Examen de Matemática II, módulo 1
07/02/2022.

El examen dura dos horas. El mínimo para aprobar es de 50 puntos.

1. (**25 puntos**)
   Hallar las soluciones de los siguientes sistemas de ecuaciones

$$\begin{cases} x+y+z &= 1 \\ x+2y+z &= 1 \\ x+2y+2z &= 1 \end{cases}, \qquad \begin{cases} x+2y+3z &= 1 \\ x-2y-z &= 1 \\ x+3y+4z &= 1 \end{cases}.$$

2. (**25 puntos**)
   Hallar una matriz $\left(\begin{smallmatrix} x & y \\ z & t \end{smallmatrix}\right)$ para que se verifique la siguiente igualdad

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. (**50 puntos**)
   Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 2 \\ 12 & -11 & 2 \\ 12 & -16 & 7 \end{pmatrix}.$$

   a) Hallar el polinomio característico de A.
   b) Probar que $\lambda = 5$ es un valor propio de A.
   c) Hallar una matriz diagonal D y una matriz invertible P tales que $A = PDP^{-1}$.

Nota: *en la resolución de los ejercicios se deben justificar todas las afirmaciones e incluir todos los cálculos que fueron necesarios para la misma.*

Solución

1. El primer sistema es compatible determinado, la solución es $x = 1$, $y = z = 0$. El segundo es compatible indeterminado, la solución es $x = 1 - \lambda$, $y = -\lambda$, $z = \lambda$, con $\lambda \in \mathbb{R}$.

2.

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

Luego $\left(\begin{smallmatrix} x & y \\ z & t \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 6 & -2 \\ -10 & 4 \end{smallmatrix}\right)$.

3. *a*) El polinomio característico de A es

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 9-\lambda & -8 & 2 \\ 12 & -11-\lambda & 2 \\ 12 & -16 & 7-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 3+\lambda & 0 \\ 12 & -11-\lambda & 2 \\ 12 & -16 & 7-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3+\lambda & 0 \\ 1-\lambda & -11-\lambda & 2 \\ -4 & -16 & 7-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -(\lambda+3)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -4 & 7-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+3)(\lambda-3)(\lambda-5).$$

En el cálculo anterior, primero a la primera fila le restamos la segunda y luego a la primera columna le sumamos la segunda. Luego $\chi_A(\lambda) = -(\lambda+3)(\lambda-3)(\lambda-5)$.

b) Si hallaron $\chi_A(\lambda)$ en la forma anterior, entonces esta parte es obvia. Si lo hallaron de otra forma, es $\chi_A(\lambda) = -\lambda^3 + 5\lambda^2 + 9\lambda - 45$ y hay que verificar que $\lambda = 5$ es raíz de ese polinomio.

c) Los valores propios de A son 3, -3 y 5. Operando obtenemos que $(1,1,1)$, $(1,2,2)$ y $(1,1,2)$ son vectores propios correspondientes. Luego es

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$