Matemática 2 - módulo I **Universidad de la República**
Curso 2020 **Facultad de Ciencias**
Centro de Matemática

Nombre:
C.I.:

Segundo examen parcial

15 de octubre

Turno vespertino

15 1. Se consideran las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calcular los siguientes determinantes:

$$\det(A),\ \det(B),\ \det(A+B),\ \det(AB^2.)$$

15 2. Sea

$$A = \begin{pmatrix} -1 & x \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

5 *a*) Dar un valor de x para el cual A es diagonalizable.

10 *b*) Determinar los valores de x para los cuales A es diagonalizable.

15 3. Para cada una de las afirmaciones siguientes indicar si es verdadera o falsa (una respuesta correcta suma 3 puntos, una incorrecta resta 3 y no contestar ni suma ni resta; los puntos negativos sólo afectan a esta pregunta). Supongamos que A es una matriz $n \times n$ diagonalizable. Entonces,

a) existe $k \in \mathbb{N}$ tal que A^k es diagonal.

b) si A es invertible A^{-1} también es diagonalizable.

c) 0 no es valor propio de A.

d) el polinomio característico de A tiene todas sus raíces reales.

e) A^t es invertible.

15 4. Se considera una cierta población de chupópteros en la que dividimos las hembras en tres clases etáreas: neonatas, jóvenes y adultas. Se sabe que un tercio de las neonatas se convierten en jóvenes y de éstas la mitad llega a la edad adulta. Además, las hembras neonatas tienen una taza de reproducción de 5/3 per cápita, las jóvenes de 11 y las adultas de 6.

5 *a*) ¿Cuál será el comportamiento de la población a largo plazo?

5 *b*) Hallar el valor propio dominante de la matriz de Leslie.

5 *c*) ¿Cuáles son las proporciones límite entre las franjas etáreas?

Solución

a) 1) $\det(A) = 0$ porque A tiene una columna de ceros.
$\det(B) = 0$ porque B tiene dos filas iguales.

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 4 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \text{ entonces } \det(A+B) = 2\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 12.$$

$\det(AB^2) = \det(A)\det(B^2) = 0$ ya que $\det(A) = 0$.

b) 1) Si $\boxed{x = 0}$ A es diagonalizable porque es triangular y las entradas diagonales, que serán los valores propios, son distintos.
Si ponemos $\boxed{x = 3}$ también es diagonalizable, ya que la matriz A queda simétrica y, como vimos, toda matriz simétrica es diagonalizable.

2) El polinomio característico de A es

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 2 - 3x.$$

El discriminante de este polinomio es

$$1 + 4(2 + 3x) = 9 + 12x.$$

Si $9 + 12x < 0$ los valores propios no son reales, por lo que A no es diagonalizable. Si $9 + 12x = 0$ hay una única raíz y la matriz no puede ser diagonalizable porque en ese caso debería ser diagonal y no lo es. Si $9 + 12x > 0$ hay dos valores propios distintos y por lo tanto A es diagonalizable. En conclusión $\boxed{A \text{ es diagonalizable para } x > -\frac{3}{4}}$.

c) 1) **F**. Por ejemplo si $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, es diagonalizable y sin embargo se tiene que $A^k = A$ para todo $k \in \mathbb{N}$ por lo que no hay ninguna potencia diagonal.

2) **V**. Lo vimos en el teórico y también en un ejercicio del práctico.

Recordamos la prueba: A es diagonalizable si y sólo si existe P invertible tal que $P^{-1}AP$ es diagonal. Una matriz diagonal invertible tiene inversa diagonal, entonces $(P^{-1}AP)^{-1} = P^{-1}A^{-1}P$ es diagonal y por lo tanto A^{-1} es diagonalizable.

3) **F**. La matriz $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ es diagonal y 0 es valor propio.

4) **V**. Matrices semejantes tienen el mismo polinomio característico. El polinomio característico de una matriz diagonal en M_n tiene todas sus raíces reales (que son las entradas diagonales).

5) **F**. La traspuesta de una matriz diagonal es diagonal, y una matriz diagonal no tiene por qué ser invertible.

d) La matriz de Leslie correspondiente a esta población de hembras es

$$L = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & 11 & 6 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

1) $R = \frac{5}{3}+11\times\frac{1}{3}+6\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2} = \frac{16}{3}+1 > 1$, entonces la población tiende a crecer exponencialmente.
2) El polinomio característico de L es

$$\chi_L(\lambda) = \begin{vmatrix} \frac{5}{3}-\lambda & 11 & 6 \\ \frac{1}{3} & -\lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix} = (\tfrac{5}{3}-\lambda)\lambda^2 - \tfrac{1}{3}(-11\lambda-3) = -\lambda^3 + \tfrac{5}{3}\lambda^2 + \tfrac{11}{3}\lambda + 1.$$

Este polinomio tiene raíz evidente -1. Bajamos por Ruffini para hallar las demás, ya que necesitamos la raíz positiva:

	-1	$\frac{5}{3}$	$\frac{11}{3}$	1
-1		1	$-\frac{8}{3}$	-1
	-1	$\frac{8}{3}$	1	0

Entonces

$$\chi_L(\lambda) = -(1+\lambda)(\lambda^2 - \tfrac{8}{3}\lambda - 1) = -(1+\lambda)(\tfrac{1}{3}+\lambda)(3-\lambda).$$

Por lo tanto $\boxed{\lambda_1 = 3}$.
3) Sabemos que en el límite las proporciones entre las franjas etáreas tienden a los cocientes entre los coeficientes de un vector propio cualquiera asociado a λ_1. En este caso quedaría

$$\frac{x_2}{x_1} \to \frac{b_1}{\lambda_1} = \frac{1}{9}, \quad \frac{x_3}{x_1} = \frac{b_1 b_2}{\lambda_1^2} = \frac{1}{54}.$$

Entonces, en el largo plazo, la población tiende a distribuirse aproximadamente en 88,5 % neonatas, 9,8 % jóvenes y 1,7 % adultas.