Matemática 2 - módulo I
Curso 2020

Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Examen

21 de diciembre

50 1. Se considera el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 2x - y - kz = 0 \\ x - y - 2z = 1 \\ -x + 2y + k^2 z = k, \end{cases}$$

siendo k una constante.

10 *a*) Resolver el sistema para $k = 0$.

10 *b*) Escalerizar el sistema (siendo ahora k arbitrario).

10 *c*) Hallar los valores de k para los cuales el sistema es incompatible.

10 *d*) Determinar los valores k de manera que el sistema tenga solución única.

10 *e*) Hallar los valores de k para los cuales el sistema tiene infinitas soluciones y hallar la solución general en esos casos.

50 2. Una población tiene tres grupos etarios de un año cada uno con fecundidades de $0,5$ para el primer grupo, 5 para el segundo y 0 para el último. La tasa de sobrevivencia anual de la primer clase es $0,1$, mientras que la tasa de sobrevivencia anual de la segunda clase es 1.

10 *a*) Escribir la matriz de Leslie L de la población.

10 *b*) Si la cantidad inicial de la población es de 1000 individuos en cada clase, calcular la evolución de dichas cantidades en el primer año.

10 *c*) Hallar los valores y los vectores propios asociados a L.

10 *d*) ¿Es L diagonalizable? Justificar la respuesta. En caso afirmativo hallar una matriz invertible P y su inversa P^{-1} tal que $P^{-1}LP$ es diagonal.

10 *e*) ¿Qué sucede con el tamaño de la población a largo plazo?

Solución

1. *a*) Poniendo $k=0$ el sistema nos queda

$$\begin{cases} 2x-y \qquad = 0 \\ x-y-2z=1 \\ -x+2y \qquad = 0, \end{cases}$$

Es compatible determinado y la solución es $\boxed{(0,0,-\frac{1}{2})}$.

b) Haciendo ③+② obtenemos

$$\begin{cases} 2x-y-kz=0 \\ x-y-2z=1 \\ y+(k^2-2)z=k+1. \end{cases}$$

Si ahora hacemos 2②-① nos queda

$$\begin{cases} 2x-y-kz=0 \\ -y+(k-4)z=2 \\ y+(k^2-2)z=k+1. \end{cases}$$

Por último, para eliminar la y en la tercer ecuación hacemos ③+②

$$\begin{cases} 2x-y-kz=0 \\ -y+(k-4)z=2 \\ (k^2+k-6)z=k+3, \end{cases}$$

con lo cual el sistema nos queda escalerizado.

c) Para que el sistema sea incompatible la útima ecuación del escalerizado debe ser inconsistente, es decir debe ser nulo el coeficiente de z y no nulo el término independiente.

$$k^2+k-6=(k+3)(k-2),$$

se anula para $k=-3$ y $k=2$. Entonces tenemos una contradicción sólo para $\boxed{k=2}$ y en ese caso la última ecuacion del sistema escalerizado es $0=5$.

d) El sistema es compatible determinado para $k\neq -3,2$, lo cual es evidente a partir de *b*) y *c*).

e) Para $k=-3$ la última ecuación del escalerizado es $0=0$ y el sistema es equivalente a

$$\begin{cases} 2x-y+3z=0 \\ -y-7z=2, \end{cases}$$

y por lo tanto la solución general es $\boxed{(-5z-1,-7z-2,z)}$.

2. *a*)

$$L=\begin{pmatrix} 0,5 & 5 & 0 \\ 0,1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) La evolución después de un año se obtiene multiplicando el vector inicial por la matriz de Leslie

$$L = \begin{pmatrix} 0,5 & 5 & 0 \\ 0,1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1000 \\ 1000 \\ 1000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5500 \\ 100 \\ 1000 \end{pmatrix}.$$

c)

$$\begin{vmatrix} 0,5-\lambda & 5 & 0 \\ 0,1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \tfrac{1}{2}\lambda^2 + \tfrac{1}{2}\lambda = -\lambda(\lambda-1)(\lambda+\tfrac{1}{2}).$$

Entonces los valores propios son $\boxed{\lambda = 0,\ 1,\ -\tfrac{1}{2}}$. Al calcular los vectores propios obtenemos

$$\lambda = 0 \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 1 \longrightarrow \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = -\frac{1}{2} \longrightarrow \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

d) La matriz es diagonalizable porque es 3×3 y tiene 3 valores propios distintos.

$$P = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad P^{-1} = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 1 & -10 & 0 \\ -3 & 15 & 15 \end{pmatrix}.$$

e) El valor propio positivo es dominante e igual a 1, por lo cual a la larga la población se estabiliza.