Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Matemática II, módulo 1
Segundo semestre 2019

Examen. 12/12/2019.

Nombre:

Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Hallar los valores de a para los cuales la matriz A es invertible.
2. Se considera el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 3x + y &= 0 \\ y + az &= 0 \\ 3x + 2y - z &= 0 \end{cases}.$$

   Discutir según a la cantidad de soluciones del sistema.

3. Para $a = 0$,
   - a) Calcular $\det(A)$.
   - b) Hallar la inversa de A si existe.
   - c) Determinar si A es diagonalizable, y en caso de serlo, explicitar D y P tales que $A = PDP^{-1}$.

Nota. Para aprobar se requieren 50 puntos sobre 100 (son 5 partes de 20 puntos cada una).

Solución.

1. Es $\det A = -3(a+1)$. Luego A es invertible si y solo si $a \neq -1$.

2. La matriz del sistema es A, luego si $a \neq -1$ entonces el sistema tiene una única solución (la trivial) y si $a = -1$ entonces el sistema tiene infinitas soluciones.

3. *a*) $\det(A) = -3$.

   b)

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

   c) El polinomio característico de A es

$$\chi_A(t) = -(1-t)(1+t)(3-t)$$

   luego sus valores propios son 1, -1 y 3. Como tiene 3 valores propios entonces A es diagonalizable. Hallando vectores propios correspondientes obtenemos que una posibilidad es

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \qquad P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -4 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$