Matemática II
Curso 2022

Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Práctico 4 - Inversa de una matriz. Diagonalización.

1. Se consideran las matrices

$$(a)\ \begin{pmatrix} -2 & -7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad (b)\ \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(c)\ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ -4 & 13 & -1 \end{pmatrix} \qquad (d)\ \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(e)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 8 & 6 \end{pmatrix} \qquad (f)\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcular sus determinantes y en caso de invertibilidad, hallar la inversa.

2. Considerar los siguientes sistemas de ecuaciones. Decidir, sin resolverlos, cuántas soluciones tiene cada uno.

$$\begin{cases} -2x - 7y &= 0 \\ x + 2y &= 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - 2z &= 0 \\ x + 3y + z &= 0 \\ x + 8y + 6z &= 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + z &= 0 \\ 2z + t &= 0 \\ y - 2z &= 0 \\ t &= 0 \end{cases}$$

3. Sea la matriz $A = PDP^{-1}$ donde:

$$D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

   a) Calcular la matriz A.
   b) Calcular A^n para todo n natural.
   c) Determinar el comportamiento de $A^n\binom{a_0}{b_0}$ para valores de n que crecen indefinidamente, discutiendo según la condición inicial $\binom{a_0}{b_0}$.

4. Hallar los valores propios de las matrices del ejercicio 1

5. Determinar si cada una de las matrices A del ejercicio 1 es o no diagonalizable. En los casos en que sí lo sea, hallar una matriz diagonal D y una matriz invertible P tal que $A = PDP^{-1}$.

6. Sea $A = \begin{pmatrix} r & s & t \\ -12 & 6 & 16 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ una matriz tal que $v = (2,6,0)$, $w = (2,2,1)$ y $u = (1,2,0)$ son vectores propios de A.

   a) Determinar si A es o no diagonalizable.
   b) Calcular los valores propios de A y determinar los valores de r, s y t.

7. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

   a) Probar que A es diagonalizable y hallar una matriz diagonal D y una matriz invertible P que diagonalicen a A.

   b) Calcular A^n para cualquier natural n.

   c) Estudiar el comportamiento asintótico de $A^n \binom{a_0}{b_0}$ para cualquier condición inicial (a_0, b_0).

8. Encontrar los valores propios de las siguientes matrices y determinar si son diagonalizables. En caso afirmativo, hallar D diagonal y P invertible tales que $A = PDP^{-1}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1000 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

9. Supongamos que A es una matriz invertible. Probar que entonces 0 no es valor propio de A.

10. Supongamos que A es una matriz invertible y diagonalizable.

    a) Demostrar que la inversa de A también es diagonalizable.

    b) Conociendo los valores propios de A, ¿podemos deducir los de su inversa?

11. Una población está tomada por una epidemia y se distribuye en dos estados: el estado **I** de sanidad y el estado **II** de enfermedad. Se sabe que cada año la mitad de la población sana se contagia, pasando del estado **I** al **II**, mientras que un tercio de la población enferma se cura, pasando del estado **II** al **I**.

    a) Describir un modelo matricial que calcule la distribución de la población (en sana y enferma) en el año $k+1$ a partir de la distribución de la población en el año k.

    b) ¿Qué sucederá con la distribución de la población al pasar el tiempo?

12. **Sistema predador – presa**

    En un bosque de Secuoyas, las ratas pie pardo constituyen una parte fundamental de la dieta de los búhos manchados, el depredador principal de estas ratas.

    Notemos B_k a la cantidad de búhos en el mes k y R_k la cantidad de ratas (medidas en miles) en el mes k. La cantidad de ratas y búhos va cambiando mes a mes. Sea $x_k = \begin{pmatrix} B_k \\ R_k \end{pmatrix}$ el cambio mes a mes en las poblaciones viene dado por $x_{k+1} = A \cdot x_k = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}4 \\ -0{,}104 & 1{,}1 \end{pmatrix} x_k$.

    a) Hallar los valores propios de la matriz A y los vectores propios correspondientes.

    b) Determinar si hay algún valor inicial de ratas y búhos que haga que ninguna de las dos especies se extinga.