Espacio dual y cociente

Andrés Abella

24 de agosto de 2022

0.1. Espacio dual

Sabemos que si V y W son espacios vectoriales, entonces $\mathcal{L}(V,W)$, el conjunto de las transformaciones lineales de V en W, es también un espacio vectorial. Como el cuerpo $\Bbbk$ es un espacio vectorial, entonces a todo espacio V le podemos asociar el espacio $V^* := \mathcal{L}(V,\Bbbk)$, que se llama el *espacio dual* de V.

Ejemplos 0.1.1.

1. Si $V = \Bbbk^n$ y para cada $i = 1,\dots,n$ definimos $\alpha_i : \Bbbk^n \to \Bbbk$ por $\alpha_i(x_1,\dots,x_n) = x_i$, para todo $(x_1,\dots,x_n) \in \Bbbk^n$, entonces $\alpha_1,\dots,\alpha_n \in (\Bbbk^n)^*$.
2. Sea $V = M_n$. Si $A = (a_{ij}) \in M_n$, recordar que la traza de A es $\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$. Haciendo variar A en M_n obtenemos la función traza $\operatorname{tr} : M_n \to \Bbbk$. Es fácil de probar que $\operatorname{tr} \in (M_n)^*$.
3. Si $V = C[0,1] = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} : \ f \text{ es continua}\}$ y definimos $\alpha : C[0,1] \to \mathbb{R}$ por $\alpha(f) = \int_0^1 f(x)\,dx$, entonces $\alpha \in C[0,1]^*$.

De ahora en adelante asumiremos que los espacios son de dimensión finita. Como la dimensión de $\mathcal{L}(V,W)$ es el producto de las dimensiones de V y W, deducimos que vale $\dim V^* = \dim V$, para todo espacio V.

Si V es un espacio vectorial y $\mathcal{B} = \{e_1,\dots,e_n\}$ es una base de V, entonces definimos $e_1^*,\dots,e_n^* : V \to \Bbbk$ mediante

$$e_i^*(x_1e_1 + \cdots + x_ne_n) = x_i, \tag{1}$$

para todo $x_1,\dots,x_n \in \Bbbk$ y todo $i = 1,\dots,n$. Es fácil de probar que $e_1^*,\dots,e_n^* \in V^*$. Observar que $e_1^*,\dots,e_n^*$ quedan caracterizadas por ser las transformaciones lineales de V en $\Bbbk$ que verifican

$$e_i^*(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}, \quad \forall i,j = 1,\dots,n.$$

Proposición 0.1.2. *Sea $\mathcal{B} = \{e_1,\dots,e_n\}$ una base de V y $e_1^*,\dots,e_n^* \in V^*$ definidos como antes. Entonces.*

1. *Para todo $v \in V$, vale $v = \sum_{i=1}^n e_i^*(v)e_i$.*
2. *Para todo $\alpha \in V^*$, vale $\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha(e_i)e_i^*$.*

Dem. Sea $v \in V$. Como $\mathcal{B}$ es base de V, entonces existen $x_1,\dots,x_n \in \Bbbk$ tales que $v = \sum_{i=1}^n x_ie_i$. La fórmula (1) nos dice que es $e_i^*(v) = x_i$, para todo $i = 1,\dots,n$. Luego $v = \sum_{i=1}^n e_i^*(v)e_i$.

Sea ahora $\alpha \in V^*$. Si $v \in V$, usando la primer parte obtenemos

$$\alpha(v) = \alpha\left(\sum_{i=1}^n e_i^*(v)e_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha(e_i^*(v)e_i) = \sum_{i=1}^n e_i^*(v)\,\alpha(e_i) = \sum_{i=1}^n \alpha(e_i)\,e_i^*(v) = \left(\sum_{i=1}^n \alpha(e_i)e_i^*\right)(v).$$

Como esto vale para todo $v \in V$, deducimos que es $\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha(e_i)e_i^*$. □

Proposición 0.1.3. *Sea $\mathcal{B} = \{e_1,\dots,e_n\}$ una base de V y $e_1^*,\dots,e_n^* \in V^*$ definidos como antes. Entonces $\mathcal{B}^* := \{e_1^*,\dots,e_n^*\}$ es una base de V^*.*

Dem. La segunda parte de la proposición anterior muestra que $\mathcal{B}^*$ es un conjunto generador de V^*. Como V y V^* tienen la misma dimensión, concluimos que $\mathcal{B}^*$ es una base de V^*. □

Definición 0.1.4. Si $\mathcal{B} = \{e_1,\dots,e_n\}$ es una base de V, entonces $\mathcal{B}^* = \{e_1^*,\dots,e_n^*\} \subset V^*$ se llama la *base dual* de $\mathcal{B}$.

Ejemplo 0.1.5. Si $\mathcal{B} = \{e_1,\dots,e_n\}$ es la base canónica de $\Bbbk^n$, entonces $e_1^*,\dots,e_n^* \in (\Bbbk^n)^*$ están definidos por $e_i^*(x_1,\dots,x_n) = x_i$, para todo $(x_1,\dots,x_n) \in \Bbbk^n$.

Si $T: V \to W$ es una transformación lineal, entonces definimos una función $T^*: W^* \to V^*$ mediante $T^*(\beta) := \beta \circ T$, para todo $\beta \in W^*$. Explícitamente es $(T^*(\beta))(v) = \beta\big(T(v)\big)$, para todo $\beta \in W^*$ y $v \in V$. En forma de diagrama, la fórmula $T^*(\beta) = \beta \circ T$ queda en

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T^*(\beta)"] \arrow[d, "T"'] & \Bbbk \\ W \arrow[ur, "\beta"'] & \end{tikzcd} .$$

Proposición 0.1.6. *Si $T: V \to W$ es una transformación lineal, entonces $T^*: W^* \to V^*$ es también una transformación lineal.*

Dem. Sean $\alpha, \beta \in W^*$ y $a \in \Bbbk$, entonces

$$T^*(\alpha + a\beta) = (\alpha + a\beta) \circ T = \alpha \circ T + a(\beta \circ T) = T^*(\alpha) + aT^*(\beta). \quad \square$$

La siguiente proposición describe algunas propiedades de la correspondencia $T \mapsto T^*$.

Proposición 0.1.7. *1. Para todo espacio V, vale $(\mathrm{Id}_V)^* = \mathrm{Id}_{V^*}: V^* \to V^*$.*

2. Si $S: U \to V$ y $T: V \to W$ son transformaciones lineales, entonces $(T \circ S)^* = S^* \circ T^*$.

3. Si $T: V \to W$ es un isomorfismo, entonces $T^*: W^* \to V^*$ es un isomorfismo y $(T^*)^{-1} = \big(T^{-1}\big)^*$.

Dem. La prueba de la primera afirmación es inmediata: $(\mathrm{Id}_V)^*(\alpha) = \alpha \circ \mathrm{Id}_V = \alpha$, para todo $\alpha \in V^*$. Para la segunda, es

$$(T \circ S)^*(\alpha) = \alpha \circ (T \circ S) = (\alpha \circ T) \circ S = S^*(\alpha \circ T) = S^*(\big(T^*(\alpha)\big) = (S^* \circ T^*)(\alpha), \quad \forall \alpha \in W^*.$$

Para la tercera, al ser $T \circ T^{-1} = T^{-1} \circ T = \mathrm{Id}_V$, aplicando las dos partes anteriores obtenemos

$$\big(T \circ T^{-1}\big)^* = \big(T^{-1} \circ T\big)^* = (\mathrm{Id}_V)^* \quad \Rightarrow \quad \big(T^{-1}\big)^* \circ T^* = T^* \circ \big(T^{-1}\big)^* = \mathrm{Id}_{V^*}.$$

Esta última igualdad implica que T^* es invertible y su inversa es $\big(T^{-1}\big)^*$. $\square$

Proposición 0.1.8. *Sean V y W espacios vectoriales y $T: V \to W$ una transformación lineal. Sean $\mathcal{B}$ una base de V y $\mathcal{C}$ una base de W. Entonces*

$$_{\mathcal{B}^*}[T^*]_{\mathcal{C}^*} = \left(_{\mathcal{C}}[T]_{\mathcal{B}}\right)^t.$$

Dem. Sean $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ y $\mathcal{C} = \{f_1, \dots, f_m\}$. Es $_{\mathcal{C}}[T]_{\mathcal{B}} = (a_{ij})$ si y solo si

$$T(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} f_i, \quad \forall i = 1, \dots, n$$

y es $_{\mathcal{B}^*}[T^*]_{\mathcal{C}^*} = (b_{ij})$ si y solo si

$$T^*(f_i^*) = \sum_{j=1}^{n} b_{ji} e_j^*, \quad \forall j = 1, \dots, n. \tag{2}$$

Por otro lado aplicando la segunda parte de la proposición 0.1.2 es

$$\begin{aligned} T^*(f_i^*) &= \sum_{j=1}^{n} \big(T^*(f_i^*)\big)(e_j)\, e_j^* = \sum_{j=1}^{n} f_i^*(T(e_j))\; e_j^* = \sum_{j=1}^{n} f_i^* \left(\sum_{k=1}^{m} a_{kj} f_k \right) e_j^* = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} a_{kj} f_i^*(f_k)\, e_j^* \\ &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} a_{kj} \delta_{ik}\, e_j^* = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, e_j^*. \end{aligned}$$

Comparando esta expresión de $T^*(f_i^*)$ con la de (2), deducimos que vale $a_{ij} = b_{ji}$, para todo i, j. $\square$

0.2. Espacio cociente

Sea V un espacio vectorial y W un subespacio de V. Si $u, v \in V$ verifican $u - v \in W$, entonces decimos que u y v son *congruentes* módulo W y escribimos $u \equiv v \pmod W$.

Proposición 0.2.1. *La congruencia módulo W es una relación de equivalencia en V, es decir, verifica las siguientes propiedades.*

1. Idéntica. *Vale $v \equiv v \pmod W$, para todo $v \in V$.*
2. Recíproca. *Si $u \equiv v \pmod W$, entonces $v \equiv u \pmod W$.*
3. Transitiva. *Si $v_1 \equiv v_2 \pmod W$ y $v_2 \equiv v_3 \pmod W$, entonces $v_1 \equiv v_3 \pmod W$.*

Dem.

1. Si $v \in V$, entonces $v - v = 0 \in W$; luego $v \equiv v \pmod W$.
2. Si $u \equiv v \pmod W \;\Rightarrow\; u - v \in W \;\Rightarrow\; v - u = -(u - v) \in W \;\Rightarrow\; v \equiv u \pmod W$.
3. Si $v_1 \equiv v_2 \pmod W$ y $v_2 \equiv v_3 \pmod W \;\Rightarrow\; v_1 - v_2 \in W$ y $v_2 - v_3 \in W \;\Rightarrow\; v_1 - v_3 = (v_1 - v_2) + (v_2 - v_3) \in W \;\Rightarrow\; v_1 \equiv v_3 \pmod W$. $\square$

Toda relación de equivalencia en un conjunto genera una partición del mismo en clases de equivalencia. Dado $v \in V$, si escribimos $\overline{v} = \{u \in V : \; u \equiv v \pmod W\}$ a la clase de equivalencia de v, entonces vale

$$\overline{v} = v + W := \{v + w : \; w \in W\}.$$

La afirmación anterior se deduce de lo siguiente

$$u \in \overline{v} \;\Leftrightarrow\; u - v \in W \;\Leftrightarrow\; \exists w \in W \text{ tal que } u - v = w \;\Leftrightarrow\; \exists w \in W \text{ tal que } u = v + w \;\Leftrightarrow\; u \in v + W.$$

El conjunto $v + W$ se llama la *coclase* de v respecto a W. El conjunto de clases de equivalencia

$$V/W := \{\overline{v} : \; v \in V\} = \{v + W : \; v \in V\}$$

se llama el *conjunto cociente* de V por W.

Ejemplo 0.2.2. Consideremos $V = \mathbb{R}^2$ y $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; ax + by = 0\}$ una recta que pasa por el origen. Sea (x_0, y_0) un punto de $\mathbb{R}^2$. Entonces

$$(x, y) \equiv (x_0, y_0) \pmod W \;\Leftrightarrow\; (x - x_0, y - y_0) \in W \;\Leftrightarrow\; a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0 \;\Leftrightarrow\; ax + by = ax_0 + by_0.$$

Luego $\overline{(x_0, y_0)} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; ax + by = c\}$, siendo $c = ax_0 + by_0$. Esto nos dice que $\overline{(x_0, y_0)}$ es la recta paralela a W que pasa por (x_0, y_0). Haciendo variar (x_0, y_0) obtenemos que V/W es el conjunto de todas las rectas del plano que son paralelas a W

Proposición 0.2.3. *Sean $u, u', v, v' \in V$ y $a \in \mathbb{k}$. Si $u \equiv v \pmod W$ y $u' \equiv v' \pmod W$, entonces*

$$u + u' \equiv v + v' \pmod W, \qquad au \equiv av \pmod W.$$

Dem. Valen $u - v \in W$ y $u' - v' \in W$. Luego

$$(u + u') - (v + v') = (u - v) + (u' - v') \in W \;\Rightarrow\; u + u' \equiv v + v' \pmod W$$
$$au - av = a(u - v) \in W \;\Rightarrow\; au \equiv av \pmod W. \quad \square$$

La proposición anterior muestra que podemos definir una suma y un producto por escalar en el cociente V/W mediante

$$\overline{u} + \overline{v} := \overline{u + v}; \quad a\overline{v} := \overline{av},$$

para todo $u, v \in V$ y $a \in \mathbb{k}$.

Proposición 0.2.4. *El conjunto cociente V/W con la suma y producto por escalar definidos anteriormente es un espacio vectorial.*

Dem. Hay que verificar que se cumplen todas las propiedades de espacio vectorial. Probaremos la existencia de neutro, la existencia de opuesto y la propiedad asociativa de la suma.

1. Existencia de neutro. Dado $v \in V$, es $\overline{v} + \overline{0} = \overline{v+0} = \overline{v}$. Luego $\overline{0}$ es el neutro de la suma en V/W.

2. Existencia de opuesto. Dado $v \in V$, es $\overline{v} + \overline{-v} = \overline{v + (-v)} = \overline{0}$. Esto nos dice que $\overline{-v}$ es el opuesto de $\overline{v}$, es decir, $-\overline{v} = \overline{-v}$.

3. Propiedad asociativa de la suma. Sean $v_1, v_2, v_3 \in V$, entonces

$$\overline{v_1} + (\overline{v_2} + \overline{v_3}) = \overline{v_1} + \overline{v_2 + v_3} = \overline{v_1 + (v_2 + v_3)} = \overline{(v_1 + v_2) + v_3} = \overline{v_1 + v_2} + \overline{v_3} = (\overline{v_1} + \overline{v_2}) + \overline{v_3}.$$

La prueba de las otras propiedades es similar y queda como ejercicio. $\square$

El conjunto V/W con esta estructura de espacio vectorial se llama el *espacio cociente* de V por W. La función $\pi : V \to V/W$ definida por $\pi(v) = \overline{v}$ para todo $v \in V$, se llama la *proyección canónica*. Notar que $\pi : V \to V/W$ es una transformación lineal:

$$\pi(u+v) = \overline{u+v} = \overline{u} + \overline{v} = \pi(u) + \pi(v); \quad \pi(av) = \overline{av} = a\overline{v} = a\pi(v).$$

Es claro que π es sobreyectiva. Además vale $\operatorname{Ker} \pi = W$; esto último se deduce del cálculo siguiente

$$v \in \operatorname{Ker} \pi \quad \Leftrightarrow \quad \pi(v) = \overline{0} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{v} = \overline{0} \quad \Leftrightarrow \quad v \equiv 0 \,(\operatorname{mod} W) \quad \Leftrightarrow \quad v - 0 \in W \quad \Leftrightarrow \quad v \in W.$$

Ejemplos 0.2.5. A continuación veremos dos ejemplos extremos de cocientes. Sea V un espacio vectorial.

1. Si consideramos el subespacio trivial $\{0\}$, vale

$$u \equiv v \,(\operatorname{mod} \{0\}) \quad \Leftrightarrow \quad u - v \in \{0\} \quad \Leftrightarrow \quad u - v = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u = v.$$

   Luego para todo $v \in V$ es $\overline{v} = v + \{0\} = \{v\}$ y por lo tanto $V/\{0\} = \big\{\{v\} : \ v \in V\big\}$. Esto implica que la proyeción canónica $\pi : V \to V/\{0\}$, definida por $\pi(v) = \{v\}$, es biyectiva y por lo tanto $V/\{0\} \simeq V$.

2. Si ahora consideramos a V como subespacio de sí mismo, entonces vale $u \equiv v \,(\operatorname{mod} V)$ si y solo si $u - v \in V$. Como esto siempre sucede, deducimos que todos los vectores son equivalentes entre sí y por lo tanto $V/V = \big\{\overline{0}\big\}$ es el espacio trivial.

La proposición siguiente muestra cómo definir una transformación lineal de un espacio cociente en otro espacio vectorial.

Proposición 0.2.6 (Propiedad universal del cociente)**.** *Sean V, V' espacios vectoriales, $T : V \to V'$ una transformación lineal y W un subespacio de V, tales que $W \subset \operatorname{Ker} T$. Entonces.*

1. *Existe una función $\hat{T} : V/W \to V'$ que verifica $\hat{T}\big(\overline{v}\big) = T(v)$, para todo $v \in V$.*

2. *La función $\hat{T} : V/W \to V'$ es una transformación lineal.*

Dem.

1. Si $u \equiv v \pmod{W}$, entonces

$$u - v \in W \subset \operatorname{Ker} T \quad \Rightarrow \quad T(u-v) = 0 \quad \Rightarrow \quad T(u) = T(v).$$

   Es decir, si $u, v \in V$ verifican $\overline{u} = \overline{v}$ en V/W, entonces $T(u) = T(v)$. Luego tiene sentido definir $\hat{T} : V/W \to V'$ por $\hat{T}(\overline{v}) = T(v)$, para todo $v \in V$.

2. La linealidad de $\hat{T}$ se deduce de la linealidad de T:

$$\hat{T}(a\overline{u} + \overline{v}) = \hat{T}(\overline{au+v}) = T(au+v) = aT(u) + T(v) = a\hat{T}(\overline{u}) + \hat{T}(\overline{v}), \quad \forall u, v \in V, \ a \in \Bbbk. \quad \square$$

Observación 0.2.7. Considerando la proyección canónica $\pi : V \to V/W$, se observa que la fórmula $\hat{T}(\overline{v}) = T(v)$ equivale a $\hat{T} \circ \pi = T$, es decir a la conmutatividad del siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\pi"'] & V' . \\ V/W \arrow[ur, "\hat{T}"'] & \end{tikzcd}$$

Corolario 0.2.8 (Primer teorema de isomorfismo)**.** *Sea $T : V \to V'$ una transformación lineal sobreyectiva. Entonces la transformación lineal $\hat{T} : V/\operatorname{Ker} T \to V'$ definida por la proposición 0.2.6 es un isomorfismo.*

Dem. La fórmula $\hat{T}(\overline{v}) = T(v)$ implica $\operatorname{Im}\hat{T} = \operatorname{Im} T$, luego $\hat{T}$ es sobreyectiva. Además, si $v \in V$, entonces

$$\overline{v} \in \operatorname{Ker} \hat{T} \quad \Rightarrow \quad 0 = \hat{T}(\overline{v}) = T(v) \quad \Rightarrow \quad v \in \operatorname{Ker} T \quad \Rightarrow \quad \overline{v} = \overline{0} \text{ en } V/\operatorname{Ker} T.$$

Luego $\operatorname{Ker} \hat{T} = \{\overline{0}\}$ y por lo tanto $\hat{T} : V/\ker T \to V'$ es inyectiva. $\square$

Proposición 0.2.9 (Segundo teorema de isomorfismo)**.** *Sea V un espacio vectorial y W, U subespacios de V, entonces*

$$\frac{U+W}{W} \simeq \frac{U}{U \cap W}.$$

Dem. Consideremos la transformación lineal $T : U \to \frac{U+W}{W}$ definida mediante $T(u) = \overline{u}$, para todo $u \in U$. Si $u \in U$ y $w \in W$, entonces en $\frac{U+W}{W}$ vale $\overline{u+w} = \overline{u} + \overline{w} = \overline{u} + \overline{0} = \overline{u} = T(u)$; luego $T : U \to \frac{U+W}{W}$ es sobreyectiva. Además, dado $u \in U$, vale

$$u \in \operatorname{Ker} T \quad \Leftrightarrow \quad \overline{u} = \overline{0} \text{ en } \frac{U+W}{W} \quad \Leftrightarrow \quad u \in W.$$

Luego $\operatorname{Ker} T = U \cap W$. Entonces el primer teorema de isomorfismo nos dice que $T : U \to \frac{U+W}{W}$ induce un isomorfismo $\hat{T} : \frac{U}{U \cap W} \to \frac{U+W}{W}$. $\square$

Corolario 0.2.10. *Si $W, U \subset V$ son subespacios de un espacio V tales que $V = U \oplus W$, entonces $V/W \simeq U$.*

Dem. Aplicando la proposición anterior obtenemos

$$\frac{V}{W} = \frac{U \oplus W}{W} = \frac{U+W}{W} \simeq \frac{U}{U \cap W} = \frac{U}{\{0\}} \simeq U. \quad \square$$

Observación 0.2.11. La proposición anterior es la razón por la cual se pueden evitar los cocientes cuando se está trabajando solo con espacios vectoriales: en vez de cocientes podemos tomar sumandos directos (que siempre existen). Los cocientes empiezan a ser necesarios cuando trabajamos con espacios vectoriales que tienen más estructura y para los cuales no siempre podemos encontrar sumandos directos que preserven dicha estructura.

Hasta ahora todo lo que vimos de cocientes no requirió dimensión finita. El siguiente resultado es para dimensión finita y nos dice cómo calcular la dimensión del cociente.

Proposición 0.2.12. *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y W un subespacio de V, entonces*

$$\dim(V/W) = \dim V - \dim W.$$

Dem. Sea $\mathcal{B}_W = \{w_1, \dots, w_m\}$ una base de W. Como $\mathcal{B}_W$ es LI, entonces existen $v_1, \dots, v_n \in V$ tales que $\mathcal{B}_V = \{w_1, \dots, w_m, v_1, \dots, v_n\}$ una base de V. Teniendo en cuenta que $\pi : V \to V/W$ es una transformación lineal sobreyectiva, deducimos que $\pi(\mathcal{B}_V) = \{\overline{w_1}, \dots, \overline{w_m}, \overline{v_1}, \dots, \overline{v_n}\}$ es un conjunto generador de V/W. Siendo $w_1, \dots, w_m \in W$, deducimos $\overline{w_1} = \dots = \overline{w_m} = \overline{0}$ en V/W. Luego $\mathcal{C} = \{\overline{v_1}, \dots, \overline{v_n}\}$ es un conjunto generador de V/W. Probaremos que $\mathcal{C}$ es LI. Sean $a_1, \dots, a_n \in \Bbbk$ tales que

$$a_1\overline{v_1} + \dots + a_n\overline{v_n} = \overline{0} \quad \Rightarrow \quad \overline{a_1v_1 + \dots + a_nv_n} = \overline{0} \quad \Rightarrow \quad a_1v_1 + \dots + a_nv_n \in W.$$

Como $\mathcal{B}_W = \{w_1, \dots, w_m\}$ es base de W, entonces existen $b_1, \dots, b_m \in \Bbbk$ tales que

$$a_1v_1 + \dots + a_nv_n = b_1w_1 + \dots + b_mw_m \quad \Rightarrow \quad a_1v_1 + \dots + a_nv_n + (-b_1)w_1 + \dots + (-b_m)w_m = 0.$$

Como $\mathcal{B}_V$ es base de V, deducimos que es $a_1 = \dots = a_n = -b_1 = \dots = -b_m = 0$. Luego $\mathcal{C}$ es LI y por lo tanto es base de V/W. Esto implica

$$\dim V/W = n = (n+m) - m = \dim V - \dim W. \quad \square$$

Observación 0.2.13. Hay ciertas propiedades de espacios vectoriales de dimensión finita que se pueden probar usando cocientes. Por ejemplo, si $T : V \to W$ es una transformación lineal, entonces $T : V \to \operatorname{Im} T$ es una transformación lineal sobreyectiva, luego induce un isomorfismo $\hat{T} : V/\operatorname{Ker} T \to \operatorname{Im} T$ y por lo tanto

$$\dim \operatorname{Im} T = \dim(V/\operatorname{Ker} T) = \dim V - \dim \operatorname{Ker} T \quad \Rightarrow \quad \dim V = \dim \operatorname{Ker} T + \dim \operatorname{Im} T.$$

Por otro lado, el segundo teorema de isomorfismo nos dice que si W, U son subespacios de V, entonces $\frac{U+W}{W} \simeq \frac{U}{U\cap W}$. Luego

$$\dim\left(\frac{U+W}{W}\right) = \dim\left(\frac{U}{U\cap W}\right) \quad \Rightarrow \quad \dim(U+W) - \dim W = \dim U - \dim(U \cap W) \quad \Rightarrow$$
$$\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U\cap W).$$

Luego los resultados siguientes

1. Si $T : V \to W$ es una transformación lineal, entonces $\dim V = \dim \operatorname{Ker} T + \dim \operatorname{Im} T$.
2. Si W, U son subespacios de V, entonces $\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$.

se pueden deducir de teoremas de cocientes.