Matemática 2 - módulo I
Curso 2020

Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Examen

1 de marzo

50 1. Consideremos el sistema

$$\begin{cases} \alpha x + y = \alpha^2 \\ x + \alpha y = 1, \end{cases}$$

dependiendo del parámetro $\alpha \in \mathbb{R}$.

15 *a*) Determinar los valores de α para los cuales el sistema no tiene solución.

15 *b*) Determinar los valores de α para los cuales el sistema tiene infinitas soluciones y hallar las correspondientes soluciones.

20 *c*) La matriz asociada al sistema es diagonalizable por ser simétrica, determinar los valores propios y hallar vectores propios asociados (para valores arbitrarios del parámetro α).

50 2. Una plaga de chupópteras pulula por los jardines de facultad. Dado que ninguna sobrevive más de tres años dividimos a la población en tres franjas etáreas de un año. Se sabe lo siguiente:

- La primera franja es infértil, mientras que en la segunda tienen 2 hijas en promedio cada una y en la tercera franja 1/3 de hijas cada una.
- Las más jóvenes pasan todas a la edad adulta, y de la segunda franja sobreviven 3/4.

10 *a*) Escribir la matriz de Leslie de la población.

15 *b*) Probar que la población crece exponencialmente.

15 *c*) Se quiere controlar la población sin que llegue a extinguirse. ¿Qué proporción de las chupópteras más jóvenes hay que eliminar por año para que la población se estabilice (a largo plazo)?

10 *d*) Para la nueva matriz de Leslie hallada en *c*) calcular todos los valores propios.

Solución

1. a) Si hacemos la operación ①$-\alpha$② nos queda

$$\begin{cases} (1-\alpha^2)y = \alpha^2 - \alpha \\ \quad x + \alpha y = 1. \end{cases} \tag{1}$$

Para que el sistema no tenga solución debe ser el coeficiente de y en la primer ecuación igual a cero y el término de la derecha distinto de cero. El coeficiente de y es $1-\alpha^2 = (1-\alpha)(1+\alpha)$, que se anula para $\alpha = \pm 1$, mientras que el término de la derecha es $\alpha^2 - \alpha = \alpha(\alpha - 1)$, el cual se anula para $\alpha = 0, 1$. Por lo tanto, para que la ecuación no tenga solución debe ser $\boxed{\alpha = -1}$.

b) De (1) de la parte a) tenemos que para que el sistema tenga infinitas soluciones, es decir, para que sea compatible indeterminado, debe ser el coeficiente de y nulo y el término de la derecha igual a cero en la primer ecuación. Esto sucede sólo para $\boxed{\alpha = 1}$. El conjunto de soluciones será entonces

$$\mathrm{Sol} = \{(x, 1-x) \ : \ x \in \mathbb{R}\}.$$

c) La matriz del sistema es $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}$.

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \alpha - \lambda & 1 \\ 1 & \alpha - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\alpha\lambda + \alpha^2 - 1 = (\lambda - \alpha - 1)(\lambda - \alpha + 1).$$

$\underline{\lambda = \alpha + 1}$:

$$A - (\alpha+1)I = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

entonces los vectores propios asociados están dados por $\boxed{y = x}$.

$\underline{\lambda = \alpha - 1}$:

$$A - (\alpha+1)I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

entonces los vectores propios asociados están dados por $\boxed{y = -x}$.

2. a)

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 2 & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

b) $R = a_1 + a_2 b_1 + a_3 b_1 b_2 = 0 + 2 \times 1 + \frac{1}{3} \times 1 \times \frac{3}{4} = 2{,}25 > 1$, por lo tanto la población tiende a crecer exponencialmente.

c) Planteamos una matriz de Leslie con b_1 a determinar, de manera que el R sea 1. Es decir, debe ser $1 = R = 2b_1 + \frac{1}{4}b_1 \Rightarrow b_1 = \frac{4}{9}$. Por lo tanto, para que la población tienda a estabilizarce debemos eliminar $\boxed{\frac{5}{9}}$ de los individuos más jóvenes por año.

d) Con la condición dada en *c*) tenemos que la nueva matriz de Leslie es

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 2 & \frac{1}{3} \\ \frac{4}{9} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 \end{pmatrix},$$

entonces

$$\chi_L(\lambda) = -\lambda^3 + \frac{8}{9}\lambda + \frac{1}{9}.$$

Sabemos que $\lambda = 1$ es raíz, así que bajando por Ruffini podemos hallar las otras dos:

	-1	0	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$
1		-1	-1	$-\frac{1}{9}$
	-1	-1	$-\frac{1}{9}$	0

Las otras raíces serán entonces $\lambda = \frac{-1\pm\sqrt{1-4/9}}{2} = \boxed{-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{6}}$.