**Matemática 2 - módulo I**
**Curso 2020**

**Universidad de la República**
**Facultad de Ciencias**
**Centro de Matemática**

**Examen**

*19 de julio de 2021*

1. Se recuerda que una matriz cuadrada $A$ se llama *idempotente* si verifica $A^2 = A$.

   *a*) Mostrar que la matriz
   $$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix}$$
   es idempotente.

   *b*) Supongamos que $A$ es idempotente y que $I$ es la matriz identidad del mismo tamaño que $A$.

      i. Probar que $B = I - A$ es idempotene.

      ii. Si $A$ es además invertible, probar que $A = I$.

2. Se considera la siguiente matriz:
   $$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

   *a*) Hallar los valores propios y los correspondientes vectores propios de $A$.

   *b*) Concluir que $A$ es diagonalizable, y hallar una matriz invertible $P$ tal que $P^{-1}AP$ sea diagonal.

   *c*) Hallar $A^{-1}$, si existe.

## Solución

1. *a)* Calculamos $A^2$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2(2) - 4(\frac{1}{2}) & 2(3) + 3(1) - 4(\frac{3}{2}) & 2(-4) + -4(-1) \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}(2) - 1(\frac{1}{2}) & \frac{1}{2}(3) + \frac{3}{2}(1) - 1(\frac{3}{2}) & \frac{1}{2}(-4) - 1(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

*b)* i.

$$B = I - A \Rightarrow B^2 = (I - A)(I - A) = I^2 - 2AI - A^2 = I - 2A + A = I - A = B.$$

ii. Multiplicando la ecuación $A^2 = A$ por $A^{-1}$ nos queda

$$\begin{aligned} &A^2 A^{-1} = AA^{-1} = I \\ &\ \ \parallel \\ &AAA^{-1} = A \end{aligned}$$

2. *a)*

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -2 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = (2-\lambda)^2(1-\lambda)$$

$$\text{Raíces: } \lambda = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \begin{cases} \lambda = 2 \\ \lambda = 1 \end{cases}$$

$\underline{\lambda = 1}$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} x + 2z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

Sustituyendo $x = -2z$ en la segunda ecuación obtenemos $y = z$. Por lo tanto los vectores propios son de la forma

$$(-2z, z, z) \qquad z \in \mathbb{R}$$

$\underline{\lambda = 2}$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

El sistema tiene dos grados de libertad y las soluciones son

$$(x, y, -x) \quad x,\ y \in \mathbb{R}$$

*b*) $A$ es diagonalizable porque es $3 \times 3$, tiene 1 valor propio simple, un valor propio doble, y el sistema para hallar los vectores propios del valor propio doble tiene 2 grados de libertad.

Usando lo hallado en *a*) una posible matriz $P$ es:

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

*c*)

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$