Sistemas lineales.

Un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto de ecuaciones que involucran a ciertas "incógnitas" de manera "lineal". Veamos unos ejemplos para ilustrar cómo aparecen los sistemas lineales y qué significan:

$\boxed{\text{Supermercado}}$

Incógnitas: x = precio de la leche

y = precio de la cerveza artesanal.

$$\begin{cases} 3x + 2y = 363 \\ 2x + 6y = 872 \end{cases}$$

$\boxed{\text{Trinitrotolueno}}$

Tolueno C_7H_8 ácido nítrico HNO_3

Reaccionan para producir

Trinitrotolueno $C_7H_5N_3O_6$ y agua.

¿En qué proporciones debo mezclar tolueno y ácido nítrico?

x, y, z, w número de moléculas de las sustancias involucradas.

$$x\, C_7H_8 + y\, HNO_3 \longrightarrow z\, C_7H_5N_3O_6 + w\, H_2O$$

Entonces, igualando los átomos de cada elemento antes y después de la reacción obtengo

$$\begin{cases} 7x = 7z \\ 8x + y = 5z + 2w \\ y = 3z \\ 3y = 6z + w \end{cases}$$

<u>Solución</u>: Una solución del sistema es una asignación de valores a las incógnitas de manera que se verifican las igualdades.
Resolver el sistema consiste en encontrar todas las soluciones.
Si tenemos tres incógnitas (x, y, z) una solución es una terna de números, por ejemplo $(1, 2, 3)$.

Si tenemos dos variables (x, y), el par $(-1, 5)$ es solución del sistema

$$\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ -x + y = 6 \end{cases}$$

ya que

$$3(-1) + 2(5) = -3 + 10 = 7 \checkmark$$

$$-(-1) + (5) = 1 + 5 = 6 \checkmark$$

Sin embargo $(5, -1)$ no es solución (esto quiere decir $x = 5$, $y = -1$) pues

$$3(5) + 2(-1) = 15 - 2 = 13 \neq 7 \times$$

Obs: Por ejemplo la ecuación $3x^2 + y = 0$ no es lineal.

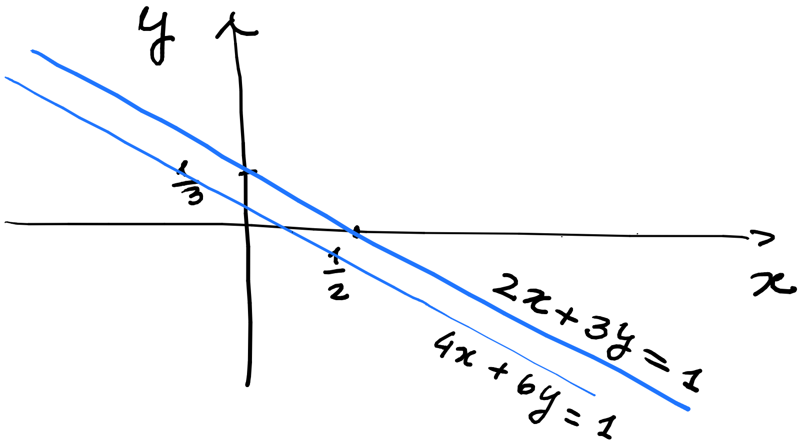
Tampoco es lineal la ecuación $e^x + 2y = 1$.

Interpretación geométrica.

- Ecuación lineal de dos variables (no trivial)
  $\longrightarrow$ recta en el plano:

$$2x + 3y = 1.$$

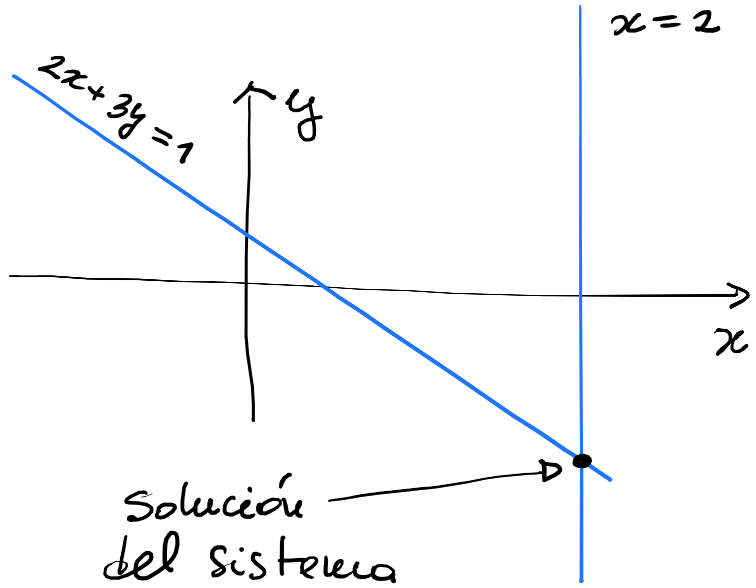
Podemos verificar que $(0, 1/3)$ y $(1/2, 0)$ son soluciones a la ecuación. Todos los puntos que están en la recta que pasa por esos dos puntos también son solución, y los que no están en esa recta no lo son.



Si multiplicamos la ecuación por un número $\lambda \neq 0$ tenemos una ecuación que presenta la misma recta. Si multiplicamos por λ sólo la parte izquierda de la ecuación obtenemos una recta paralela a la original.

- Un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas representa la intersección de dos rectas en el plano.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$



Se pueden dar diferentes situaciones:

1) Dos rectas secantes → solución única

$\boxed{\text{Sistema compatible determinado}}$

2) las dos ecuaciones representan la misma recta → infinitas soluciones

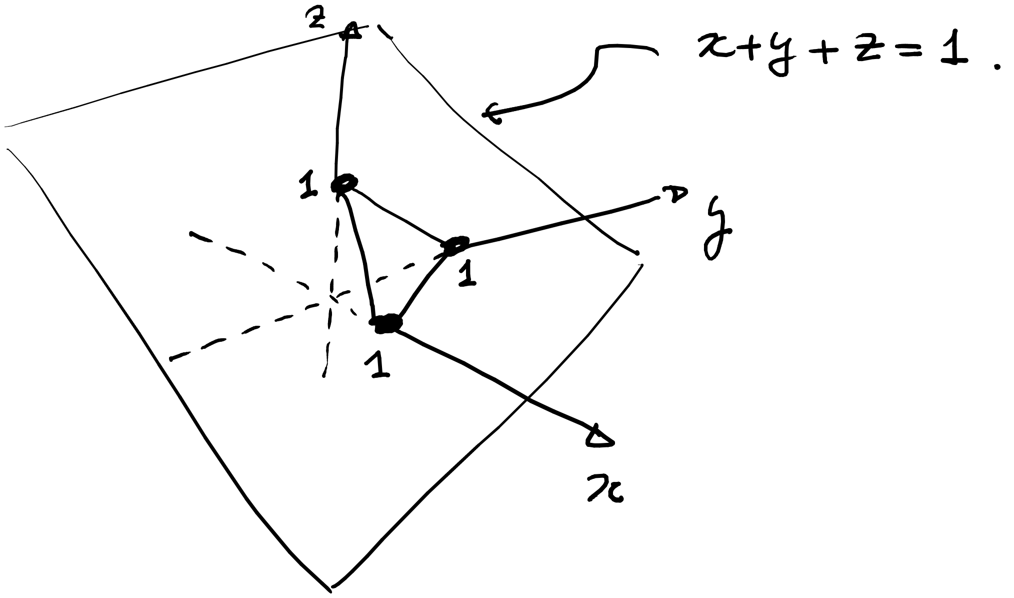
$\boxed{\text{Sistema compatible indeterminado}}$

3) Dos rectas paralelas → no hay soluciones

$\boxed{\text{Sistema incompatible}}$

Si tenemos tres ecuaciones nos estamos fijando en la intersección de tres rectas, y así. Si tenemos tres rectas arbitrarias es difícil que tengan un punto en común por lo que en general un sistema de este tipo será incompatible.

- Una ecuación con tres variables representa un plano en el estacio



Dos ecuaciones con tres incógnitas $\rightarrow$ intersección de dos planos.

Tres ecuaciones con tres incógnitas $\rightarrow$ intersección de tres planos.

Método de Gauss.

El método de Gauss también se conoce como método de escalerización o eliminación gaussiana.

¿Qué es? Es un algoritmo que permite resolver cualquier sistema lineal.

Ventaja: Es el algoritmo óptimo desde el punto de vista computacional (minimiza el tiempo de cálculo para un sistema genérico).

Ejemplos:

1. $\boxed{\text{Supermercado}}$

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array} \begin{cases} 3x + 2y = 363 \\ 2x + 6y = 872 \end{cases}$$

Si multiplicamos la primer ecuación por $-\frac{2}{3}$ y le sumamos el resultado a la segunda obtenemos:

$$\left(-\frac{2}{3}\right) \times ① + ② = \underbrace{\left(-\frac{4}{3}+6\right)}_{\frac{14}{3}} y = -242 + 872 = 630$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{3 \times 630}{14} = 135 \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = 135}$$

Si sustituimos el valor de y en la primer ecuación tenemos

$$3x + 2 \times (135) = 3x + 270 = 363$$

$$\Rightarrow \quad 3x = 93 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = 31}$$

$$\boxed{\text{Solución: } (31, 135)}$$

Al hacer la operación $-\frac{2}{3}① + ②$ estamos cambiando el sistema original por otro equivalente

$$\begin{cases} 3x + 2y = 363 \\ \quad\quad \frac{14}{3} y = 630 \end{cases}$$

que es fácil de resolver.

2. $\boxed{\text{Trinitrotolueno}}$

Originalmente eran cuatro incógnitas pero una ecuación era $x = z$ así que nos quedan sólo tres. El sistema es entonces

$$\begin{cases} 8x + y = 5x + 2w \\ y = 3x \\ 3y = 6x + w \end{cases}$$

Primero lo escribimos de la manera usual

$$\begin{cases} 3x + y - 2w = 0 & (1) \\ -3x + y = 0 & (2) \\ -6x + 3y - w = 0 & (3) \end{cases}$$

Ahora intercambiamos (2) y (3)

$$\longrightarrow \begin{cases} 3x + y - 2w = 0 & (1) \\ -6x + 3y - w = 0 & (2) \\ -3x + y = 0 & (3) \end{cases}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} 3x + y - 2w = 0 \\ -6x + 3y - w = 0 \\ 2y - 2w = 0 & \leftarrow (1) + (3) \end{cases}$$

Ahora sumamos $2 \times (1)$ a (2)

$$\longrightarrow \begin{cases} 3x + y - 2w = 0 \\ \boxed{\begin{matrix} 5y - 5w = 0 \\ 2y - 2w = 0 \end{matrix}} \end{cases} \leftarrow$$

Estas dos ecuaciones son equivalentes y nos dicen $\boxed{y = w}$

Entonces tenemos $\boxed{y=w}$. Sustituyendo esto en la primer ecuación tenemos

$$3x + y - 2y = 0 \Rightarrow \boxed{3x = y}$$

Por lo tanto las soluciones del sistema son de la forma $\boxed{(x, 3x, 3x)}$ para x un número arbitrario.

Hay infinitas soluciones y el sistema es compatible indeterminado.

Esto es razonable porque sólo tenemos que saber la proporción entre las dos sustancias iniciales, pero la cantidad absoluta de cada una puede ser arbitraria.

3.

$$\begin{cases} x + 2y = 8 \\ 2x + 4y = 8 \end{cases} \xrightarrow{-2(1)+(2)} \begin{cases} x + 2y = 8 \\ 0 = -8 \end{cases}$$

No hay solución, el sistema es incompatible. ¡Son dos rectas paralelas!

4.

$$\begin{cases} x + 3y = 1 \\ 2x + y = -3 \\ 2x + 2y = -2 \end{cases} \xrightarrow{-2(1)+(2)} \begin{cases} x + 3y = 1 \\ -5y = -5 \\ 2x + 2y = -2 \end{cases}$$

$\xrightarrow{-2 ① + ③}$ $\left\{\begin{array}{l} x + 3y = 1 \\ \boxed{\begin{array}{l} -5y = -5 \\ -4y = -4 \end{array}} \end{array}\right.$

Estas dos ecuaciones son equivalentes y nos dicen que $\boxed{y = 1}$

Si sustituimos este valor de y en la primer ecuación podemos hallar x:

$$x + 3(1) = 1 \Rightarrow x + 3 = 1 \Rightarrow \boxed{x = -2}$$

El sistema es compatible determinado y la solución es $\boxed{(-2, 1)}$.