Un modelo estocástico

1 de octubre de 2019

Este texto es un complemento de las *Notas para el curso de Matemática II, módulo 1*, y requiere de las mismas para su comprensión. Contiene un ejemplo nuevo, en el cual se introducen los grafos de transición.

En el ejemplo que sigue la matriz que permite la transición de un estado al siguiente tiene la particularidad de que todos sus coeficientes son mayores o iguales que cero y las columnas suman 1. Cuando esto sucede, decimos que se trata de un modelo de tipo *estocástico*. Esto mismo sucede con el ejemplo de genética de las notas. No vamos a detenernos en las características generales de este tipo de modelo, sólo entenderemos estos ejemplos.

Consideremos una población que se distribuye, de acuerdo al padecimiento de una determinada enfermedad, en cuatro estados: el estado E_1 de salud, el estado E_2 de enfermedad, el estado E_3 de muerte a causa de dicha enfermedad y el estado E_4 de muerte por otra razón.

Luego de un relevamiento de datos, se obtiene la siguiente información de lo que sucede semana a semana:

- $3/8$ de las personas sanas permanecen sanas, $3/8$ se enferman y el resto muere (no por la enfermedad).
- la mitad de las personas enfermas se curan, mientras que $1/4$, sigue enferma, $1/8$ muere a causa de la enfermedad, y el resto muere por otra causa.

Se asume que durante el período de estudio, no hay nacimientos y se quiere saber a largo plazo, cuál es el porcentaje de muertes a causa de la enfermedad, si se comienza con una población sana.

Esta información puede resumirse en la siguiente figura, que llamaremos *grafo de transición* del modelo.

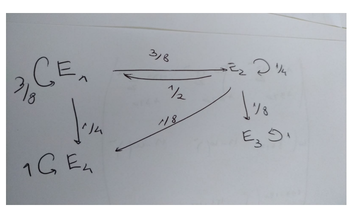

Figura 1: Grafo de transición

Tomando como referencia una semana que llamamos semana 0, el vector

$$R^{(k)} = \begin{pmatrix} s^{(k)} \\ e^{(k)} \\ m^{(k)} \\ n^{(k)} \end{pmatrix}$$

reúne la información de cuál es la cantidad de individuos respectivamente sanos, enfermos, muertos por la enfermedad y muertos por otra razón, que hay en la k-ésima semana.

El lector puede observar (como hicimos para el modelo de Leslie y para el del genotipo) que el vector $R^{(k+1)}$ puede calcularse a partir de $R^{(k)}$, mediante

$$R^{(k+1)} = MR^{(k)}$$

siendo

$$M = \begin{pmatrix} 3/8 & 1/2 & 0 & 0 \\ 3/8 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/8 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/8 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El polinomio característico de la matriz M resulta ser

$$c_M(\lambda) = (1-\lambda)^2(\lambda^2 - 5/8\lambda - 3/32)$$

que tiene raíces $\frac{3}{4}$, $\frac{-1}{8}$ y 1. Notar que la raíz 1 es una raíz doble. Es por esta razón que formamos la siguiente matriz diagonal:

$$D = \begin{pmatrix} 3/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Los vectores propios correspondientes a cada uno de los valores propios son los siguientes:

- Para $\lambda = \frac{3}{4}$, son de la forma $\begin{pmatrix} -8/3z \\ -2z \\ z \\ 11/3z \end{pmatrix}$,
- Para $\lambda = -\frac{1}{8}$, son de la forma $\begin{pmatrix} 9z \\ -9z \\ z \\ -z \end{pmatrix}$,
- Para $\lambda = 1$, son de la forma $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \\ t \end{pmatrix}$.

Para formar la matriz de vectores propios, vamos a aprovechar el hecho de que tenemos dos grados de libertad en los vectores propios correspondientes al valor propio (doble) 1 y tomar entonces dos vectores propios cualesquiera, teniendo cuidado de que no sean uno múltiplo del otro (para que la matriz P no tenga una columna múltiplo de la otra y que pueda entonces ser invertible).
Elegimos entonces la siguiente matriz

$$P = \begin{pmatrix} -8/3 & 9 & 0 & 0 \\ -2 & -9 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 11/3 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

cuya inversa es

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -3/14 & -3/14 & 0 & 0 \\ 1/21 & -4/63 & 0 & 0 \\ 1/6 & 5/18 & 1 & 0 \\ 5/6 & 13/18 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Deducimos que si en la semana 0, la población es de s personas sanas, lo que resulta después de que pasan k semanas es que la nueva distribución en los cuatro estados está dada por el siguiente vector:

$$R^{(k)} = PD^kP^{-1}\begin{pmatrix} s \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Observar que si queremos saber lo que pasa a la larga, hacemos tender k a infinito, obteniendo que si partimos de una población inicial

$$R^{(0)} = \begin{pmatrix} s \\ e \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

obtenemos

$$\lim_{k \to +\infty} R^{(k)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (1/6)s + (5/18)e \\ (5/6)s + (13/18)e \end{pmatrix}.$$

Si al comienzo están todos sanos, se tiene $e = 0$ y la tendencia a largo plazo es que $1/6$ de los individuos (o sea $16,66$ por ciento aproximadamente) mueran a causa de la enfermedad, mientras que los restantes morirán por otra causa.