

Práctico 5 - Modelo de Leslie

1. Se considera una población de dividida en dos clases de edad, y su matriz de Leslie es  $L = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ .
- a) Hallar su valor propio dominante  $\lambda_1$  y un vector propio asociado a él.
  - b) A partir del vector de distribución inicial de edades  $X_0 = (100, 0)$ , calcular:  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$  y  $X_4$ , redondeando si es necesario.
  - c) Calcular  $X_5$  usando las fórmulas:  $X_5 = LX_4$  y  $X_5 \approx \lambda_1 X_4$ .
  - d) Estudiar el comportamiento límite de esta población y su distribución por edades.

2. Se considera una población dividida en tres clases de edad de diez años cada una, cuya matriz de Leslie es:

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}.$$

- a) Si originalmente hay 120 hembras en la primera clase, 80 en la segunda y 40 en la tercera, hallar cuántas habrá en total al cabo de 20 años.
  - b) Sea  $v = (1, 1, 1/2)$ . Hallar  $\alpha \in \mathbb{R}$  que verifique  $Lv = \alpha v$ .
  - c) Indicar si la población tiende a crecer, decrecer o estabilizarse.
  - d) ¿A qué distribución de edades (en porcentajes) tiende la población?
3. Se considera una población dividida en dos clases de edad de un año cada una.
- a) Hallar su matriz de Leslie  $L$  sabiendo que en promedio:
    - cada hembra de menos de un año tiene un descendiente;
    - cada hembra de entre uno y dos años tiene seis descendientes;
    - de las hembras de menos de un año sobrevive una de cada tres.
  - b) Hallar los valores propios  $\lambda_1 > \lambda_2$  de  $L$ .
  - c) Hallar los vectores propios  $v_1$  y  $v_2$  de  $L$  asociados a  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ , respectivamente.
  - d) Supongamos que inicialmente hay treinta hembras de menos de un año y diez de entre uno y dos años. Hallar explícitamente  $c \in \mathbb{R}$  tal que  $X_k \approx c\lambda_1^k v_1$  para valores grandes de  $k$  ( $X_k$  es el vector de distribución de edades).
  - e) Con la suposición anterior sobre la población inicial, dar una estimación de la cantidad de hembras de menos de un año que habrá al transcurrir diez años.
4. Consideremos una población dividida en tres clases de edad de diez años cada una, cuya matriz de Leslie es

$$L = \begin{pmatrix} 1/2 & 3/2 & 1 \\ 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

- a) Inicialmente tenemos la siguiente distribución de hembras por clase: 16 hembras entre 0 y 10 años, 18 de entre 10 y 20 años y 8 de entre 20 y 30 años. ¿Cuántas hembras habrá en cada clase al cabo de 10 años?
- b) Decidir si la población tiende a crecer, decrecer o estabilizarse al transcurrir el tiempo.
- c) Si a largo plazo hay 200 hembras en la primera clase, ¿cuántas hembras habrá en las otras clases?

5. El crecimiento de una población de hembras se modela mediante la matriz de Leslie

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 2 & x & 2 \\ 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

siendo  $x$  un número entero positivo.

- a) Determinar  $x$  para que  $\lambda = 1$  sea un valor propio. A partir de esto, discutir según  $x$  si la población crece, decrece o se estabiliza.
- b) Para el valor de  $x$  que hace estable a la población, estimar la cantidad de hembras que habrá en cada clase a largo plazo si hay 120 hembras en la primera clase.