Examen. 19/07/2022. Duración: 2 horas.

El mínimo para aprobar es de 50 puntos.

1. (**25 puntos**) Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones.

$$(A): \begin{cases} x+y-z &= 2 \\ 2x-y+2z &= 1 \\ 3x+2y+z &= 5 \end{cases}, \qquad (B): \begin{cases} 2x+y+z &= 1 \\ x-2y+3z &= 0 \\ x+3y-2z &= 2 \end{cases}.$$

2. (**25 puntos**) Sabiendo que vale

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = 1,$$

calcular

$$\begin{vmatrix} 2a_{11} & 2a_{12} & 2a_{13} & 2a_{14} \\ 2a_{21} & 2a_{22} & 2a_{23} & 2a_{24} \\ 2a_{31} & 2a_{32} & 2a_{33} & 2a_{34} \\ 2a_{41} & 2a_{42} & 2a_{43} & 2a_{44} \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 3a_{11}+a_{12} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 3a_{21}+a_{22} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 3a_{31}+a_{32} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 3a_{41}+a_{42} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

3. (**50 puntos**) Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 8 & -5 \\ 12 & 14 & -10 \\ 24 & 18 & -15 \end{pmatrix}.$$

Se pide.

a) Hallar el polinomio característico de A. *Sugerencia:* al calcular el determinante correspondiente, sumarle a la tercera fila la segunda multiplicada por -2.

b) Hallar los valores propios de A.

c) Para cada valor propio hallado anteriormente, encontrar un vector propio correspondiente.

d) Hallar una matriz invertible P y una matriz diagonal D tales que $A = PDP^{-1}$.

Nota: *en la resolución de los ejercicios se deben justificar todas las afirmaciones e incluir todos los cálculos que fueron necesarios para la misma.*

Solución

1. El sistema (A) es compatible determinado, la solución es $x = y = 1$, $z = 0$. El sistema (B) es incompatible.

2.
$$\begin{vmatrix} 2a_{11} & 2a_{12} & 2a_{13} & 2a_{14} \\ 2a_{21} & 2a_{22} & 2a_{23} & 2a_{24} \\ 2a_{31} & 2a_{32} & 2a_{33} & 2a_{34} \\ 2a_{41} & 2a_{42} & 2a_{43} & 2a_{44} \end{vmatrix} = 2^4 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = 16,$$

En lo anterior sacamos un factor 2 por cada columna (o fila).

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 3a_{11}+a_{12} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 3a_{21}+a_{22} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 3a_{31}+a_{32} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 3a_{41}+a_{42} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 3a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 3a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 3a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 3a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \\ &= 3\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \\ &= 3 \times 1 + 0 = 3. \end{aligned}$$

El último determinante vale cero por tener dos columnas iguales.

3. *a*)

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} 4-\lambda & 8 & -5 \\ 12 & 14-\lambda & -10 \\ 24 & 18 & -15-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 8 & -5 \\ 12 & 14-\lambda & -10 \\ 0 & -10+2\lambda & 5-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 & -5 \\ 12 & -6-\lambda & -10 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (5-\lambda)\begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 \\ 12 & -6-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(\lambda^2+2\lambda) = -\lambda^3+3\lambda^2+10\lambda. \end{aligned}$$

b) Es $\chi_A(\lambda) = -(\lambda-5)(\lambda+2)\lambda$. Luego los valores propios son $0, -2, 5$.

c) A $\lambda = 0$ le corresponde $(1, 2, 4)$, a $\lambda = -2$ le corresponde $(1, 3, 6)$ y a $\lambda = 5$ le corresponde $(1, 2, 3)$.

d) $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$