Álgebra Lineal I. Curso 2019 **Facultad de Ciencias**

Actividad 5: Espacios vectoriales y subespacios

1. Averiguar si las siguientes estructuras $(V, +, \cdot)$ son $\mathbb{R}$–espacios vectoriales.
   a) $V = \mathbb{R}^2$, $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y'), \lambda(x, y) = (\lambda x, y),\ \forall x, y, \lambda \in \mathbb{R}$.
   b) $V = \mathbb{R}^2$, $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 - y_2),\ \lambda \cdot (x, y) = (\lambda \cdot x, \lambda \cdot y), \forall x_1, x_2, y_1, y_2, x, y \in \mathbb{R}$.
   c) $V = \mathbb{R}^2$, $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2),\ \lambda \cdot (x, y) = (\lambda \cdot x, 0), \forall x_1, x_2, y_1, y_2, x, y, \lambda \in \mathbb{R}$.
   d) $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $(f + g)(x) = f(x) + g(x),\ (\lambda \cdot f)(x) = f(\lambda x), \forall x \in \mathbb{R}, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall f, g \in V$.
   e) $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $(f + g)(x) = f(x) + g(x),\ (\lambda \cdot f)(x) = \lambda + f(x), \forall x \in \mathbb{R}, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall f, g \in V$.
   f) $V = \mathbb{N}^{\mathbb{R}}$, $(a_n)_{n\geq 1}+(b_n)_{n\geq 1} = (a_n^2+b_n^2)_{n\geq 1},\ \lambda\cdot(a_n)_{n\geq 1} = (\lambda a_n)_{n\geq 1},\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (a_n)_{n\geq 1}, (b_n)_{n\geq 1} \in V$.

2. Si V y W son $\Bbbk$–espacios vectoriales, probar que $V \times W$ es un espacio vectorial con la siguiente estructura:

$$(v_1, w_1) + (v_2, w_2) = (v_1 + v_2, w_1 + w_2), \forall v_1, v_2 \in V, w_1, w_2 \in W$$
$$\lambda \cdot (v, w) = (\lambda \cdot v, \lambda \cdot w), \forall v \in V, w \in W, \lambda \in \Bbbk.$$

3. En cada caso, determinar si los subconjuntos S de cada espacio vectorial V verifican las siguientes dos condiciones:
$$v + w \in S, \forall v, w \in S, \qquad \lambda \cdot v \in S, \forall v \in S$$
   a) $V = \mathbb{R}^2$ con la suma y el producto usual, $S = \{(x, y) \in V \mid y = 0\}$,
   b) $V = \mathbb{R}^2$ con la suma y el producto usual, $S = \{(x, y) \in V \mid y = 1\}$,
   c) $V = \mathbb{R}^2$ con la suma y el producto usual, $S = \{(x, y) \in V \mid x \geq 0\}$,
   d) $V = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ con la suma y el producto definidos en clase, S las sucesiones convergentes,
   e) $V = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ con la suma y el producto definidos en clase, S las sucesiones que convergen a 1,
   f) $V = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ con la suma y el producto definidos en clase, S las sucesiones que convergen a 0.

4. En cada caso, determinar si S es subespacio vectorial del espacio vectorial dado.
   a) Para el espacio vectorial $V = \mathbb{R}^3$:
      1) $S = \{(a, b, c) \in V;\ a + b + c = 2\}$;
      2) $S = \{(a, b, c) \in V;\ 3a - 2 = 3b + c\}$;
      3) $S = \{(a, b, c) \in V;\ a = b = c\}$;
      4) $S = \{(a, a + b, a + b + c) \in V;\ a, b, c \in \mathbb{R}\}$;
      5) $S = \{(b - 6c, b, c) \in V;\ b, c \in \mathbb{R}\}$;
      6) $S = \{(bc, b, c) \in V;\ b, c \in \mathbb{R}\}$;
      7) $S = \{(x, y, z) \in V;\ z \geq x^2 + y\}$.
   b) Para el espacio vectorial $V = \mathbb{R}^n$:
      1) $S = \{(x_1, \ldots, x_n) \in V;\ x_1 \geq 0\}$;

2) $S = \{(x_1, \ldots, x_n) \in V;\ x_1 = x_2 = \cdots = x_n\}$;
3) $S = \{(x_1, \ldots, x_n) \in V;\ x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1\}$;
4) $S = \{(x_1, \ldots, x_n) \in V;\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1\}$;
5) $S = \{(x_1, \ldots, x_n) \in V;\ x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 0\}$;
6) $S = \{(x_1, \ldots, x_n) \in V;\ x_i \leq x_j$ para todo $i \leq j\}$.

c) Para $V = \mathbb{R}_n[x]$ el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual a n con coeficientes en $\mathbb{R}$:

1) $S = \{p \in \mathbb{R}_n[x];\ p(\alpha) = 0\}$, donde $\alpha \in \mathbb{R}$ es un valor fijo;
2) $S = \{p \in \mathbb{R}_n[x];\ p(\alpha) = p'(\alpha) = 0\}$, donde $\alpha \in \mathbb{R}$ es un valor fijo;
3) $S = \{p \in \mathbb{R}_n[x];$ el grado de p es $n\}$;
4) $S = \{p \in \mathbb{R}_n[x];\ p(1-x) = p(1+x)\ \forall x \in \mathbb{R}\}$;
5) $S = \{p \in \mathbb{R}_n[x]; p(x) \leq p(2x)\}$;
6) $S = \{p \in \mathbb{R}_n[x]; |p(x)| \leq |p(2x)|\}$.

d) Para $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de las funciones reales de variable real:

1) $S = \{f \in \mathcal{F};\ f(1) = f(0)\}$;
2) $S = \{f \in \mathcal{F};\ f(x^2) = f(x)^2,\ \forall x \in \mathbb{R}\}$;
3) $S = \{f \in \mathcal{F};\ f$ es par$\}$;
4) $S = \{f \in \mathcal{F};\ f$ es impar$\}$;
5) $S = \{f \in \mathcal{F};\ f$ es periódica con período $\pi\}$;
6) $S = \{f \in \mathcal{F};\ f$ con 1 como raíz$\}$;
7) $S = \{f \in \mathcal{F};\ f$ con alguna raíz$\}$.

5. Sea $V = \mathbb{R}^3$ como espacio vectorial. Determinar en qué condiciones los conjuntos S son subespacios

   a) Fijo $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, $S = \{(x, y, z) : \langle (x, y, z), (a, b, c) \rangle = d\}$.
   b) Fijo $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ y $v \in \mathbb{R}^3$, $S = \{(x, y, z) : (x, y, z) \wedge (a, b, c) = v\}$.
   c) Fijo r, $S = \{(x, y, z) : \|(x, y, z)\| = r\}$.

6. Sea (S) un sistema de ecuaciones lineales homogéneo con n incógnitas. Probar que las soluciones de (S) son un subespacio de $\mathbb{R}^n$.

7. Sea $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ el espacio vectorial de las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ con las operaciones punto a punto. Averiguar si los siguientes subconjuntos $W \subseteq V$ son subespacios de $(V, +, \cdot)$.

   (a) $W = \{f \in V \mid f(1) = 1\}$.
   (b) $W = \{f \in V \mid f(1) = 0\}$.
   (c) $W = \{f \in V \mid \exists f''(0)\}$.
   (d) $W = \{f \in V \mid \exists f''(x)\, \forall x \in \mathbb{R}\}$.

8. Sea V el espacio vectorial de las sucesiones que toman valores reales. Averiguar si los siguientes subconjuntos $W \subseteq V$ son subespacios de $(V, +, \cdot)$.

   (a) $W = \{(a_n) \in V \mid \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty\}$.
   (b) $W = \{(a_n) \in V \mid \lim_{n\to\infty} a_n = 1\}$.
   (c) $W = \{(a_n) \in V \mid \exists \lim_{n\to\infty} a_{2n}\}$.

(d) $W = \{(a_n) \in V \mid \#\{n \mid a_n \neq 0\} < \infty\}$.

9. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son subespacios de $\mathbb{R}[x]$?

   (a) $W_1 = \{f \in \mathbb{R}[x] \mid f(0) = 0\}$;
   (b) $W_2 = \{f \in \mathbb{R}[x] \mid 2f(0) = f(1)\}$;
   (c) $W_3 = \{f \in \mathbb{R}[x] \mid f(t) = f(1-t) \ \forall t \in \mathbb{R}\}$;
   (d) $W_4 = \{f \in \mathbb{R}[x] \mid f = \sum_{i=0}^{n} a_i x^{2i}\}$.

10. Se considera el $\mathbb{K}$ espacio vectorial formado por las matrices $n \times n$ con entradas en $\mathbb{K}$. En cada caso, investigar si los subconjuntos de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ son subespacios vectoriales:

    a) el conjunto de las matrices simétricas, es decir, $\{A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K}) \colon A^T = A\}$.
    b) el conjunto de las matrices antisimétricas, $\{A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K}) \colon A^T = -A\}$.
    c) el conjunto de las matrices invertibles;
    d) el conjunto de las matrices no invertibles;
    e) el conjunto de matrices diagonales;
    f) el conjunto de matrices triangulares superiores;
    g) fijado $X \in \mathbb{K}^n$, el conjunto de matrices A tales que $AX = 0$;
    h) fijado $B \in \mathcal{M}_{n\times n}$ el conjunto de matrices A tales que $AB = BA$;
    i) el conjunto de matrices nilpotentes, es decir las matrices A tal que existe $k \in \mathbb{N}$ que verifica $A^k = 0$;
    j) el conjunto de matrices idempotentes, es decir las matrices A tal que $A^2 = A$.

11. Se define la *traza* de una matriz $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{k})$ como $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.
    Sea $V = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) : tr(A) = 0\}$. Probar que V es un subespacio de $M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

12. Sea V un $\mathbb{k}$-espacio vectorial y X un conjunto cualquiera. Se considera el conjunto $V^X = \{f : X \to V\}$ es un espacio vectorial, con operaciones “punto a punto”:

    $$\begin{array}{ll} (f+g)(x) = f(x) + g(x) & \\ (\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot (f(x)) & \end{array} \qquad f, g \in V^X,\ \lambda \in \mathbb{k}, x \in X.$$

    Se dice que las operaciones en V^X se heredan de las de V.

    a) Probar que V^X es un $\mathbb{k}$-espacio vectorial.
    b) Probar que si $W \subset V$ es un subespacio de V entonces el subconjunto

    $$W^X = \{f \in V^X : f(x) \in W \ \forall x \in X\} \subset V^X$$

    es un subespacio de V^X.

13. **Intersección y unión de subespacios** Sean V_1, V_2 subespacios de un $\mathbb{k}$-espacio vectorial V.

    a) Probar que $V_1 \cap V_2$ es un subespacio de V.
    b) Probar (con un ejemplo) que $V_1 \cup V_2$ no tiene por qué serlo.