Método de Gauss en general.

Teorema: Si un sistema de ecuaciones lineales es cambiado por otro realizando alguna de las siguientes operaciones:

(1) se intercambian dos ecuaciones

(2) una ecuación se multiplica por una constante no nula

(3) a una ecuación se le suma otra multiplicada por una constante

entonces los dos sistemas (el original y el nuevo) tienen el mismo conjunto de soluciones.

El conjunto de soluciones puede ser vacío.

Definición: Las operaciones (1), (2) y (3) del teorema anterior se llaman operaciones elementales.

Observaciones:

- Para resolver un sistema las operaciones (1) y (2) no son estrictamente necesarias.
- Una operación que a veces es conveniente es

(3)* multiplicar una ecuación por una constante no nula y sumarle otra

Esta operación $(3)^*$ es una combinación de las operaciones elementales (2) y (3):

$$\begin{tikzcd}
\begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases} \arrow[r, "\lambda 2", "\lambda \neq 0 \ (2)"'] \arrow[rr, bend right, "(3)^*"'] & \begin{cases} 1 \\ \lambda 2 \end{cases} \arrow[r, "(3)"'] & \begin{cases} 1 \\ \lambda 2 + 1 \end{cases}
\end{tikzcd}$$

- En muchas ocasiones abreviamos los cálculos realizando más de una operación elemental a la vez.

<u>Ejemplo</u>.

$$\begin{cases} x + y = 0 & 1 \\ 2x - y + 3z = 3 & 2 \\ x - 2y - z = 3 & 3 \end{cases}$$

incógnitas (x, y, z).

→ Usamos 1 para eliminar x de 2 y 3

$$\xrightarrow[3 - 1]{2 - 2\,1} \begin{cases} x + y = 0 \\ -3y + 3z = 3 \\ -3y - z = 3 \end{cases}$$

Ahora usamos la segunda ecuación para eliminar y en la tercera

$③ - ② \longrightarrow$

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ -3y + 3z = 3 \\ -4z = 0 \end{cases}$$

→ despejamos x

sustituimos y

→ despejamos y

sustituimos el valor de z

→ despejamos z

Forma escalonada del sistema

Un sistema está en forma escalonada si a partir de la segunda ecuación la primer variable con coeficiente no nulo está a la derecha de la primer variable con coeficiente no nulo de la ecuación anterior.

$$\begin{cases} x + 3z = 0 \\ y + z = 1 \\ 2z = 3 \end{cases}$$

sistema escalonado

$$\begin{cases} 2y + 3z = 0 \\ x + z = 2 \\ -z = 5 \end{cases}$$

Sistema no escalonado

Teorema (Escalerización):

Todo sistema de ecuaciones lineales puede transformarse en un sistema escalonado realizando una sucesión de operaciones elementales.

Dado un sistema:

- Realizamos operaciones elementales para llevarlo a su forma escalonada.
- Si llegamos a una ecuación contradictoria (del tipo $0 = 1$) el sistema es incompatible.
- Si llegamos a la forma escalonada sin ninguna contradicción y cada incógnita aparece como primer término no nulo en una ecuación, el sistema es C.D.
- Si llegamos a la forma escalonada y alguna de las incógnitas no aparece en el primer término no nulo de una ecuación, el sistema es C.I.

El número de incógnitas que no aparece como primer término no nulo de una ecuación del sistema escalonado es el nº de grados de libertad del sistema.

$$\left\{\begin{array}{l} x + 3y + z = 1 \\ \quad -5y = -5 \\ \quad\quad \underline{0 = 2} \end{array}\right. \ \lightning$$

Incompatible.
↑
incógnitas (x, y, z)

$$\left\{\begin{array}{l} x + 3y = 1 \\ \quad -5y = -5 \\ \quad\quad 0 = 0 \end{array}\right.$$

C.D.
↑
incógnitas (x, y)

variable libre

$$\left\{\begin{array}{l} x + 3y + z = 1 \\ \quad -5y = -5 \\ \quad\quad 0 = 0 \end{array}\right.$$

C.I.
1 grado de libertad

En general podemos considerar un sistema de m ecuaciones con n incógnitas. En este caso las incógnitas las denotamos por $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, los coeficientes por a_{ij} donde $i = 1, 2, \ldots, m$ indica el número de ecuación y $j = 1, 2, \ldots, n$ indica la variable que multiplica a_{ij}, y los términos independientes los denotamos $b_1, b_2, \ldots, b_m$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Un sistema se dice homogéneo si todos los coeficientes independientes son nulos, $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$.

Un sistema homogéneo siempre es compatible pues $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$ es solución.

Dado un sistema, el sistema homogéneo asociado consiste en cambiar todos los coeficientes independientes por cero

$$\begin{cases} 3x + 4y = 3 \\ 2x - y = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 3x + 4y = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$$

Sistema homogéneo asociado.

Toda solución a un sistema se puede escribir de la siguiente forma:

$$\boxed{\text{Solución particular}} + \boxed{\text{Solución arbitraria del homogéneo}}$$

una solución fija cualquiera