

Nombre:

Cédula:

Parcial de Matemática II, módulo 1. Versión A.

1. (50 puntos)

a) Estudiar la invertibilidad de las siguientes matrices $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 11 & 13 & 17 \end{pmatrix}$.

b) Hallar la inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

c) Sabiendo que vale $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 5$, calcular los siguientes determinantes

$$\begin{vmatrix} c & b & a \\ f & e & d \\ i & h & g \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 2d & 2e & 2f \\ 2g & 2h & 2i \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 3g + a & 3h + b & 3i + c \end{vmatrix}.$$

2. (50 puntos) Se considera una población dividida en tres clases de edad de 10 años cada una, de la cual se sabe que en promedio cada 10 años:

- las hembras de menos de 10 años no tienen hijas, las de entre 10 y 20 años tienen una hija, y las de entre 20 y 30 años tienen ocho hijas;
- de las hembras de menos de 10 años sobrevive una de cada ocho y de las de entre 10 y 20 años sobrevive una de cada dieciséis.

Se pide:

- Hallar la matriz de Leslie L de la población.
- Indicar si la población tiende a crecer, decrecer o estabilizarse, justificando la respuesta.
- Probar que $\lambda = 1/2$ es un valor propio de L y hallar un vector propio correspondiente.
- Si a largo plazo hay 640 hembras en la primera clase, ¿cuántas habrán en las otras clases?

Solución.

1. a) Es $\det B = 2 \neq 0$ y $\det C = 0$; luego B es invertible y C no lo es.

$$b) A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

c)

$$\begin{vmatrix} c & b & a \\ f & e & d \\ i & h & g \end{vmatrix} = -5, \quad \begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 2d & 2e & 2f \\ 2g & 2h & 2i \end{vmatrix} = 40, \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 3g + a & 3h + b & 3i + c \end{vmatrix} = 15.$$

$$2. a) L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 8 \\ 1/8 & 0 & 0 \\ 0 & 1/16 & 0 \end{pmatrix}$$

b) La tasa neta de reproducción es $R = 3/16 < 1$, luego la población tiende a decrecer.

c) Es $\chi_L(\lambda) = -\lambda^3 + \frac{1}{8}\lambda + \frac{1}{16}$. Es fácil de verificar que vale $\chi_L(1/2) = 0$.

Un vector propio es $V_1 = (1, 1/4, 1/32)$.

d) Van a haber 160 en la segunda y 20 en la tercera.