Matemática 2 - módulo I
Curso 2020

Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Nombre:
C.I.:

Segundo examen parcial

15 de octubre

Turno matutino

15 1. Se consideran las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 5 & -1 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Calcular los siguientes determinantes:

$$\det(A),\ \det(B),\ \det(A+B),\ \det(A^2B).$$

15 2. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 2 & x \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

5 *a*) Dar un valor de x para el cual A es diagonalizable.

10 *b*) Determinar los valores de x para los cuales A es diagonalizable.

15 3. Para cada una de las afirmaciones siguientes indicar si es verdadera o falsa (una respuesta correcta suma 3 puntos, una incorrecta resta 3 y no contestar ni suma ni resta; los puntos negativos sólo afectan a esta pregunta). Supongamos que A es una matriz $n \times n$ diagonalizable. Entonces,

a) A es invertible.

b) A^3 es diagonalizable.

c) el polinomio característico de A tiene n raíces distintas.

d) existe una matriz invertible cuyas columnas son vectores propios de A.

e) A^t es diagonalizable.

15 4. Se considera una cierta población de chupópteros en la que dividimos las hembras en tres clases etáreas: neonatas, jóvenes y adultas. Se sabe que la mitad de las neonatas se convierten en jóvenes y de éstas 2/3 llega a la edad adulta. Además, las hembras neonatas tienen una taza de reproducción de 0,5 per cápita, las jóvenes de 5 y las adultas de 3.

5 *a*) ¿Cuál será el comportamiento de la población a largo plazo?

5 *b*) Hallar el valor propio dominante de la matriz de Leslie.

5 *c*) ¿Cuáles son las proporciones límite entre las franjas etáreas?

Solución

1. *a*) $\det(A) = 0$ porque A tiene dos columnas iguales.
   $\det(B) = 0$ porque B tiene una fila de ceros.

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \text{ entonces } \det(A+B) = 2\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 8.$$

   $\det(A^2B) = \det(A^2)\det(B) = 0$ ya que $\det(B) = 0$.

2. *a*) Si $\boxed{x = 0}$ A es diagonalizable porque es triangular y las entradas diagonales, que serán los valores propios, son distintos.
   Si ponemos $\boxed{x = 1}$ también es diagonalizable, ya que la matriz A queda simétrica y, como vimos, toda matriz simétrica es diagonalizable.

   b) El polinomio característico de A es

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 6 - x.$$

   El discriminante de este polinomio es

$$25 - 4(6 - x) = 1 + 4x.$$

   Si $1+4x < 0$ los valores propios no son reales, por lo que A no es diagonalizable. Si $1+4x = 0$ hay una única raíz y la matriz no puede ser diagonalizable porque en ese caso debería ser diagonal y no lo es. Si $1 + 4x > 0$ hay dos valores propios distintos y por lo tanto A es diagonalizable. En conclusión $\boxed{A \text{ es diagonalizable para } x > -\frac{1}{4}}$.

3. *a*) **F**. A puede tener valor propio cero, por lo cual no necesariamente es invertible.

   b) **V**. Como vimos en el teórico, todas las potencias de A son diagonalizables si A lo es.

   Recordamos la prueba: A es diagonalizable si y sólo si existe P invertible tal que $P^{-1}AP$ es diagonal. Una matriz diagonal elevada a la k sigue siendo diagonal, entonces $(P^{-1}AP)^k = P^{-1}A^kP$ es diagonal y por lo tanto A^k es diagonalizable.

   c) **F**. El polinomio característico puede tener raíces repetidas y aun así la matriz ser diagonalizable. Por ejemplo podemos poner $A = I$.

   d) **V**. Sí, porque esto significa que la matriz es semejante a una diagonal.

   e) **V**. Si A es semejante a una matriz diagonal, entonces A^t también como vimos en el teórico.

   Recordamos la prueba: A es diagonalizable si y sólo si existe P invertible tal que $P^{-1}AP$ es diagonal. Si una matriz es diagonal su traspuesta también lo es, entonces $(P^{-1}AP)^t = P^tA^t(P^t)^{-1}$ es diagonal y por lo tanto A^t es diagonalizable.

4. La matriz de Leslie correspondiente a esta población de hembras es

$$L = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 5 & 3 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

a) $R = \frac{1}{2} + 5 \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = 4 > 1$, entonces la población tiende a crecer exponencialmente.

b) El polinomio característico de L es

$$\chi_L(\lambda) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & 5 & 3 \\ \frac{1}{2} & -\lambda & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & -\lambda \end{vmatrix} = (\tfrac{1}{2} - \lambda)\lambda^2 - \tfrac{1}{2}(-5\lambda - 2) = -\lambda^3 + \tfrac{1}{2}\lambda^2 + \tfrac{5}{2}\lambda + 1.$$

Este polinomio tiene raíz evidente -1. Bajamos por Ruffini para hallar las demás, ya que necesitamos la raíz positiva:

	-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	1
-1		1	$-\frac{3}{2}$	-1
	-1	$\frac{3}{2}$	1	0

Entonces

$$\chi_L(\lambda) = -(1+\lambda)(\lambda^2 - \tfrac{3}{2}\lambda - 1) = -(1+\lambda)(\tfrac{1}{2} + \lambda)(2 - \lambda).$$

Por lo tanto $\boxed{\lambda_1 = 2}$.

c) Sabemos que en el límite las proporciones entre las franjas etáreas tienden a los cocientes entre los coeficientes de un vector propio cualquiera asociado a λ_1. En este caso quedaría

$$\frac{x_2}{x_1} \to \frac{b_1}{\lambda_1} = \frac{1}{4}, \quad \frac{x_3}{x_1} = \frac{b_1 b_2}{\lambda_1^2} = \frac{1}{12}.$$

Entonces, en el largo plazo, la población tiende a distribuirse aproximadamente en 75 % neonatas, 18,75 % jóvenes y 6,25 % adultas.