

Examen. 23/02/2022.

1. (30 puntos) Calcular los siguientes determinantes

$$A = \begin{vmatrix} 20 & 31 & 4 \\ 10 & 17 & 2 \\ 30 & 19 & 6 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} 11 & 17 & 2 \\ 23 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 121 & 7 \\ 1 & 1 & 132 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 401 & 3 \end{vmatrix}.$$

Sugerencia: pensar antes de actuar ...

2. (20 puntos) Hallar la inversa de $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. (50 puntos) Se tiene una población dividida en tres clases de edad de 10 años cada una, con matriz de Leslie

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se pide.

- ¿Cuántas hijas tiene en promedio cada 10 años una hembra de la segunda clase de edad?
- ¿Cuántas hembras de la segunda clase de edad sobreviven en promedio cada 10 años?
- Indicar si la población va a tender a extinguirse, estabilizarse o crecer, justificando la respuesta.
- Se sabe que hay 60 hembras en la primera clase, 30 en la segunda y 10 en la tercera.
 - Hallar cuántas hembras habrá en cada clase al cabo de 10 años.
 - Hallar cuántas hembras había en cada clase 10 años antes.

Nota: en la resolución de los ejercicios se deben justificar todas las afirmaciones e incluir todos los cálculos que fueron necesarios para la misma.

Solución

1.

$$A = \begin{vmatrix} 20 & 31 & 4 \\ 10 & 17 & 2 \\ 30 & 19 & 6 \end{vmatrix} = 10 \times 2 \times \begin{vmatrix} 2 & 31 & 2 \\ 1 & 17 & 1 \\ 3 & 19 & 3 \end{vmatrix} = 0 \text{ (hay 2 columnas iguales),}$$

$$B = \begin{vmatrix} 11 & 17 & 2 \\ 23 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2 \times \begin{vmatrix} 23 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -2 \times 3 \times 4 = -24,$$

$$C = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 121 & 7 \\ 1 & 1 & 132 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 401 & 3 \end{vmatrix} = 2 \times \begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2 \times 3 \times \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \times 3 \times (-3) = -18.$$

$$2. M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. a) Una hembra de la segunda clase de edad tiene en promedio 2 hijas ($a_2 = 2$).

b) En promedio sobreviven la tercera parte de las hembras de la segunda clase de edad ($b_2 = 1/3$).

c) La tasa neta de reproducción es $R = 2$, luego la población tiende a crecer ($R > 1$).

$$d) 1) \text{ Escribiendo } X_1 = \begin{pmatrix} 60 \\ 30 \\ 10 \end{pmatrix}, \text{ es } X_2 = LX_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 60 \\ 30 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 120 \\ 30 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Luego van a haber 120 en la primera, 30 en la segunda y 10 en la tercera.

2) Hay que hallar X_0 tal que $X_1 = LX_0$. Escribiendo $X_0 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, es

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 30 \\ 10 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2y + z = 60 \\ \frac{x}{2} = 30 \\ \frac{y}{3} = 10 \end{cases} \Rightarrow X_0 = \begin{pmatrix} 60 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Luego habían 60 en la primera, 30 en la segunda y 0 en la tercera.