Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Matemática Discreta
Licenciatura en Matemática
Primer semestre 2022

Examen
Julio 2022

1. (20 puntos)
   Sea $A = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 8\}$.

   a) Hallar una relación de equivalencia $\sim$ en A que verifique las siguientes condiciones.
   - $(1, 2) \in \sim$,
   - $\#[1] = 5$,
   - $\sim$ determina 3 clases de equivalencia.

   b) ¿Cuántas soluciones hay para la parte a)?

2. (25 puntos)
   Sean A, B conjuntos con n, m elementos y $f : A \to B$ función. Diremos que f es k-regular si para todo $b \in Im(f)$, se tiene $\#f^{-1}(\{b\}) = k$.

   a) Probar que toda función inyectiva es k-regular para cierto k que se especificará.

   b) Probar que $f : B \times B \to B$ definida por $f(x, y) = x$ es k-regular para cierto k que se especificará.

   c) Sea $f : A \to B$ una función k-regular. Probar que f es sobreyectiva si y sólo si existen exactamente k^m funciones $g : B \to A$ tales que $f \circ g = id_B$.

3. (15 puntos)
   De un conjunto de 90 estudiantes de primer año de la Licenciatura, 30 están cursando Matemática Discreta, 40 Álgebra Lineal y 40 Cálculo. Se sabe además que todos cursan al menos una materia y que hay 10 que cursan las tres.

   a) Hallar la cantidad de estudiantes que cursan exactamente dos materias.

   b) Se quiere organizar el período de exámenes de manera que cada materia disponga de dos días consecutivos para su examen (escrito y oral). Si el período se extiende por 8 días, ¿cuántas formas hay de organizar los exámenes para que no haya superposiciones?

4. (40 puntos)
   Para cada grafo G, se define el número cromático de G como

   $$\chi(G) = min\{k \mid G \text{ admite una } k-\text{coloración}\}$$

   a) Hallar $\chi(G)$ para $K_{n,m}$ y K_n.

   b) Dar ejemplos de grafos planos conexos con 8 vértices y número cromático $2, 3, 4$.

   c) ¿Se puede encontrar un grafo plano con número cromático 5?

   d) Probar que si G tiene v vértices, con $0 < gr(x) \leq k, \forall x \in V$, se tiene $\chi(G) \leq k + 1$.

   e) Probar que si $G_1, G_2, \cdots G_r$ son las componentes conexas de G, se tiene $\chi(G) = max\{\chi(G_1), \chi(G_2), \cdots, \chi(G$