Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Matemática Discreta
Licenciatura en Matemática
Primer semestre 2022

Examen
Agosto 2022

1. (25 puntos)
   Dada una relación cualquiera en $\mathcal{R} \in A \times A$, se define su clausura reflexivo-transitiva como
   $$\mathcal{R}_t := \bigcap \{S \in A \times A \mid S \supseteq R, S \text{ es reflexiva y transitiva}\}$$
   a) Probar que $\mathcal{R}_t$ es reflexiva, transitiva y contiene a $\mathcal{R}$.
   b) Hallar $\mathcal{R}_t$ en los siguientes casos
      1) A cualquiera, $\mathcal{R} = \emptyset$.
      2) $A = \mathbb{N}$, $\mathcal{R} = \{(a, a+2) \mid a \in \mathbb{N}\}$.

2. (15 puntos)
   Sean $A = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 10\}$ y , $B = \{a \in A \mid a \text{ es impar}\}$.
   a) Hallar una función $f : A \to B$ que verifique las siguientes condiciones.
      - $f(1) = 1$,
      - $\#f^{-1}(1) = 6$,
      - f sobreyectiva.

   b) ¿Cuántas soluciones hay para la parte a)?

3. (20 puntos) Se considera un mazo de 48 cartas españolas (divididas en 4 palos de 12 cartas cada uno). Voy sacando la carta que está arriba del mazo y diciendo $1, 2, 1, 2, 1, 2, \cdots$ a medida que va saliendo una carta. Si la primera es un 1, perdí. En caso contrario, si la segunda es un 2, perdí. En caso contrario, si la tercera es un 1, perdí, y así sucesivamente. Pierdo, si la carta que saco, coincide con el número que pronuncio en voz alta. Gano, si llego a pasar todo el mazo sin perder.
   a) ¿Cuántas formas de ordenar las cartas hacen que pierda al sacar la primera?
   b) ¿Y al sacar la segunda?
   c) ¿Cuántas formas tengo de ganar?

4. (40 puntos)
   Sea T un árbol y V su conjunto de vértices. (Recordar que todo árbol tiene un vértice de grado 1)
   a) Probar que si $h \in T$ es un vértice de grado 1, el grafo inducido por $V - \{h\}$ es un árbol.
   b) Probar que la cantidad de aristas de T es $\#V - 1$.
   c) Probar que si le agrego una arista a T (manteniendo el conjunto de vértices) el grafo resultante tiene un ciclo y que si le quito una arista a T (manteniendo el conjunto de vértices) el grafo resultante no es conexo.
   d) Dado un grafo conexo G, se dice que un árbol T es un **árbol recubridor** de G si $V(T) = V(G)$ y $E(T) \subseteq E(G)$. Probar que todo grafo conexo admite un árbol recubridor.