Matemática 2 - módulo I
Curso 2020

Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Examen

4 de agosto de 2021

(30) 1. Se consideran las siguientes matrices:

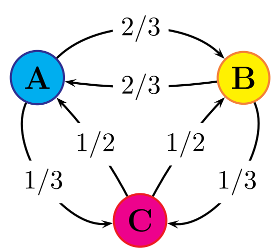
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

(10) *a*) Calcular AB, BA y A^tA.

(10) *b*) ¿Cuáles de los productos calculados en *a*) son invertibles?

(10) *c*) Encontrar, en caso que exista, una matriz X tal que $XA^t = B$.

(30) 2. Una cierta población de pájaros habita en tres regiones que llamaremos A, B y C. Cada mes, todos los pájaros de cada región emigra a otra de acuerdo al siguiente diagrama (no tomaremos en cuenta nacimientos ni muertes)



(5) *a*) Dar una matriz A, que describa la transición de la población de un mes al siguiente (es decir, de manera que si $\begin{pmatrix} X_A^{(0)} \\ X_B^{(0)} \\ X_C^{(0)} \end{pmatrix}$ es la distribución inicial, el mes siguiente la distribución será $A\begin{pmatrix} X_A^{(0)} \\ X_B^{(0)} \\ X_C^{(0)} \end{pmatrix}$).

(15) *b*) Hallar valores y vectores propios de la matriz de transición.

(10) *c*) Mostrar que en el largo plazo la distribución de la población tiende a estabilizarse y hallar la distribución límite en proporción a la población total.

Solución

1. *a*) $AB = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 8 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $A^tA = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

   b)
$$\det(AB) = 0 \longrightarrow \ AB \text{ no en invertible,}$$
$$\det(BA) = 9 \neq 0 \longrightarrow BA \text{ es invertible,}$$
$$\det(A^tA) = 9 \neq 0 \longrightarrow A^tA \text{ es invertible.}$$

   c) Si existe X, multiplicando la igualdad por A a la derecha tenemos que
$$XA^tA = BA.$$
   Como A^tA es invertible tenemos que debe ser
$$X = BA(A^tA)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
   Podemos verificar que efectivamente se tiene $XA^t = B$ (es necesario verificar que se cumple, lo anterior no implica la existencia de X).

2. *a*)
$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

   b) $\chi_A(\lambda) = -\lambda^3 + \frac{7}{9}\lambda + \frac{2}{9}$ tiene raíz $\lambda = 1$. Bajando por Ruffini:

	-1	0	7/9	2/9
1		-1	-1	-2/9
	-1	-1	-2/9	0

   obtenemos las otras dos $\lambda = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 - 8/9}}{2}$ $\lambda = -\frac{1}{3}$ $\lambda = -\frac{2}{3}$

   Veamos ahora los vectores propios.

   $\underline{\lambda = 1}$
$$A = \begin{pmatrix} -1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} -x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{2}z = 0 \\ \frac{2}{3}x - y + \frac{1}{2}z = 0 \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y - z = 0 \end{cases}$$
   Resolviendo el sistema obtenemos que las soluciones son de la forma $(3x, 3x, 2x)$ para $x \in \mathbb{R}$.

$\underline{\lambda = -\frac{1}{3}}$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{2}z = 0 \\ \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{2}z = 0 \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z = 0 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema obtenemos que las soluciones son de la forma $(x, x, -2x)$ para $x \in \mathbb{R}$.

$\underline{\lambda = -\frac{2}{3}}$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{2}z = 0 \\ \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{2}z = 0 \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z = 0 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema obtenemos que las soluciones son de la forma $(x, -x, 0)$ para $x \in \mathbb{R}$.

c) Por lo anterior la matriz A es diagonaliazable. Sea P una matriz invertible tal que

$$A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} P^{-1},$$

entonces

$$\lim_{k \to +\infty} A^k = \lim_{k \to +\infty} P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-\frac{1}{3})^k & 0 \\ 0 & 0 & (-\frac{2}{3})^k \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Entonces, en el límite, las proporciones entre las poblaciones de las diferentes regiones tienden a las proporciones entre las coordenadas de los vectores propios asociados a 1 y por lo tanto

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{X_A^{(k)}}{X_B^{(k)}} = 1 \qquad \lim_{k \to +\infty} \frac{X_A^{(k)}}{X_C^{(k)}} = \frac{3}{2}$$

Si la población total es N tendremos entonces que la distribución límite será

$$X_A = X_B = \frac{3}{8}N, \; X_C = \frac{1}{4}N$$