i es "G_2 tiene i dólares". E_0 y E_8 son absorbentes.

(b) $\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & 0 & \frac{4}{7} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{12}{49} & 0 & \frac{16}{49} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (c) 0.723

25. 2 **27.** (a) $T = \begin{pmatrix} 0 & 0.35 & 0 & 0.65 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.3 & 0.7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (b) 231 **29.** $\frac{15}{28}(2000) \approx 1071$

Capítulo 10

1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}$ **2.** $0.3\,(1 + 0.7 + 0.49) = 0.657$

3. Se necesita que $(0.7)^n < 0.02$; $n = 11$ es el menor valor que lo cumple.

4. $\frac{1}{0.3} \approx 3.333$ **5.** $\begin{pmatrix} 0.07 & 0.63 & 0.3 \\ 0.07 & 0.63 & 0.3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **6.** 3

7. $\frac{1}{3}$ **8.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$ **9.** $0.4(1 + 0.6) = 0.64$

10. Se necesita que $(0.6)^n < 0.05$; $n = 6$ es el menor valor que lo cumple.

11. $\frac{1}{0.4} = 2.5$

12. $\begin{pmatrix} 0.15 & 0.45 & 0.4 \\ 0.15 & 0.45 & 0.4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

13. $1.875 = \frac{15}{8}$ **14.** $0.625 = \frac{5}{8}$

Capítulo 11

1. (a) $\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{2} & \frac{1}{10} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & \frac{1}{2} & \frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{1}{2} & \frac{1}{10} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

(b) p^4 no tiene componente cero.

(c) $t \approx (0.601504, 0.300752, 0.075188, 0.018797, 0.003759)$

2. (a) $p_0 \approx 0.141$ (b) $p_3 \approx 0.0796$;

$$P = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 & 0 & 0 \\ 0.225 & 0.6 & 0.175 & 0 \\ 0 & 0.225 & 0.6 & 0.175 \\ 0 & 0 & 0.75 & 0.25 \end{pmatrix}$$

Capítulo 12

1.

n	$f_{j,n}$	$p_{a,n}$	T_n	$p_{j,n}/p_{a,n}$	T_n/T_{n-1}
0	0	12	12	0	—
1	36	7	43	5.14	3.58
2	21	19	40	1.11	0.930
5	104	45	149	2.31	—
10	600	291	891	2.06	—
19	16,090	7737	23827	2.08	—
20	23,170	11140	34310	2.08	1.44

Nótese que los valores característicos son 1.44 y −0.836. Los vectores característicos correspondientes son

$$\begin{pmatrix} 2.08 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} -3.57 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2.

n	$p_{j,n}$	$p_{a,n}$	T_n	$p_{j,n}/p_{a,n}$	T_n/T_{n-1}
0	0	15	15	0	—
1	15	6	21	2.5	1.4
2	6	7	13	0.857	0.619
5	4	3	7	1.333	—
10	1	1	2	1	—
19	0	0	0	—	—
20	0	0	0	—	—

Los ceros se presentan porque estamos redondeando los números 0.12 y 0.09 (para $n = 19$) y 0.09 y 0.07 para $n = 20$. Los valores característicos de A son 0.78 y −0.38. Las relaciones son

$$p_{j,n}/p_{a,n} \to 1/\lambda_1 \approx 1/0.78 \approx 1.28$$

y

$$T_n/T_{n-1} \to \lambda_1 \approx 0.78$$

Estos números no aparecen en la tabla. En realidad, si $p_{j,n}$ y $p_{a,n}$ son cero en cualquier año, se extingue la población.

3. n	$p_{j,n}$	$p_{a,n}$	T_n	$p_{j,n}/p_{a,n}$	T_n/T_{n-1}
0	0	20	20	0	—
1	80	16	96	5	4.8
2	64	69	133	0.928	1.39
5	1092	498	1590	2.19	—
10	3114	1970	5084	1.58	—
19	3.69×10^7	1.95×10^7	5.64×10^7	1.89	—
20	7.82×10^7	4.14×10^7	11.96×10^7	1.89	2.12

Los valores característicos son 2.12 y −1.32 con vectores característicos correspondientes $\begin{pmatrix} 1.89 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -3.03 \\ 1 \end{pmatrix}$

4. La población aumentará si $k > \frac{1-\beta}{\alpha}$. Pero si $k \geq 1$ y $\alpha = \beta > \frac{1}{2}$, entonces $\frac{1-\beta}{\alpha} = \frac{1-\alpha}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} - 1 < 2 - 1 = 1$. Así que $\frac{1-\beta}{\alpha} < 1 \leq k$. NOTA: $\alpha > \frac{1}{2}$ implica que $\frac{1}{\alpha} < 2$.

5. De la ecuación (9), $p_n \approx a_1\lambda_1^n v_i$ para n grande. Si $v_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, entonces $\frac{p_{j,n}}{p_{a,n}} \approx \frac{a_1\lambda_1^n x}{a_1\lambda^n{}_1 y} = \frac{x}{y}$; pero $\begin{pmatrix} -\lambda_1 & k \\ \alpha & \beta-\lambda_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ de modo que $-\lambda_1 x + ky = 0$ y $\frac{x}{y} = \frac{k}{\lambda_1}$. Por lo tanto, $\frac{p_{j,n}}{p_{a,n}} \approx \frac{x}{y} = \frac{k}{\lambda_1}$ para n grande.

6. Sea $p_{j,n}$ = número de pájaros de menos de 1 año de edad en el año n-ésimo,
$p_{y,n}$ = número de pájaros entre 1 y 5 años de edad en el año n-ésimo,
$p_{m,n}$ = número de pájaros maduros de más de 5 años de edad en el año n-ésimo.

Entonces $p_{n+1} = Ap_n$, donde $p_n = \begin{pmatrix} p_{j,n} \\ p_{y,n} \\ p_{m,n} \end{pmatrix}$ y $A = \begin{pmatrix} 0 & k & k \\ \alpha & 0.8\beta & 0 \\ 0 & 0.2 & \gamma \end{pmatrix}$

7. $A\mathbf{p}o = \begin{pmatrix} 19000 \\ 9000 \\ 12000 \end{pmatrix}$; $A^3\mathbf{p}o = \begin{pmatrix} 20700 \\ 21150 \\ 13680 \end{pmatrix}$; $A^5\mathbf{p}o \approx \begin{pmatrix} 27090 \\ 28147 \\ 14904 \end{pmatrix}$; $A^{10}\mathbf{p}o = \begin{pmatrix} 54817 \\ 56968 \\ 30090 \end{pmatrix}$

8. Suponiendo que $k_3 = 0$, entonces $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0.5 & 0 \\ 0.9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7 & 0 \end{pmatrix}$

El valor característico dominante de esta matriz es $\lambda_1 = 1.1069$. Un vector característico unitario correspondiente a este valor característico es aproximadamente $\begin{pmatrix} 0.3607 \\ 0.2933 \\ 0.2120 \\ 0.1340 \end{pmatrix}$

9. El valor característico dominante de $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0 \end{pmatrix}$ es aproximadamente 3.7154. Un vector característico unitario es aproximadamente $\begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.17 \\ 0.03 \end{pmatrix}$

10. Los valores característicos son las tres raíces cúbicas de 1 (todas con un valor absoluto igual a 1).

Índice

Otros libros de Grupo Editorial Iberoamérica:

Álgebra y trigonometría con geometría analítica - 2/e.
Earl W. Swokowski

Introducción al cálculo con geometría analítica
Earl W. Swokowski

Cálculo con geometría analítica - 2/e.
Earl W. Swokowski

Matemáticas discretas
Richard Johnsonbaugh

Ecuaciones diferenciales con aplicaciones - 2/e.
Dennis G. Zill

Análisis numérico
Richard Burden / Douglas Faires

Variable compleja con aplicaciones
William R. Derrick

Álgebra abstracta
I. N. Herstein

Matemáticas para administración y economía
Ernest Haeussler / Richard Paul

Introducción a la probabilidad y la estadística
William Mendenhall

Estadística para administración y economía
William Mendenhall

Grupo Editorial Iberoamérica
Wadsworth Internacional/Iberoamérica

ISBN 968-7270-40-3