Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Álgebra Lineal II
Segundo semestre 2022

Práctico 1

Si V es un espacio vectorial, entonces una *proyección* en V es una transformación lineal $T : V \to V$ que verifica $T^2 = T$ (siendo $T^2 = T \circ T$).

1. Sean V un espacio vectorial y U, W subespacios de V tales que $V = U \oplus W$. Consideramos la función $T : V \to V$ definida por $T(v) = w$, siendo $v = u + w,\ u \in U,\ w \in W$.

   a) Probar que T es una proyección.

   b) Probar que T verifica $\mathrm{Im}(T) = W$ y $\mathrm{Ker}\,(T) = U$.

   El operador T se llama la *proyección sobre W en la dirección de U*.

2. Probar que si $T \in \mathcal{L}(V)$ es una proyección, entonces $V = \mathrm{Ker}\,(T) \oplus \mathrm{Im}(T)$ y T es la proyección sobre $\mathrm{Im}(T)$ en la dirección de $\mathrm{Ker}\,(T)$. *Sugerencia*: escribir $v = v - T(v) + T(v)$.

3. Sea $\mathbb{R}_2[x]$ el espacio de los polinomios de grado menor o igual a 2. Sean $T, S : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ definidas por
$$T\left(a + bx + cx^2\right) = -b + bx - bx^2, \qquad S\left(a + bx + cx^2\right) = a + b + (b + c)x^2.$$
   Se pide:

   a) Probar que T y S son proyecciones

   b) Probar que vale $T \circ S = S \circ T = 0$ y $T + S = \mathrm{Id}$.

   c) Hallar bases de $U = \mathrm{Im}(T)$ y de $V = \mathrm{Im}(S)$.

   d) Verificar $\mathbb{R}_2[x] = U \oplus V$.

4. Sea V un espacio vectorial.

   a) Sean U, W subespacios de V tales que $V = U \oplus W$. Sean P_U la proyección sobre U en la dirección de W y P_W la proyección sobre W en la dirección de U. Probar
$$P_U \circ P_W = P_W \circ P_U = 0, \quad P_U + P_W = \mathrm{Id}\,.$$

   b) Recíprocamente, sean $P_1, P_2 : V \to V$ proyecciones que verifican
$$P_1 \circ P_2 = P_2 \circ P_1 = 0, \quad P_1 + P_2 = \mathrm{Id}\,.$$
   Probar que vale $V = \mathrm{Im}(P_1) \oplus \mathrm{Im}(P_2)$.

5. Sean $M_n(\mathbb{R})$ el espacio de las matrices reales $n \times n$, S el subespacio formado por las matrices simétricas y A el subespacio formado por las matrices antisimétricas.

   a) Probar $M_n(\mathbb{R}) = S \oplus A$.

   b) Hallar explícitamente la proyeción de $M_n(\mathbb{R})$ sobre S en la dirección de A y la proyeción de $M_n(\mathbb{R})$ sobre A en la dirección de S.

6. Hallar una proyección P que proyecte $\mathbb{R}^2$ sobre el subespacio generado por el vector $(1, -1)$ en la dirección del subespacio generado por el vector $(1, 2)$.

7. Sea V un espacio de dimensión finita y $P : V \to V$ una proyección. Probar.

   a) Existe una base $\mathcal{B}$ de V tal que la matriz asociada a P en la base $\mathcal{B}$ tiene la forma $\left(\begin{smallmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, siendo I una matriz identidad de tamaño adecuado (asumiendo $P \neq 0$ y $P \neq \mathrm{Id}$).

   b) La traza[1] de P coincide con el rango[2] de P.

8. Sea V un espacio vectorial real o complejo[3] (no necesariamente de dimensión finita) y $P : V \to V$ una proyección. Probar que $\mathrm{Id} + P$ es invertible y que su inversa es $\mathrm{Id} - \frac{1}{2}P$.

9. Sea V un espacio vectorial y $V_1, \ldots, V_n$ subespacios de V tales que $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$. Para cada $i = 1, \ldots, n$, definimos una función $T_i : V \to V$ mediante $T_i(v) = v_i$, si $v = v_1 + \cdots + v_n$, con $v_1 \in V_1, \ldots, v_n \in V_n$. Probar que las funciones $T_1, \ldots, T_n$ son proyecciones que verifican

   a) $T_i \circ T_j = 0$ si $i \neq j$,

   b) $T_1 + \cdots + T_n = \mathrm{Id}$,

   c) $\mathrm{Im}(T_i) = V_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$.

   En esta situación se dice que $T_1, \ldots, T_n$ son las proyecciones *asociadas* a la descomposición $V = \bigoplus_{i=1}^n V_i$.

10. Probar que si tenemos un espacio vectorial V y proyecciones $T_1, \ldots, T_n \in \mathcal{L}(V)$ que verifican $9a$ y $9b$, entonces $V = \mathrm{Im}(T_1) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Im}(T_n)$ y $T_1, \ldots, T_n$ son la proyecciones asociadas a esta descomposición.

11. Sea $V = \mathbb{R}^4$. Se consideran los siguientes subespacios

$$V_1 = \{(x, y, z, t) : \ x = y = z\}, \quad V_2 = [(2, 1, 1, 1)], \quad V_3 = [(2, 2, 1, 1)].$$

   a) Probar que vale $V = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$.

   b) Hallar la proyecciones asociadas a la descomposición anterior.

12. Sea $V = \mathrm{M}_n(\Bbbk)$. Se consideran los siguientes subespacios

$$\begin{aligned} V_1 &= \{(a_{ij}) \in V : \ a_{ij} = 0, \ \text{si } i \leq j\}, \\ V_2 &= \{(a_{ij}) \in V : \ a_{ij} = 0, \ \text{si } i \geq j\}, \\ V_3 &= \{(a_{ij}) \in V : \ a_{ij} = 0, \ \text{si } i \neq j\}. \end{aligned}$$

   a) Probar que vale $V = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$.

   b) Hallar la proyecciones asociadas a la descomposición anterior.

[1] La *traza* de un operador se define como la traza de la matriz asociada al operador en alguna base del espacio. La definición anterior no depende de la elección de la base, porque matrices semejantes tienen la misma traza.

[2] Recordar que el *rango* de un operador T es la dimensión de $\mathrm{Im}(T)$.

[3] El imponer $\Bbbk = \mathbb{R}$ o $\Bbbk = \mathbb{C}$ es porque en un cuerpo arbitrario puede ser $2 = 0$, en cuyo caso $\mathrm{Id} + P$ no es invertible.