

Práctico 2 - Matrices

1. Consideremos las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Calcular: $4A + B$, $(2A)^t - 3B^t$, AB , CA , $CAAB$.

2. a) Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$. ¿Es cierto que si $a \neq 0$ y $ab = ac$ entonces $b = c$? Justificar la respuesta.

b) Sean:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcular AB y AC . Concluir lo siguiente:

$$\left. \begin{array}{l} AB = AC \\ A \neq O \end{array} \right\} \not\Rightarrow B = C$$

c) ¿Cuál es la diferencia esencial entre el caso escalar (es decir “numérico”) y el caso matricial? Recuerde la relación entre los números reales y las matrices 1×1 . ¿ Conoce alguna situación en la que $AB = AC$ implique $B = C$?

3. Un laboratorio fabrica tres productos (A, B y C) cada uno de los cuales requiere de ciertas cantidades de tres tipos de materia prima y de mano de obra. La matriz R resume los requerimientos por unidad de cada producto:

$$R = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 5 \\ 3 & 2 & 3 & 8 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Las necesidades de materias primas se dan en *kg* por unidad y las de mano de obra en *horas* por unidad. Por ejemplo, la primera fila de R indica que para producir una unidad de producto A , se necesita 2 kg de la primera materia prima, 4 kg de la segunda, 5 kg de la tercera y 5 horas de mano de obra. Las tres materias primas cuestan \$2, \$3 y \$1,50 por *kg* respectivamente. Los costos de mano de obra son de \$5 por *hora*. Suponga que se deben fabricar 500, 1000 y 400 productos de tipo A, B y C respectivamente. Plantee las operaciones matriciales que deben realizarse para calcular el costo total de la producción.

4. a) Hallar, si es posible, la inversa de cada una de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & -8 & 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

b) Considera los siguientes sistemas de ecuaciones.

$$\begin{cases} 3x - 7y = 1 \\ x - 2y = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} 3x + 5y = 2 \\ x + z = 10 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$$

1) Escríbelos en forma matricial.

2) Resuélvelos utilizando a).

c) Resolver el sistema:
$$\begin{cases} 6x - 2y + 3z = 1 \\ 3x + y + 2z = 1 \\ 3x - 8y + 3z = 1 \end{cases} .$$

d) Hallar una matriz X tal que:
$$XB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} .$$

5. Consideremos las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Verificar que $AB = BA = O$, $AC = A$, $CA = C$, $C^2 = C$, $A^2 = A$. Deducir que A , B y C **no** son invertibles.

6. Sea $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ una matriz diagonal.

(a) Calcular D^2 y D^3 .

(b) Inducir una fórmula para D^n , donde n es un natural cualquiera.

(c) Probar que D es invertible si y sólo si, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \neq 0$ y, en ese caso hallar D^{-1} .

7. Número de condición

El número de condición de una matriz estudia cuánto cambia la solución a un sistema por pequeñas perturbaciones. Su importancia radica en que cuando se obtienen datos de la realidad estos no son exactos y tienen un cierto margen de error. El número de condición dice si esos errores pueden llegar a afectar en gran medida el resultado obtenido.

Este ejercicio intenta introducir el problema, veremos más sobre el número de condición en repartidos posteriores.

a) Resolver el sistema $AX = B$, donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 0,999 \\ 0,999 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1,999 \\ 1,999 \end{pmatrix}$ (es un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas)

b) Considerar el sistema $AX = B_1$, con la misma matriz A , y $B_1 = \begin{pmatrix} 1,989 \\ 2,009 \end{pmatrix}$. Dar una estimación del valor de X sin resolver el sistema.

c) Resolver $AX = B_1$. ¿Obtuviste un resultado cercano al que esperabas?

d) Resolver $AX = B_2$, con $B_2 = \begin{pmatrix} 2,009 \\ 2,009 \end{pmatrix}$.

e) Discutir interpretaciones de los resultados obtenidos.

8. TRANSICIONES EN UNA POBLACIÓN

La población de un país está distribuida en tres grupos: los que viven en ciudades, los que viven en zonas rurales, y los que viven en el exterior del país. Llamemos c , r y e a los porcentajes de pobladores en cada grupo. Cada año, algunos habitantes cambian su situación, según el siguiente esquema:

de la ciudad	de la población rural	del exterior
60 % sigue en la ciudad, 10 % pasa a zona rural, 30 % emigran al exterior,	40 % se mudan a la ciudad, 40 % permanece donde está, 20 % parte fuera del país,	10 % vuelven a la ciudad, 10 % a zonas rurales, 80 % sigue en el exterior.

En este modelo del comportamiento de la población no tenemos en cuenta el efecto de muertes y nacimientos.

- a) Si un año comienza con un 40 % de la población en la ciudad, un 30 % en zonas rurales, y un 30 % en el extranjero, ¿cuál será la distribución a fin del año? ¿Cómo comenzó el año anterior?
- b) Hallar la expresión general de la transición de los porcentajes (c, r, e) de un año al siguiente.
- c) ¿Existe alguna distribución (c, r, e) de la población tal que los porcentajes con los que las personas se distribuyen al final del año sean iguales a los del comienzo del año?