Capítulo 2

Espacios vectoriales

1. Definiciones básicas

En lo que sigue $\Bbbk$ denotará un cuerpo arbitrario: e.g. el cuerpo de los números reales $\mathbb{R}$, el cuerpo de los números racionales $\mathbb{Q}$, el cuerpo de los números complejos $\mathbb{C}$, etc.

Recordamos que en un cuerpo siempre existen dos operaciones, la suma y el producto, dos elementos distinguidos, $0, 1 \in \Bbbk$, que son el neutro de la suma y del producto respectivamente — o sea si $a \in \Bbbk$ entonces $a + 0 = 0 + a = a$ y $a1 = 1a = a$ — y que existen también opuestos e inversos (inverso siempre que el elemento dado no sea nulo). Más precisamente:

Definición 2.1. Un *cuerpo* es una 5-upla $(\Bbbk, m, s, 1_\Bbbk, 0_\Bbbk)$ donde $\Bbbk$ es un conjunto, $1_\Bbbk, 0_\Bbbk \in \Bbbk$ elementos distintos $(1_\Bbbk \neq 0_\Bbbk)$ y $m, s : \Bbbk \times \Bbbk \to \Bbbk$ dos funciones tales que, si notamos $m(a, b) = a \cdot b$ y $s(a, b) = a + b$, se verifica que:

1. La *suma* s es asociativa: $(a + b) + c = a + (b + c)$ para todo $a, b, c \in \Bbbk$.
2. El elemento $0_\Bbbk$ es un *neutro para la suma*, es decir $a + 0_\Bbbk = 0_\Bbbk + a = a$ para todo $a \in \Bbbk$. Diremos que $0_\Bbbk$ es el *cero*, y cuando no haya confusión, omitiremos el subíndice $\Bbbk$.
3. Todo elemento $a \in \Bbbk$ tiene un *opuesto*, notado $-a \in \Bbbk$, tal que $a + (-a) = (-a) + a = 0_\Bbbk$.
4. La suma es conmutativa: para todo $a, b \in \Bbbk$, se tiene que $a + b = b + a$.
5. El *producto* m es asociativo: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ para todo $a, b, c \in \Bbbk$.
6. El elemento $1_\Bbbk$ es un *neutro para el producto*, es decir $a \cdot 1_\Bbbk = 1_\Bbbk \cdot a = a$ para todo $a \in \Bbbk$. Diremos que $1_\Bbbk$ es la *unidad* o el *uno*, y cuando no haya confusión, omitiremos el subíndice $\Bbbk$.
7. Todo elemento no nulo $a \in \Bbbk^\times = \Bbbk \setminus \{0_\Bbbk\}$ tiene un *inverso*, notado $a^{-1} = \frac{1}{a} \in \Bbbk$, tal que $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1_\Bbbk$.
8. El producto es conmutativo: para todo $a, b \in \Bbbk$, se tiene que $a \cdot b = b \cdot a$.
9. Se cumple la *propiedad distributiva*: para todos $a, b, c \in \Bbbk$, se tiene que $(a+b)\cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$ (por lo que $c \cdot (a + b) = (c \cdot a) + (c \cdot b)$).

Notación 2.2. A partir de ahora, la multiplicación tiene precedencia sobre la suma, a no ser que escribamos paréntesis. Así, si $\Bbbk$ es un cuerpo y $a, b, c \in \Bbbk$, $a \cdot b + c$ se calcula multiplicando primero a con b, y sumando el resultado a c, mientras que $a \cdot (b + c)$ se calcula sumando primero b y c, y multiplicando a al resultado obtenido.

Al igual que en los números reales, omitiremos $\cdot$ cuando esté claro que la operación es una multiplicación. Así, $ab = a \cdot b = m(a, b)$, pero $34 \neq 3 \cdot 4$.

Observación 2.3. *(1)* Cuando las operaciones estén claras, omitiremos la mención a las mismas y diremos que $\Bbbk$ es un cuerpo.

(2) Las propiedades 1 a 3 dicen que $(\Bbbk, s, 0_{\Bbbk})$ es un *grupo*, la propiedad 4 nos dice que es un *grupo conmutativo* o *abeliano*.

(3) El opuesto es único: si $a + b = 0$, entonces

$$b = 0 + b = (-a + a) + b = -a + (a + b) = -a + 0 = -a$$

(4) Notemos que $0 + 0 = 0$ y $1 \cdot 1 = 1$.

(5) Si $a \in \Bbbk$, entonces $0a = a0 = 0$ para todo $a \in \Bbbk$. En efecto,

$$0 \cdot a = (0 + 0)a = 0a + 0a$$

Sumando el opuesto $-(0a)$, tenemos que

$$0 = -0a + 0a = -0a + (0a + 0a) = (-0a + 0a) + 0a = 0 + 0a = 0a.$$

Ver el Ejercicio 40.

(6) Del mismo modo que (3), se prueba que si $a \neq 0$, su inverso es único, ver Ejercicio 1.

Ejemplo 2.4 (Los enteros módulo 2). En el Ejemplo 1.39(6) definimos una relación de equivalencia $\mathcal{R}$ en $\mathbb{Z}$ con dos clases: los *pares* y los *impares*. Si $\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/\,\mathcal{R}$, definimos dos operaciones $m : \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2$ y $s : \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2$. Es fácil ver que con estas operaciones, $\mathbb{Z}_2$ es un cuerpo, con cero $[0]$ (la clase de equicalencia de los pares) y uno $[1]$ (la clase de equivalencia de los impares). Esta construcción se puede generalizar (ver Ejercicio 42).

Definición 2.5. Un $\Bbbk$–*espacio vectorial* V, o un espacio vectorial V sobre $\Bbbk$, es un conjunto no vacío munido de dos operaciones, una operación *suma*, que es una función

$$+ : V \times V \to V$$

y una operación *producto por un escalar*, que es una función

$$\cdot : \Bbbk \times V \to V\,,$$

sujetas a ciertas restricciones que detallaremos a continuación, luego de fijar notaciones.

Los elementos de V, que se designarán en general con las letras $u, v, w \in V$, se llaman *vectores;* los elementos de $\Bbbk$ se llaman *escalares,* y se designarán en general con las letras $a, b, c \in \Bbbk$. La operación de suma asocia a un par de vectores (v, w) el vector $v + w \in V$ y la operación de producto por un escalar asocia a un par (a, v) formado por un escalar $a \in \Bbbk$ y un vector $v \in V$ el vector $av \in V$.

Esas operaciones están regidas por las siguientes leyes:

1. *Propiedad asociativa de la suma.* Si $u, v, w \in V$, entonces $u+(v+w) = (u+v)+w$.
2. *Existencia de un neutro para la suma.* Existe un vector $0_V \in V$ que cumple $u + 0_V = 0_V + u = u$ para todo $u \in V$.
3. *Existencia del opuesto.* Para todo $v \in V$ existe $w \in V$ tal que $v+w = w+v = 0_V$. El elemento w (más tarde probaremos que es único, ver Observación 2.6) se llama el *opuesto* de v.
4. *Propiedad conmutativa de la suma.* Para todo $v, w \in V$, $v + w = w + v$.
5. *Propiedad distributiva de la suma con respecto al producto por un escalar.* Si $a \in \Bbbk$ y $v, w \in V$, entonces $a(v + w) = av + aw$.
6. *Propiedad distributiva de la suma de escalares multiplicados por un vector.* Si $a, b \in \Bbbk$ y $v \in V$, entonces $(a + b)v = av + bv$.

7. *Propiedad asociativa del producto por un escalar.* Si $a, b \in \Bbbk$ y $v \in V$, entonces $a(bv) = (ab)v$.
8. *Propiedad del neutro.* Si $v \in V$, entonces $1v = v$, donde $1 \in \Bbbk$ es el neutro del producto en $\Bbbk$.

Observación 2.6. (1) Destacamos que el elemento neutro $0_V \in V$ es único y lo mismo sucede con el opuesto de un vector cualquiera $v \in V$. El opuesto de v se denota $-v$ y se puede probar facilmente que $-v = (-1)v$. Es importante no confundir el elemento $0_V \in V$ con el elemento $0 \in \Bbbk$. Por ese motivo se le pone a veces un subíndice al primero. Sin embargo, este subíndice se omite casi siempre porque no hay lugar a confusiones, y $0v = 0_V$ para todo $v \in V$, ver Ejercicio 2.4.

Probemos, por ejemplo, que el neutro es único: sea $v \in V$ otro elemento tal que $v + w = w$ para todo $w \in V$. Entonces $v = v + 0_V = 0_V$; la primera igualdad es válida por ser 0_V el neutro, y la segunda por definición de v. Dejamos la prueba de la unicidad del opuesto como ejercicio (ver Ejercicio 2.4).

(2) Como en general se trabaja con un cuerpo fijo $\Bbbk$, en lugar de decir $\Bbbk$–espacios vectoriales o espacios vectoriales sobre $\Bbbk$, diremos simplemente espacios vectoriales.

(3) Los axiomas 1–4 de la definición anterior nos dicen que $(V, +, 0_V)$ es un grupo abeliano.

Veamos algunas propiedades elementales que se deducen a partir de los axiomas que aparecen en la definición anterior, llamados *axiomas de espacio vectorial.*

Lema 2.7. *Sea V un espacio vectorial.*

(1) Si $u + v = u + w$, entonces $v = w$.

(2) $0v = 0_V$ y $a0_V = 0_V$ para todo $a \in \Bbbk$, $v \in V$.

(3) Si $av = 0_V$, entonces $a = 0$ ó $v = 0_V$.

(4) $-v = (-1)v$ para todo $v \in V$.

Demostración. (1) Sumar $-u$ de ambos lados de la ecuación.
(2) $0v = (0 + 0)v = 0v + 0v$, por lo que $0v = 0_V$ (alcanza con sumar $-0v$ a ambos lados de la igualdad, ver Ejercicio 40).

Análogamente $a0_V = a(0_V + 0_V) = a0_V + a0_V$, de donde $a0_V = 0_V$.
(3) Si $a \neq 0$, multiplicar la ecuación por a^{-1}.
(4) $v + (-1)v = (1 - 1)v = 0v = 0_V$. □

Observación 2.8. Se puede definir la resta de vectores de la siguiente forma, si $u, v \in V$ entonces, $u - v = u + (-v)$, y se cumple que $w = u - v$ si y sólo si $u = w + v$.

Observación 2.9. Nótese que los axiomas de espacio vectorial no son independientes, es decir algunos se pueden probar a partir de los otros. Por ejemplo la propiedad conmutativa de la suma se demuestra desarrollando $(1 + 1)(u + v)$ de las dos maneras posibles y aplicando luego existencia del opuesto.

Además, los axiomas pueden sustituirse por otros: por ejemplo, si asumimos que $0v = 0_V$ para todo $v \in V$, tenemos que $v + (-1)v = (1 - 1)v = 0v = 0_V$, por lo que el axioma de existencia del opuesto se puede sustituir por la mencionada propiedad del 0.

Veamos diferentes ejemplos de espacios vectoriales.

EJEMPLO 2.10. El conjunto $\mathbb{k}^n = \big\{(a_1, \ldots, a_n) : a_i \in \mathbb{k},\ i = 1, 2, \ldots, n\big\}$, con las operaciones definidas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} (a_1, \ldots, a_n) + (b_1, \ldots, b_n) &= (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n) \\ a \cdot (a_1, \ldots, a_n) &= (aa_1, \ldots, aa_n) \end{aligned}$$

es un espacio vectorial sobre $\mathbb{k}$. En particular, tomando $n = 1$, obtenemos el cuerpo de base que se puede pensar como un espacio vectorial sobre sí mismo.

Es importante destacar que los vectores de $\mathbb{k}^n$ se representan ya sea como filas, en la forma de arriba o como columnas en la forma: $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$.

EJEMPLO 2.11. El conjunto $\mathbb{k}^{\mathbb{N}} = \big\{(a_1, \ldots, a_n, \ldots) : a_i \in \mathbb{k},\ i = 1, 2, \ldots\big\}$, con las operaciones definidas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} (a_1, a_2, \ldots) + (b_1, b_2, \ldots) &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots) \\ a \cdot (a_1, a_2, \ldots) &= (aa_1, aa_2, \ldots) \end{aligned}$$

es un espacio vectorial sobre $\mathbb{k}$. Observar que $\mathbb{k}^{\mathbb{N}}$ puede pensarse como el conjunto de las sucesiones con valores en $\mathbb{k}$.

EJEMPLO 2.12. El conjunto $\mathcal{C}[a, b] = \big\{f : [a, b] \to \mathbb{R} : f \text{ continua}\big\}$; es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ con las operaciones usuales entre funciones.

EJEMPLO 2.13. Si $\mathbb{k}' \subset \mathbb{k}$ es un subcuerpo de $\mathbb{k}$, entonces el cuerpo mayor es un espacio vectorial sobre el menor. Por ejemplo, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, así $\mathbb{R}$ es un $\mathbb{Q}$–espacio vectorial.

EJEMPLO 2.14. Si V es un $\mathbb{k}$–espacio vectorial cualquiera y X un conjunto arbitrario, entonces $V^X = \{f : X \to V : f \text{ es función}\}$ es un espacio vectorial de la siguiente forma: si $f, g \in V^X$ y $a \in \mathbb{k}$ se definen $f + g \in V^X$ y $af \in V^X$ como sigue: $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $(af)(x) = af(x)$. Usualmente, este tipo de operaciones definidas en V^X se dicen realizadas *punto a punto*.

EJEMPLO 2.15. Un caso particular de lo anterior es cuando $V = \mathbb{k}$ y el espacio es $\mathbb{k}^X$.

El espacio $\mathbb{k}^n$ se identifica entonces a $\mathbb{k}^{[n]}$, donde $(a_1, \ldots, a_n)$ se corresponde con la función $f : [n] \to \mathbb{k}$, $f(i) = a_i$.

El espacio de las sucesiones se identifica entonces a $\mathbb{k}^{\mathbb{N}}$, donde $(a_1, a_2, \ldots)$ se identifica con la función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{k}$, $f(i) = a_i$.

Antes de ver el siguiente ejemplo recordemos la definición de polinomio con coeficientes en $\mathbb{k}$

DEFINICIÓN 2.16. Un polinomio con coeficientes en $\mathbb{k}$ es una expresión $\sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i$, donde t es una variable, $a_i \in \mathbb{k}$ para todo $i = 0, 1, \ldots$, y la cantidad de i tales que $a_i \neq 0$ es finita. Notaremos $\mathbb{k}[t]$ al conjunto de los polinomios. El conjunto $\mathbb{k}[t]$ con las operaciones habituales entre polinomios

$$\begin{aligned}\sum_i a_i t^i + \sum_j b_j t^j &= \sum_i (a_i + b_i) t^i \\ \Big(\sum_i a_i t^i\Big)\Big(\sum_j b_j t^j\Big) &= \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{i+j}(a_i b_j)\Big)t^n = \\ & a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)t + \dots (a_0b_n + a_1b_{n-1} + \dots + a_nb_0)t^n + \dots\end{aligned}$$

donde $\sum_i a_i t^i, \sum_i b_i t^i \in \Bbbk[t]$, es un anillo.

Llamaremos *grado* de un polinomio $f \in \Bbbk[t] \setminus \{0\}$ al mayor i tal que $a_i \neq 0$, y notaremos $\operatorname{gr}(f)$ a ese número.

Dado un polinomio $f \in \Bbbk[t]$, lo notaremos de diversas maneras, cuando quede claro por el contexto:

$$f = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i = \sum_i a_i t^i = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i,$$

donde $n = \operatorname{gr}(f)$.

Ejemplo 2.17. El anillo de de los polinomios $\Bbbk[t]$ con las siguientes operaciones

$$\begin{array}{ll} \sum_i a_i t^i + \sum_i b_i t^i = \sum_i (a_i + b_i) t^i & \sum_i a_i t^i, \sum_i b_i t^i \in \Bbbk[t] \\ a \cdot \big(\sum a_i t^i\big) = \sum (a a_i) t^i & a \in \Bbbk, \sum_i a t^i \in \Bbbk[t] \end{array}$$

es un $\Bbbk$-espacio vectorial.

Ejemplo 2.18. Un caso particular de espacios de tipo $\Bbbk^n$ es el siguiente:

Sean p, q dos números naturales positivos y definimos

$$\mathrm{M}_{p\times q}(\Bbbk) = \big\{ f : [p] \times [q] \to \Bbbk : f \text{ función} \big\}.$$

En el caso que $p = q$ escribimos simplemente

$$\mathrm{M}_{p\times q}(\Bbbk) = \mathrm{M}_p(\Bbbk).$$

Podemos identificar los elementos (funciones) de $\mathrm{M}_{p\times q}(\Bbbk)$ con las *matrices con p filas y q columnas*, pues a una función $f \in \mathrm{M}_{p\times q}(\Bbbk)$ le hacemos corresponder la matriz

$$\begin{pmatrix} f(1,1) & f(1,2) & \cdots & f(1,q) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f(p,1) & f(p,2) & \cdots & f(p,q) \end{pmatrix}.$$

Es conveniente que el lector observe que una matriz como la anterior no es otra cosa que un elemento de $\Bbbk^{pq}$ organizado de otra forma. Su organización en un bloque rectangular se debe a motivos de conveniencia que quedarán más claros a lo largo del curso, por ejemplo al definir el producto entre dos matrices (ver Apéndice B).

Por ejemplo, el elemento $(1, 2, 3, 4) \in \mathbb{Q}^4$ lo podemos pensar como una matriz de $\mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{Q})$ o como perteneciente a $\mathrm{M}_{4\times 1}(\mathbb{Q})$ como sigue:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{Q}), \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{4\times 1}(\mathbb{Q}).$$

2. Subespacios vectoriales

DEFINICIÓN 2.19. Si V es un espacio vectorial y $W \subset V$ es un subconjunto, se dice que W es un *subespacio vectorial*, o simplemente subespacio, de V si se verifica:

1. $0 \in W$.
2. Si $v, w \in W$ entonces $v + w \in W$.
3. Si $a \in \Bbbk$ y $v \in W$, entonces $av \in W$.

OBSERVACIÓN 2.20. (1) Sea W un subespacio vectorial de V. Es claro que si restringimos las operaciones de V al subconjunto W (lo que se puede hacer gracias a las condiciones 2 y 3 de la definición) obtenemos un espacio vectorial. Salvo mención explícita, un subespacio se considera siempre con esta estructura, llamada *estructura inducida.*

(2) Si W es un subespacio de V, es claro que si $v_1, \ldots, v_n \in W$ y $a_1, \ldots, a_n \in \Bbbk$ entonces $a_1v_1 + \cdots + a_nv_n = \sum_{i=1}^{n} a_iv_i \in W$.

(3) Observemos que la condición (3) aplicada al escalar $a = -1$ nos dice que el opuesto de un vector $v \in W$ pertenece también a W. Esta condición junto con las condiciones (1) y (2) de la definición 2.19 dicen que $(W, +, 0_V)$ es un subgrupo del grupo abeliano $(V, +, 0_V)$.

OBSERVACIÓN 2.21. La condición (1) de la definición de subespacio vectorial puede sustituirse por

(1') $W \neq \emptyset$.

En efecto, es claro que (1),(2),(3) implican (1'),(2),(3). Recíprocamente, si $w \in W$ es un elemento de W (que existe por ser $W \neq \emptyset$, entonces por la propiedad (3) tenemos que $0_V = 0w \in W$.

EJEMPLOS 2.22. A continuación presentamos diversos ejemplos de subespacios vectoriales.

(1) Si V es un espacio vectorial, entonces $\{0\}$ y V son subespacios. Son llamados los *subespacios triviales.*

(2) Si $V = \Bbbk^n$ entonces $W = \big\{(a_1, \ldots, a_n) \in \Bbbk^n : a_1 = 0\big\}$ es un subespacio.

(3) Si $V = \Bbbk^n$ entonces $W = \big\{(a_1, \ldots, a_n) \in \Bbbk^n : a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0\big\}$. En general, si $\xi_1, \ldots, \xi_n \in \Bbbk$, entonces

$$W = \big\{(a_1, \ldots, a_n) \in \Bbbk^n : \xi_1a_1 + \xi_2a_2 + \cdots + \xi_na_n = 0\big\}$$

es un subespacio de $\Bbbk^n$.

(4) (a) Como caso particular del ejemplo anterior, consideremos un sistema de coordenadas en el plano euclídeo. De este modo, podemos identificar un punto p del plano con un elemento $p = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$. Es fácil ver que los subespacios no triviales de $\mathbb{R}^2$ se identifican con las rectas del plano que pasan por el origen del sistema coordenado.

En efecto, es claro que las rectas por el origen son subespacios. Consideremos $W \subset \mathbb{R}^2$ un subespacio tal que $W \neq \big\{(0,0)\big\}$. Sea $w \in W \setminus \big\{(0,0)\big\}$ un elemento. Entonces la recta $\overline{0w} = \{aw : a \in \mathbb{R}\}$ está contenida en W. Si $W \neq \overline{0w}$ existe $v \in W \setminus \overline{0w}$ por lo que la recta $\overline{0v}$ está también contenida en W. Es fácil ver que todo vector $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ se escribe como suma de dos vectores pertenecientes a las rectas $\overline{0w}$ y $\overline{0v}$, por lo que $W = \mathbb{R}^2$.

(b) Del mismo modo, es posible identificar un punto de $p = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3$ con un punto del espacio euclídeo. Bajo esta identificación, los subespacios vectoriales no triviales de $\mathbb{R}^3$ consisten de las rectas y planos que pasan por el origen del sistema coordenado.

(5) (a) Si $V = \mathbb{k}^2$, entonces $W = \big\{(a_1, a_2) \in V : a_1 a_2 = 0\big\}$ no es un subespacio. Sin embargo, se verifica que si $v \in W$ y $a \in \mathbb{k}$, entonces $av \in W$.

(b) Complementariamente, si $V = \mathbb{R}^2$, entonces $W = \big\{(a_1, a_2) \in V : a_1, a_2 \in \mathbb{Z}\big\}$ verifica la condición que la suma de dos elementos de W está en W, pero W no es un subespacio.

(6) Si $V = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ es el espacio de las sucesiones reales, entonces

$$\begin{aligned} W &= \big\{(a_i)_{i\in\mathbb{N}} : \text{la sucesión } (a_i)_{i\in\mathbb{N}} \text{ tiene límite finito}\big\} \\ W_0 &= \big\{(a_i)_{i\in\mathbb{N}} : \text{la sucesión } (a_i)_{i\in\mathbb{N}} \text{ tiene límite cero}\big\} \end{aligned}$$

son subespacios. Mas aún, $W_0 \subset W \subset V$; decimos en este caso que tenemos una *cadena de subespacios*.

(7) Si $V = \mathbb{R}^{(a,b)}$, el espacio de todas las funciones de (a, b) en $\mathbb{R}$, los subconjuntos

$$\mathcal{C}(a, b) = \big\{f : (a, b) \to \mathbb{R} : f \text{ es continua}\big\}$$

y

$$\mathcal{D}(a, b) = \big\{f : (a, b) \to \mathbb{R} : f \text{ es derivable}\big\}$$

son subespacios. Nuevamente tenemos una cadena de subespacios $\mathcal{D}(a, b) \subset \mathcal{C}(a, b) \subset V$.

(8) Si V es un espacio vectorial y $v \in V$, definimos $\langle v\rangle = \{av : a \in \mathbb{k}\}$, o más en general, si $v, w \in V$ son dos vectores de V, definimos $\langle v, w\rangle = \{av + bw : a, b \in \mathbb{k}\}$. Se verifica facilmente que $\langle v, w\rangle$ es un subespacio de V. Ver Definición 2.24.

Además si $v = cw$ entonces $\langle v, w\rangle = \langle w\rangle$.

(9) Si V es un espacio vectorial y $W_1, W_2 \subset V$ son subespacios, es fácil ver que $W_1 \cap W_2$ es también un subespacio de V. Más en general, si $\{W_i : i \in I\}$ es una familia de subespacios de V entonces $\bigcap_i W_i \subset V$ es un subespacio de V. En otras palabras, la intersección de una familia cualquiera de subespacios es siempre un subespacio. Es importante observar que la intersección de dos subespacios (y también de una familia arbitraria de subespacios) nunca es el conjunto vacío, ya que siempre contiene al vector nulo. Por ejemplo, si tomamos en $\mathbb{k}^2$ los subespacios $\big\langle(1, 0)\big\rangle$ y $\big\langle(0, 1)\big\rangle$, su intersección es el subespacio cero; ésta es la menor intersección posible.

(10) El subconjunto $\mathbb{k}_n[t] \subset \mathbb{k}[t]$ de los polinomios de grado menor o igual a n es claramente un subespacio. Algunas veces se nota este subespacio como $\mathbb{k}[t]_n$.

Observación 2.23. En general, la unión de subespacios vectoriales no es un subespacio vectorial. De hecho, si V es un espacio vectorial y $W_1, W_2 \subset V$ son subespacios, entonces $W_1 \cup W_2$ es un subespacio si y sólo si se verifica una inclusión entre ellos, es decir $W_1 \cap W_2 = W_i$ para algún i.

Antes de ver una prueba general, remitimos al ejemplo 2.22(5): el conjunto $W = \big\{(a_1, a_2) \in V : a_1 a_2 = 0\big\}$ es la unión de los ejes coordenados. Tenemos entonces que la unión de estos dos subespacios particulares no es un subespacio.

`Figura que se pondrá en algun momento`

Para probar el resultado general, observemos primero que si $W_1 \subset W_2$, entonces $W_1 \cup W_2 = W_2$ y si $W_2 \subset W_1$, entonces $W_1 \cup W_2 = W_1$, por lo que una de las implicaciones es inmediata.

Una inspección de la figura anterior nos da la idea de la prueba da la implicación restante: decir que ningún subespacio está contenido en el otro es equivalente a decir que existen $w_1 \in W_1 \setminus W_2$ y $w_2 \in W_2 \setminus W_1$. Si $w_1 + w_2 \in W_1 \cup W_2$, entonces o bien $w_1 + w_2 \in W_1$ o bien $w_1 + w_2 \in W_2$. Si $w_1 + w_2 \in W_1$ deducimos que $w_2 = (w_2 + w_1) - w_1 \in W_1$, absurdo. Del mismo modo, si $w_1 + w_2 \in W_2$ se deduce que $w_1 \in W_2$, con lo que queda probada la afirmación.

Definición 2.24. Sea V un espacio vectorial y $X \subset V$ un conjunto cualquiera. Se considera la siguiente familia de subespacios de V:

$$\mathcal{F}_X = \{W : X \subset W \subset V\}.$$

Es decir, $\mathcal{F}$ es la familia de todos los subespacios de V que contienen a X. Se define el *subespacio generado* por X y se denota $\langle X \rangle$, como

$$\langle X \rangle = \bigcap_{W \in \mathcal{F}_X} W.$$

Observación 2.25. (1) Si $X = V$, la familia $\mathcal{F}_X$ consta sólo de un elemento — el espacio V —, luego $\langle V \rangle = V$.

(2) Es claro que el menor subespacio que contiene al conjunto vacío es el subespacio trivial $\{0\}$, por lo que $\langle \emptyset \rangle = \{0\}$.

(3) Es claro que la Definición 2.24 generaliza las situaciones consideradas en el Ejemplo 2.22 (8) poniendo $X = \{v\}$ y $X = \{v, w\}$ respectivamente, ver Observación 2.30 y Ejercicio 2.12.

(4) Puede suceder que $X \neq Y$ pero que $\langle X \rangle = \langle Y \rangle$. Por ejemplo, si consideramos $V = \Bbbk^2$, $X = \big\{(1,0),(0,1)\big\}$ e $Y = \big\{(1,1),(0,-1)\big\}$, entonces $\langle X \rangle = \langle Y \rangle = \Bbbk^2$.

Observación 2.26. Surge de la construcción dada en la Definición 2.24 que si $X \subset V$ es un conjunto, entonces $\langle X \rangle$ es el menor subespacio vectorial que contiene a X. En efecto, $\langle X \rangle$ es un subespacio, contiene a X, y está contenido en todo subespacio $W \in \mathcal{F}$.

Observemos que en particular, tenemos que $\langle X \rangle \in \mathcal{F}_X$.

Ejemplo 2.27. Si $W, U \subset V$ son subespacios de V, entonces la *suma*

$$W + U = \big\langle W \cup U \big\rangle$$

es un subespacio. Además $W + U = \{w + u : w \in W, u \in U\}$. Omitimos la prueba de este resultado, que es un caso particular del Lema 2.29.

Definición 2.28. Si V es un espacio vectorial y $\{W_i : i \in I\}$ es una familia de subespacios de V, se define

$$\sum_{i \in I} W_i = \Big\langle \bigcup_{i \in I} W_i \Big\rangle.$$

LEMA 2.29. *Si V es un espacio vectorial y $\{W_i : i \in I\}$ es una familia de subespacios de V, entonces*

$$\sum_{i\in I} W_i = \Big\{\sum_{i\in I} w_i : w_i \in W_i, \text{ donde } w_i = 0 \text{ excepto para un número finito de } i \in I\Big\}.$$

DEMOSTRACIÓN. Llamemos $U = \big\{\sum_i w_i : w_i \in W_i, \text{ donde } \#\{i : w_i \neq 0\} < \infty\big\}$. Se verifica que U es un subespacio de V que contiene a W_i para todo $i \in I$. En efecto, $0 = \sum_i 0 \in U$, y si $v = \sum_i v_i$, $w = \sum_i w_i$, con $v_i, w_i \in W_i$, todos nulos salvo una cantidad finita, y $a \in \Bbbk \setminus \{0\}$, tenemos que

$$av + w = a\big(\sum_i v_i\big) + \sum_i w_i = \sum_i (av_i + w_i),$$

en donde, usando que la cantidad de vectores v_i, w_i no nulos es finita, usamos repetidas veces la propiedad distributiva, conmutativa de la suma y asociativa de la suma. Si para $i_0 \in I$ tenemos que el vector $av_{i_0} + w_{i_0} \in W_{i_0}$ es no nulo, entonces o bien v_{i_0} o bien w_{i_0} tiene que ser no nulo. Luego $i_0 \in \{i \in I : v_i \neq 0\} \cup \{i \in I : w_i \neq 0\}$, conjunto con una cantidad finita de elementos. Para probar que $U \supset \bigcup_{i\in I} W_i$ alcanza con observar que si $w_j \in W_j$, entonces $w_j = \sum_i v_i$, con $v_i = 0$ si $i \neq j$ y $v_j = w_j$.

Si $W \subset V$ es un subespacio que contiene a W_i para todo i, cualquier elemento de la forma $\sum_i w_i$ con $w_i \in W_i$ y con $w_i = 0$ excepto para un número finito de i, está en W. Entonces $U \subset W$ y luego es el menor subespacio vectorial que contiene a $\bigcup_{i\in I} W_i$, es decir $U = \big\langle \bigcup_{i\in I} W_i \big\rangle$. □

OBSERVACIÓN 2.30. En particular, si $v_1, \dots, v_n \in V$, entonces

$$\langle v_1, \dots, v_n\rangle = \Big\{\sum_{i=1}^{n} a_i v_i : a_i \in \Bbbk\Big\}.$$

DEFINICIÓN 2.31. (1) Una familia finita $\{W_i : i = 1, \dots, n\}$ de subespacios de un espacio vectorial V se dice que es *linealmente disjunta* si para cualquier igualdad de la forma $w_1 + \dots + w_n = 0$ con $w_i \in W_i$ se deduce que $w_i = 0$.

(2) Una familia $\{W_i : i \in I\}$ de subespacios de un espacio vectorial V se dice *linealmente disjunta* si todas sus subfamilias finitas son linealmente disjuntas.

OBSERVACIÓN 2.32. Sea $\mathcal{F} = \{W_i : i = 1, \dots, n\}$ una familia finita de subespacios de un espacio vectorial V y $\{i_1, \dots, i_s\} \subset [n]$. Si existen $w_{i_1} \in W_{i_1}, \dots, w_{i_s} \in W_{i_s}$ no nulos tales que $\sum_h w_{i_h} = 0$, es claro que entonces la familia $\mathcal{F}$ no es linealmente disjunta. Deducimos entonces que si $\mathcal{F}$ es linealmente disjunta, toda subfamilia (necesariamente finita) $\{W_{i_1}, \dots, W_{i_s}\} \subset \mathcal{F}$ es linealmente disjunta. Esto muestra que toda familia finita linealmente disjunta en el sentido de la Definición 2.31 (1), lo es también en el sentido de la Definición 2.31 (2). De este modo, en el caso finito ambas definiciones coinciden.

EJEMPLO 2.33. (1) En $\Bbbk^3$ los subespacios $W_1 = \big\{(x, y, 0) : x, y \in \Bbbk\big\}$ y $W_2 = \big\{(0, y, z) : y, z \in \Bbbk\big\}$ no son linealmente disjuntos, porque $(0, 1, 0) + (0, -1, 0) = (0, 0, 0)$, con $(0, 1, 0) \in W_1$ y $(0, -1, 0) \in W_2$.

(2) En $\Bbbk^3$ los subespacios $W_1 = \big\{(x, y, 0) : x, y \in \Bbbk\big\}$ y $W_2 = \big\{(0, 0, z) : z \in \Bbbk\big\}$ son linealmente disjuntos. En efecto, si tomamos $(a, b, 0) \in W_1$ y $(0, 0, c) \in W_2$ y suponemos que $(a, b, 0) + (0, 0, c) = (0, 0, 0)$ deducimos que $a = b = c = 0$.

Definición 2.34. Dada una familia linealmente disjunta $\{W_i : i \in I\}$ de subespacios de un espacio vectorial V, decimos que el subespacio $\sum_{i\in I} W_i$ es la *suma directa* de los subespacios de la familia y escribimos: $\bigoplus_{i\in I} W_i$.

Observación 2.35. Cuando escribimos una igualdad entre subespacios $U = \bigoplus_{i\in I} W_i$ estamos queriendo decir dos cosas de características diferentes. Por un lado que $U = \sum_{i\in I} W_i$, igualdad que se refiere a la relación entre U y la familia $\{W_i : i \in I\}$; por otro que la familia $\{W_i : i \in I\}$ es linealmente disjunta, propiedad que se refiere tan sólo a la familia $\{W_i : i \in I\}$ sin involucrar a U.

Lema 2.36. *Sea V un espacio vectorial y $U \supset W_i, i \in I$, subespacios de V. Entonces son equivalentes:*

(1) *$U = \bigoplus_{i\in I} W_i$;*

(2) *Para todo $u \in U$ existe una* única *familia $w_i \in W_i$ con las siguientes propiedades:*

(a) los elementos w_i son nulos excepto para un número finito de índices y

(b) $u = \sum_i w_i$.

Demostración. Si vale la condición (2) es claro que $U = \sum_i W_i$. Para probar que los W_i, $i \in I$, son linealmente disjuntos, usamos la unicidad garantizada en (2): si $\sum_i w_i = 0$ para alguna familia de elementos, como también tenemos que $\sum_i w_i = \sum_i 0$ y la unicidad implica que $w_i = 0$ para todo $i \in I$.

Que la condición (1) implica la condición (2) se prueba de forma semejante. Que $U = \sum_{i\in I} W_i$, o sea la existencia de una descomposición de la forma $u = \sum_i w_i$, sigue directamente de la definición de suma directa. Con respecto a la unicidad razonamos como sigue: sea $w \in U$ y supongamos que admite dos descomposiciones $w = \sum_i w_i = \sum_i v_i$, $v_i, w_i \in W_i$. Entonces $0 = w - w = \sum_i w_i - \sum_i v_i = \sum_i (w_i - v_i)$, y como los espacios W_i son linealmente disjuntos deducimos que $w_i = v_i$ para todo $i \in I$, i.e., la descomposición es única. $\square$

Observación 2.37. La condición (2) del Lema 2.36 puede reescribirse como sigue:
(2') $U = \sum_{i\in I} W_i$ y si $u \in U$, entonces la descomposición $u = \sum_{i\in I} w_i$, $w_i \in W_i$ es única.

Lema 2.38. *Supongamos que V es un espacio vectorial y $\{W_i : i \in I\}$ es una familia de subespacios. Los subespacios son linealmente disjuntos si y sólo si para todo $j \in I$ tenemos que $W_j \cap \sum_{i\in I\setminus\{j\}} W_i = \{0\}$.*

Demostración. Consideremos $j \in I$ y sea $w \in W_j \cap \sum_{i\in I\setminus\{j\}} W_i$. Entonces existen $i_1, \dots, i_n \in I \setminus \{j\}$ y vectores $w_{i_h} \in W_{i_h}$, $h = 1, \dots, n$, tales que $w = w_{i_1} + \cdots + w_{i_n}$. Luego, $w_{i_1} + \cdots + w_{i_n} - w = 0$ es una representación del cero por vectores de subespacios diferentes, por lo que $w = 0$ y $W_j \cap \sum_{i\in I\setminus\{j\}} W_i = \{0\}$.

El recíproco se prueba de forma similar y es dejado como ejercicio, ver Ejercicio 2.22. $\square$

Observación 2.39. En el caso que tengamos sólo dos subespacios, la afirmación anterior significa que W_1 y W_2 son linealmente disjuntos si y sólo si $W_1 \cap W_2 = \{0\}$.

En el caso de tres subespacios W_1, W_2, W_3, observar que no basta con que $W_1 \cap W_2 = W_2 \cap W_3 = W_1 \cap W_3 = \{0\}$ para que *los tres* subespacios sean linealmente disjuntos. Eso lo muestra el siguiente ejemplo: sean $V = \Bbbk^3$, $W_1 = \big\{(0,y,z) : y,z \in \Bbbk\big\}$, $W_2 = \big\{(x,0,0) : x \in \Bbbk\big\}$, $W_3 = \big\{(x,x,0) : x \in \Bbbk\big\}$ y el vector $(1,0,0)+(-1,-1,0) = (0,-1,0) \in W_1 \cap (W_2 + W_3)$.

`dibujo que en algún momento se agregará`

Definición 2.40. Si $M \in \mathrm{M}_{m\times n}(\Bbbk)$ definimos su *matriz transpuesta*, que denotamos por M^t, como la matriz obtenida a partir de la matriz M intercambiando las filas por las columnas: si $M = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}$, entonces $M^t = (b_{hk})_{\substack{1\le h\le n\\ 1\le k\le m}}$, con $b_{hk} = a_{kh}$.

Ejemplo 2.41. Si $M = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$, entonces $M^t = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 4\\ 2 & 5\\ 3 & 6\end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$.

Ejemplo 2.42. Consideremos el espacio de las matrices cuadradas $\mathrm{M}_n(\Bbbk)$. El subconjunto

$$\mathcal{S} = \big\{M \in \mathrm{M}_n(\Bbbk) : M^t = M\big\}$$

es un subespacio vectorial de $\mathrm{M}_n(\Bbbk)$, llamado el *subespacio de las matrices simétricas.*

El subconjunto

$$\mathcal{A} = \big\{M \in \mathrm{M}_n(\Bbbk) : M^t = -M\big\}$$

es también un subespacio de $\mathrm{M}_n(\Bbbk)$, que llamamos el *subespacio de las matrices antisimétricas.*

Si $\Bbbk = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, se cumple que $\mathcal{S} \oplus \mathcal{A} = \mathrm{M}_n(\Bbbk)$. Efectivamente, la igualdad

$$M = {}^1\!/\!_2(M + M^t) + {}^1\!/\!_2(M - M^t)$$

garantiza que $\mathcal{S} + \mathcal{A} = \mathrm{M}_n(\Bbbk)$. Se prueba que $\mathcal{S}$ y $\mathcal{A}$ son linealmente disjuntos de la siguiente forma: sea $M \in \mathcal{S} \cap \mathcal{A}$, entonces, $-M = M^t = M$ y concluimos que $M = 0$.

Más en general, esta propiedad se cumple siempre y cuando el cuerpo $\Bbbk$ no tenga *característica* 2, es decir, siempre y cuando $1+1 \neq 0$ en $\Bbbk$. En este caso 2 es invertible, es decir existe ${}^1\!/\!_2$.

En efecto, la prueba anteior vale si $1+1 \neq 0$. Supongamos ahora que $1+1 = 0$ en el cuerpo $\Bbbk$ (por ejemplo, esto sucede si $\Bbbk = \mathbb{Z}_2$), y consideremos la matriz $M = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right)$ Supongamos que existen $S = \left(\begin{smallmatrix} a & b\\ b & c\end{smallmatrix}\right)$ y $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & d\\ d & 0\end{smallmatrix}\right)$ matrices simétrica y antisimétrica respectivamente, tales que $S + A = M$. Entonces

$$M = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} a & b\\ b & c\end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} 0 & d\\ -d & 0\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} a & b+d\\ b-d & c\end{smallmatrix}\right)$$

de donde deducimos el sistema

$$\begin{cases} a &= 0\\ b+d &= 1\\ b-d &= 0\\ c &= 0\end{cases}$$

Sumando la segunda y tercera ecuación, tenemos entonces que $b+d+b-d = 1$, pero $b+b = (1+1)b = 0$, por lo que $0 = 1$ y el sistema es incompatible.

3. Transformaciones lineales

En matemática, cada vez que se define un tipo de objetos — e.g. conjuntos, espacios vectoriales, grupos, espacios topológicos — es necesario definir también los *morfismos* entre esos objetos. En el caso de los conjuntos los correspondientes morfismos son las funciones, para grupos son los homomorfismos de grupos, para espacios topológicos son las funciones continuas. En el caso de los espacios vectoriales los morfismos serán las funciones que "respetan" la suma y el producto por un escalar, en el sentido que describimos a continuación; dichas funciones serán llamadas *transformaciones lineales*.

Definición 2.43. Sean V y W dos espacios vectoriales sobre un cuerpo $\Bbbk$.

(1) Se dice que una función $T : V \to W$ es una *transformación lineal* si para todo $u, v \in V$ y $a, b \in \Bbbk$ se verifica que $T(au + bv) = aT(u) + bT(v)$.

Se dice que una transformación lineal $T : V \to W$ es un *isomorfismo lineal* si T es biyectiva como *función*. Un isomorfismo lineal también se llama simplemente un *isomorfismo* y se dice que T es *invertible*. En ese caso (o sea en el caso que exista un isomorfismo entre V y W) se dice que estos espacios son *isomorfos*. En general si V y W son isomorfos escribimos que $V \cong W$.

(2) El conjunto de todas las transformaciones lineales de V en W se denota como $\operatorname{Hom}_{\Bbbk}(V, W)$, y frecuentemente se abrevia como $\operatorname{Hom}(V, W)$.

(3) Si $V = W$ y $T : V \to V$ es una transformación lineal decimos que T es un *endomorfismo* de V. Al conjunto de todos los endomorfismos de V se lo denota como $\operatorname{End}_{\Bbbk}(V)$ o $\operatorname{End}(V)$.

(4) En el caso en que el codominio de una transformación lineal sea el cuerpo de base, o sea si $T : V \to \Bbbk$, decimos que T es una *funcional lineal*. En ese caso $\operatorname{Hom}(V, \Bbbk)$ se abrevia como V^* y se llama el *espacio vectorial dual* de V, o el *espacio dual* de V.

Ejemplos 2.44. (1) Si V, W son dos $\Bbbk$–espacios, entonces la trasformación lineal nula $\Theta : V \to W$, $\Theta(v) = 0$, es claramente una transformación lineal.

(2) Si V es un espacio vectorial, la identidad $\mathrm{id} : V \to V$ es una transformación lineal.

(3) Consideremos $T_{\alpha,\beta} : \Bbbk^2 \to \Bbbk$, $T(a, b) = \alpha a + \beta b$. Entonces $T_{\alpha,\beta}$ es una funcional lineal.

(4) La función $T : \Bbbk^3 \to \Bbbk^3$, $T(a, b, c) = (a + b, b + c, 0)$ es una transformación lineal.

Ejemplo 2.45. Más en general, notemos que toda función $f : \Bbbk^n \to \Bbbk^m$ es de la forma $f(x_1, \dots, x_n) = \big(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_m)\big)$, donde $f_i : \Bbbk^n \to \Bbbk$ es una función para todo $i = 1, \dots, m$.

Tenemos entonces que f es una transformación lineal si y solamente si f_i es una funciaonla lineal para todo $i = 1, \dots, m$.

En efecto,

$$f\big(a(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n)\big) =$$
$$\Big(f_1\big(a(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n)\big), \dots, f_m\big(a(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n)\big)\Big)$$

por lo que $f\big(a(x_1,\dots,x_n)+(y_1,\dots,y_n)\big)=af\big((x_1,\dots,x_n)\big)+f\big((y_1,\dots,y_n)\big)$ si y sólo si $f_i\big(a(x_1,\dots,x_n)+(y_1,\dots,y_n)\big)=af_i\big((x_1,\dots,x_n)\big)+f_i\big((y_1,\dots,y_n)\big)$ para todo $i=1,\dots,m$,

En el ejemplo 2.53 (4) veremos bajo otra óptica estas transformaciones lineales.

Observación 2.46. Sean V,W dos $\Bbbk$–espacios vectoriales y $T:V\to W$ una función entonces son equivalentes:

(1) T es una transformación lineal.
(2) $T(av+w)=aT(v)+T(w)$ para todo $v,w\in V$, $a\in\Bbbk$.
(3) (i) $T(av)=aT(v)$ para todo $v\in V$, $a\in\Bbbk$. (ii) $T(v+w)=T(v)+T(w)$ para todo $v,w\in V$.

En efecto, tomando en (1) $b=1$ tenemos que (1) implica (2). Si consideramos $w=0$ en (2) tenemos que (3) (i) es cierto, y considerando $a=1$ en (2) tenemos que (3) (ii) es cierto. Finalmente si (3) es cierto tenemos que $T(av+bw)=T(av)+T(bw)=aT(v)+bT(w)$.

Observación 2.47. Si una transformación lineal $T:V\to W$ es invertible, entonces su función inversa $T^{-1}:W\to V$ es también una transformación lineal. Efectivamente, si $w_1,w_2\in W$ y $a,b\in\Bbbk$, $T^{-1}(aw_1+bw_2)$ y $aT^{-1}(w_1)+bT^{-1}(w_2)$ son iguales. Esto se deduce porque si le aplicamos T a ambas expresiones obtenemos el mismo elemento aw_1+bw_2. Como T es biyectiva es inyectiva, de donde $T^{-1}(aw_1+bw_2)=aT^{-1}(w_1)+bT^{-1}(w_2)$.

Lema 2.48. *Sean V y W espacios vectoriales y $T:V\to W$ una transformación lineal.*

(1) Si $v\in V$, entonces $T(-v)=-T(v)$, y además $T(0_V)=0_W$.

(2) Si $U\subset V$ es un subespacio de V entonces, $T|_U:U\to W$ es una transformación lineal.

(3) Si $U\subset V$ es un subespacio de V, entonces el conjunto $T(U)=\big\{T(u):u\in U\big\}$ es un subespacio de W. En particular $T(V)=\mathrm{Im}(T)$ es un subespacio de W.

(4) Si $L\subset W$ es un subespacio de W, entonces $T^{-1}(L)\subset V$ es un subespacio de V.

Demostración. (1) Si $v\in V$, entonces $T(-v)=T\big((-1)v\big)=(-1)T(v)=-T(v)$. Por otro lado, $T(0_V)=T(0_V+0_V)=T(0_V)+T(0_V)$, de donde se deduce sumando $-T(0_V)$ en ambos lados de la igualdad que $T(0_V)=0_W$.

(2) Si $u,u'\in U$ y $a,b\in\Bbbk$ tenemos que $T|_U(au+bu')=T(au+bu')=aT(u)+bT(u')=aT|_U(u)+bT|_U(u')$.

(3) La propiedad (1) nos garantiza que $0_W\in T(U)$. Si $w,w'\in T(U)$, existen $u,u'\in U$ tales que $T(u)=w$ y $T(u')=w'$. Luego si $a,b\in\Bbbk$ tenemos que $aw+bw'=aT(u)+bT(u')=T(au+bu')\in T(U)$.

(4) La propiedad (1) nos garantiza que $0_V\in T^{-1}(L)$. Si $v,v'\in T^{-1}(L)$, entonces $T(v),T(v')\in L$, de donde se deduce que si $a,b\in\Bbbk$, $aT(v)+bT(v')\in L$, dado que L es un subespacio. Luego, $T(av+bv')=aT(v)+bT(v')\in L$, lo que significa que $av+bv'\in T^{-1}(L)$. $\square$

El siguiente ejemplo muestra que el recírpoco de las propiedades (3) y (4) del Lema anterior no es válido.

Ejemplo 2.49. Consideremos la transformación lineal $T : \Bbbk^2 \to \Bbbk^2$ dada por $T(a,b) = (a,0)$.

El subconjunto $U = \big\{(0,1)\big\} \subset \Bbbk^2$ no es un subespacio vectorial, pero $T(U) = \big\{(0,0)\big\} \subset \Bbbk^2$ sí lo es.

Por otra parte, el subconjunto $L = \big\{(a,a^3) : a \in \Bbbk\big\}$ no es un subespacio vectorial, pero $T^{-1}(L) = \big\{(0,b)\ b \in \Bbbk\big\}$ sí lo es.

Definición 2.50. Si V y W son espacios vectoriales y $T : V \to W$ es una transformación lineal, se define el *núcleo* de T como

$$\mathrm{N}(T) = \big\{v \in V : T(v) = 0\big\} = T^{-1}\big(\{0\}\big).$$

Ejemplos 2.51. (1) El núcleo de la transformación lineal nula $\Theta : V \to W$ es todo el dominio $\mathrm{N}(\Theta) = V$.

(2) Calculemos el núcleo de la transformación lineal $T : \Bbbk^3 \to \Bbbk^3$, $T(a,b,c) = (a+b, b+c, 0)$. Un vector (a,b,c) pertenece a $\mathrm{N}(T)$ si y sólo si $T(a,b,c) = (0,0,0)$, es decir si y sólo si $(a+b, b+c, 0) = (0,0,0)$. Luego

$$(a,b,c) \in \mathrm{N}(T) \iff \left\{\begin{array}{rl} a+b = & 0 \\ b+c = & 0 \\ 0 = & 0 \end{array}\right.$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones lineales anterior tenemos que

$$\mathrm{N}(T) = \big\{(a,-a,a) : a \in \Bbbk\big\} = \big\langle(1,-1,1)\big\rangle$$

Observación 2.52. (1) V y W son dos espacios vectoriales, del Ejemplo 2.14 deducimos que el conjunto W^V de las funciones de Ven W es un espacio vectorial. Veamos que $\mathrm{Hom}(V,W)$ es un subespacio de W^V:

Ya vimos que la función $\Theta : V \to W$ constantemente igual a 0_W, i.e. $0(v) = 0_W$ para todo $v \in V$, es una transformación lineal. Si $T, S : V \to W$ son transformaciones lineales, entonces

$$\begin{aligned}(aT+bS)(\alpha u + \beta v) = a\big(T(\alpha u + \beta v)\big) + b\big(S(\alpha u + \beta v)\big) = \\ a\alpha T(u) + a\beta T(v) + b\alpha S(u) + b\beta S(v) = \\ \alpha\big((aT+bS)(u)\big) + \beta\big((aT+bS)(v)\big).\end{aligned}$$

De esta forma verificamos que $aT + bS$ es una transformación lineal.

(2) Es muy simple verificar que si $T : V \to W$ y $S : W \to U$ son transformaciones lineales entre espacios vectoriales, entonces $S \circ T : V \to U$ es también una transformación lineal. En otras palabras la composición de transformaciones lineales es siempre una transformación lineal. Es también evidente que $\mathrm{id} : V \to V$ es una transformación lineal, o sea un endomorfismo de V.

(3) En el caso que $V = W$ además de la estructura de espacio vectorial, $\mathrm{End}(V)$ está equipado con la operación de composición. En ese caso estamos frente a lo que se llama un álgebra[1].

En el caso de $\mathrm{End}(V)$ el elemento unitario es el endomorfismo $\mathrm{id} : V \to V$.

(4) Se deduce inmediatamente del Lema 2.48 que el núcleo de una transformación lineal es siempre un subespacio del dominio.

En la literatura, muchas veces el núcleo de una transformación lineal T se nota como $\mathrm{Ker}(T)$ (del alemán *Kernel* = núcleo).

Ejemplos 2.53. (1) Si V es un espacio vectorial y $a \in \Bbbk$ es un elemento fijo del cuerpo, entonces la función $v \mapsto av : V \to V$ es una transformación lineal.

(2) Si V es un espacio vectorial, $f : V \to \Bbbk$ una funcional lineal y $v \in V$ un vector de V, se define la transformación lineal $f|v : V \to V$ de la siguiente forma: $(f|v)(u) = f(u)v$. Es claro que de esta forma tenemos una transformación lineal y que si $f \neq 0$ entonces $\mathrm{Im}(f|v) = \langle v \rangle$. Se puede probar (ver Ejercicio 4.12) que si V es un espacio vectorial un generador con un número finito de elementos y T es una transformación lineal de V en sí mismo, entonces T es la suma de un número finito de transformaciones de la forma $f|v$, ver también Lema 5.20.

(3) Si $T : V \to W$ es una transformación lineal, la función $\varphi : \Bbbk \to \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(V, W)$, $\varphi(a) = aT$, es una transformación lineal.

(4) Un elemento $A \in \mathrm{M}_{m\times n}$ define una transformación lineal $L_A : \Bbbk^n \to \Bbbk^m$ mediante la siguiente fórmula:

$$
\begin{aligned}
L_A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \\
y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\
y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
y_m &= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n
\end{aligned}
\tag{2.3.1}
$$

La transformación lineal L_A puede pensarse como $L_A(x) = Ax$, donde x es un vector columna, ver Apéndice B.

(5) El mapa $\varphi : \mathrm{M}_{m\times n} \to \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(\Bbbk^n, \Bbbk^m)$, $\varphi(A) = L_A$, define una transformación lineal. Probaremos más tarde que es un isomorfismo; en otras palabras: toda transformación lineal $T : \Bbbk^n \to \Bbbk^m$ es de la forma L_A, para alguna matriz $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(\Bbbk)$.

(6) La función $D : \mathcal{D}(a, b) \to \mathbb{R}^{(a,b)}$, $D(f) = f'$, es una transformación lineal; probar esta afirmación es probar que $(f + g)' = f' + g'$ para todo par de funciones derivables f, g ("la derivada de la suma es la suma de las derivadas"), y que la derivada de una constante a por una función f es af'. En este caso $\mathrm{N}(D) \subset \mathcal{D}(a, b)$ es el subespacio de

[1]Un *álgebra* es un espacio vectorial A equipado además con una operación de producto $\times : A \times A \to A$ y un elemento unitario $1 \in A$ tal que — denotando el producto $\alpha \times \beta$ como $\alpha\beta$ para abreviar: para todo $\alpha, \beta, \gamma \in A$ (a) $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$; (b) $(\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma$, $\gamma(\alpha + \beta) = \gamma\alpha + \gamma\beta$; (c) $1\alpha = \alpha 1 = \alpha$; (d) Si $a \in \Bbbk$ entonces $a(\alpha\beta) = (a\alpha)\beta = \alpha(a\beta)$.

las funciones constantes, i.e., el subespacio generado por la función constantemente igual a 1.

(7) Si V es un espacio vectorial arbitrario, entonces $\operatorname{Hom}(\Bbbk, V) \cong V$. Para probar esta afirmación se define la transformación lineal $\Gamma : \operatorname{Hom}(\Bbbk, V) \to V$, $\Gamma(T) = T(1)$ si $T \in \operatorname{Hom}(\Bbbk, V)$. Definimos también $\Delta : V \to \operatorname{Hom}(\Bbbk, V)$ $\Delta(v) : \Bbbk \to V$, $\Delta(v)(a) = av$ si $a \in \Bbbk$. Es fácil ver que $\Delta = \Gamma^{-1}$.

Sean V y W espacios vectoriales y $T : V \to W$ una transformación lineal. Por definición, T es sobreyectiva si $\operatorname{Im}(T) = W$. Veremos a continuación un criterio para detectar cuándo una transformación lineal es inyectiva.

Lema 2.54. *Sean V y W espacios vectoriales y $T : V \to W$ una transformación lineal. Entonces T es inyectiva (pensada como función entre los conjuntos V y W) si y sólo si* $\mathrm{N}(T) = \{0\}$.

Demostración. Supongamos que T es inyectiva; en ese caso si $T(v) = 0_W$, como $0_W = T(0_V)$ tenemos la igualdad $T(v) = T(0_V)$ de la cual deducimos que $v = 0_V$. Hemos probado que si un vector $v \in V$ verifica que $T(v) = 0_W$, entonces $v = 0_V$, en definitiva $\mathrm{N}(T) = \{0_V\}$.

Recíprocamente, si $T(v) = T(v')$, entonces $T(v - v') = 0_W$ y si la transformación lineal tiene núcleo cero concluimos que $v - v' = 0_V$, i.e., $v = v'$. Hemos probado que si dos vectores $v, v' \in V$ tienen la misma imagen por T entonces son iguales. Eso quiere decir que T es inyectiva como función. $\square$

4. Ejercicios

1. Probar la propiedad (6) de la Observación 2.3.

2. Averiguar si las siguientes estructuras $(V, +, \cdot)$ son $\mathbb{R}$–espacios vectoriales.

(a) $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$, $(f + g)(x) = f(x) + g(x), \forall x \in \mathbb{R}, \forall f, g \in V$,
$(\lambda \cdot f)(x) = f(\lambda x), \forall x \in \mathbb{R}, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall f \in V$.
(b) $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$, $(f + g)(x) = f(x) + g(x), \forall x \in \mathbb{R}, \forall f, g \in V$,
$(\lambda \cdot f)(x) = \lambda + f(x), \forall x \in \mathbb{R}, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall f \in V$.
(c) $V = \{(a_n)_{n\geq 1}$ sucesiones en $\mathbb{R}\}, (a_n)_{n\geq 1} + (b_n)_{n\geq 1} = (a_n^2 + b_n^2)_{n\geq 1}$,
$\lambda \cdot (a_n)_{n\geq 1} = (\lambda a_n)_{n\geq 1}$.

3. Sea $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ el espacio vectorial de las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ con las operaciones punto a punto. Averiguar si los siguientes subconjuntos $W \subseteq V$ son subespacios de $(V, +, \cdot)$.

(a) $W = \{f \in V : f(1) = 1\}$.
(b) $W = \{f \in V : f(1) = 0\}$.
(c) $W = \{f \in V : \exists f''(0)\}$.
(d) $W = \{f \in V : \exists f''(x)\, \forall x \in \mathbb{R}\}$.

4. Sea V un espacio vectorial. Probar que el opuesto de un elemento es único.

5. Sea V el espacio vectorial de las sucesiones que toman valores reales. Averiguar si los siguientes subconjuntos $W \subseteq V$ son subespacios de $(V, +, \cdot)$.

(a) $W = \{(a_n) \in V : \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty\}$.
(b) $W = \{(a_n) \in V : \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1\}$.
(c) $W = \{(a_n) \in V : \exists \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n}\}$.
(d) $W = \big\{(a_n) \in V : \#\{n : a_n \neq 0\} < \infty\big\}$.

6. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son subespacios de $\mathbb{R}[x]$?

(a) $W_1 = \{f \in \mathbb{R}[x] : f(0) = 0\}$;
(b) $W_2 = \{f \in \mathbb{R}[x] : 2f(0) = f(1)\}$;
(c) $W_3 = \{f \in \mathbb{R}[x] : f(t) = f(1 - t)\ \forall t \in \mathbb{R}\}$;
(d) $W_4 = \{f \in \mathbb{R}[x] : f = \sum_{i=0}^{n} a_i x^{2i}\}$.

7. Averiguar si las siguientes estructuras $(V, +, \cdot)$ son espacios vectoriales.

(a) $V = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$, $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 - y_2)$,
$\lambda \cdot (x, y) = (\lambda \cdot x, \lambda \cdot y)$.
(b) $V = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$, $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$,
$\lambda \cdot (x, y) = (\lambda \cdot x, 0)$.

8. Si V y W son $\Bbbk$–espacios vectoriales, probar que $V \times W$ es un espacio vectorial con la siguiente estructura:

$$(v_1, w_1) + (v_2, w_2) = (v_1 + v_2, w_1 + w_2)$$
$$\lambda \cdot (v_1, w_1) = (\lambda \cdot v_1, \lambda \cdot w_1).$$

9. Averiguar si las siguientes estructuras $(V, +, \cdot)$ son espacios vectoriales.

(a) $V = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$, $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 - y_2)$, $\lambda \cdot (x, y) = (\lambda \cdot x, \lambda \cdot y)$.
(b) $V = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$, $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$, $\lambda \cdot (x, y) = (\lambda \cdot x, 0)$.

10. En $V = \mathbb{R}^2$ se definen las siguientes operaciones:

(i) $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$,
(ii) $\lambda(x, y) = (\lambda x, y)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

¿Es V con estas operaciones un espacio vectorial real?

11. Sea $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ el espacio vectorial de las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ con las operaciones punto a punto. Averiguar si los siguientes subconjuntos $W \subseteq V$ son subespacios de $(V, +, \cdot)$.

(a) $W = \big\{f \in V : f(1) = 1\big\}$.
(b) $W = \big\{f \in V : f(1) = 0\big\}$.
(c) $W = \big\{f \in V : \exists\, f''(0)\big\}$.
(d) $W = \big\{f \in V : \exists\, f''(x)\, \forall x \in \mathbb{R}\big\}$.

12. Probar que si V es un espacio vectorial y $X \subset V$ es un subconjunto, entonces

$$\langle X \rangle = \Big\{\sum_{i=1}^{n} a_i v_i : a_i \in \Bbbk\,,\ v_i \in X\,,\ n \geq 0\Big\}\,.$$

Ver observaciones 2.25 (3) y 2.30.

13. Probar que el conjunto $\mathrm{B}_n(\Bbbk) = \big\{M = (m_{ij}) \in \mathrm{M}_n(\Bbbk) : m_{ij} = 0 \text{ si } i > j\big\}$ de las matrices triangulares superiores es un subespacio de $\mathrm{M}_n(\Bbbk)$.

14. Se define la *traza* de una matriz $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_n(\Bbbk)$ como $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$. Sea $V = \big\{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) : \mathrm{tr}(A) = 0\big\}$. Probar que V es un subespacio de $M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

15. Si V y W son $\Bbbk$–espacios vectoriales, probar que $V \times W$ es un espacio vectorial con la siguiente estructura:

$$(v_1, w_1) + (v_2, w_2) = (v_1 + v_2, w_1 + w_2)$$
$$\lambda \cdot (v_1, w_1) = (\lambda \cdot v_1, \lambda \cdot w_1).$$

16. Calcular la suma de los siguientes subespacios y decir si es directa:

(a) $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^4$, $W_1 = \big\{(x, 0, z, 0) \in \mathbb{R}^4\big\}$, $W_2 = \big\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z + w = 0\big\}$.
(b) $W_1, W_2, W_3 \subset \mathbb{R}^4$, $W_1 = \langle(2, 0, 2, 0)\rangle$, $W_2 = \langle(1, 0, -1, 0), (1, 1, 1, 1)\rangle$, $W_2 = \langle(0, 1, 2, 1)\rangle$.

17. Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial. Recordamos que $V^{\mathbb{R}} = \big\{f : \mathbb{R} \to V\big\}$ es un espacio vectorial, con operaciones "punto a punto":

$$\begin{array}{l} (f + g)(x) = f(x) + g(x) \\ (\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot (f(x)) \end{array} \qquad f, g \in V^{\mathbb{R}},\ \lambda, x \in \mathbb{R}.$$

Probar que si $W \subset V$ es un subespacio de V entonces el subconjunto

$$W^{\mathbb{R}} = \left\{ f \in V^{\mathbb{R}} : f(x) \in W \ \forall x \in \mathbb{R} \right\} \subset V^{\mathbb{R}}$$

es un subespacio de $V^{\mathbb{R}}$.

18. Sean V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y $v, w \in V$. Demuestre que $\langle v, w \rangle = \langle v+w, v-w \rangle$.

19. Hallar $S+T$ y determinar si la suma es directa, siendo S y T los subespacios de $\mathbb{R}^3$ siguientes:

(a) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = z\}$ y $T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}$.
(b) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = y\}$ y $T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = z\}$.
(c) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = 0\}$ y $T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = z\}$.

20. Calcular la suma de los siguientes subespacios y decir si es directa:

(a) $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^4$, $W_1 = \{(x,0,z,0) \in \mathbb{R}^4\}$, $W_2 = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x+y+z+w = 0\}$.
(b) $W_1, W_2, W_3 \subset \mathbb{R}^4$, $W_1 = \langle (2,0,2,0) \rangle$, $W_2 = \langle (1,0,-1,0), (1,1,1,1) \rangle$, $W_2 = \langle (0,1,2,1) \rangle$.

21. En $\mathbb{R}^3$ se consideran los subespacios

$$\begin{array}{rcl} U & = & \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = z\}, \\ V & = & \{(0,0,c) : c \in \mathbb{R}\}, \\ W & = & \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z = 0\}. \end{array}$$

1. Probar que $\mathbb{R}^3 = U \oplus V$.
2. Probar que $\mathbb{R}^3 = U + W$ y que esta suma no es directa.

22. Completar la prueba del Lema 2.38:

Sea V un espacio vectorial y $\{W_i : i \in I\}$ una familia de subespacios. Los subespacios son linealmente disjuntos si y sólo si para todo $j \in I$ tenemos que $W_j \cap \sum_{i \in I \setminus \{j\}} W_i = \{0\}$.

23. (a) Sea V el espacio de las funciones de $[-a,a]$ en $\mathbb{R}$. Consideremos las funciones pares y las impares:

$$P = \{f \in V : f(x) = f(-x) \forall x \in [-a,a]\}$$
$$I = \{f \in V : f(x) = -f(-x) \forall x \in [-a,a]\}$$

Probar que P e I son subespacios y que $V = P \oplus I$.

(b) Sea V un $\mathbb{R}$–espacio y $j : V \to V$ una transformación lineal tal que $j \circ j = \mathrm{id}_V$. Sean

$$S = \{v \in V : j(v) = v\}$$
$$A = \{v \in V : j(v) = -v\}$$

Probar que S y A son subespacios y que $V = S \oplus A$.

(c) Deducir la parte (a) y la descomposición de las matrices en suma directa de las simétricas y las antisimétricas de la parte (b).

24. En los siguientes casos determinar si la transformación T es lineal:

(a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T(x,y,z) = (y-x, z+y)$.
(b) $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $T(x) = (x,x)$.

(c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x^2, x, z - x)$.
(d) $T : \mathcal{C}[a, b] \to \mathbb{R}$, $T(f) = f(a)$.
(e) $T : V \to \mathbb{R}$, $T(\{a_n\}) = \lim a_n$, donde $V = \{(a_n) : \exists \lim a_n\}$.
(f) $\mathrm{tr} : M_n(\Bbbk) \to \Bbbk$, la traza.
(g) $T : C[a, b] \to \mathcal{C}[a, b]$, $T(f) = f^2$.
(h) $T : \Bbbk[X]_n \to \Bbbk[X]_{n+1}$, $T(a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n) = a_0X + (a_1/2)X^2 + \cdots + (a_n/n+1)X^{n+1}$.

25. Hallar el núcleo y la imagen de las transformaciones lineales del ejercicio 24.

26. Sea $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(p) = \big(p(0), p(1), p(2)\big)$.

1. Probar que es una transformación lineal.
2. Hallar el núcleo y la imagen de T.
3. Estudiar inyectividad y sobreyectividad de T.

27. Se considera la función $D : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$, $D(p) = p'$.

(a) Probar que D es lineal y sobreyectiva.
(b) Hallar $N(D)$.

28. Sean $D : \mathbb{R}[X]_{n+1} \to \mathbb{R}[X]_n$, $D(p) = p'$ y $T : \mathbb{R}[X]_n \to \mathbb{R}[X]_{n+1}$ la transformación del ejercicio 24(h). Probar que $D \circ T = \mathrm{id}$ pero que $T \circ D \neq \mathrm{id}$.

29. Definimos en el conjunto $\Bbbk[x] \times \Bbbk[x]^*$ la siguiente relación : $(f, g)\ \mathcal{R}\ (f', g')$ si $fg' - gf' = 0$ (se recuerda que $\Bbbk[x]^* = \Bbbk[x] \setminus \{0\}$).

(a) Probar que $\mathcal{R}$ es de equivalencia. Notaremos $\Bbbk(x) = (\Bbbk[x] \times \Bbbk[x]^*)/\mathcal{R}$, y $f/g =_{\mathcal{R}} [(f, g)]$.
(b) Probar que $\mathbb{R}(x)$ es un cuerpo con las siguientes operaciones:

$$f(x)/g(x) + f'(x)/g'(x) = \big(f(x)g'(x) + f'(x)g(x)\big)/g(x)g'(x)$$
$$f(x)/g(x) \cdot f'(x)/g'(x) = f(x)f'(x)/g(x)g'(x).$$

(c) Probar que $\iota : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}(x)$, $\iota(p) = \frac{p}{1}$, es una transformación lineal tal que $\iota(pq) = \iota(p)\iota(q)$. En otras palabras, ι es un *morfismo de álgebras*. Observar que ι es inyectiva.
d Probar que $\mathbb{R}[x]$ es un subespacio de $\mathbb{R}(x)$ como $\mathbb{R}$–espacio vectorial, en donde identificamos $\mathbb{R}[x]$ con $\iota\big(\mathbb{R}[x]\big)$.
(d) ¿Es $\mathbb{R}[x]$ un $\mathbb{R}(x)$–espacio vectorial?

30. (a) Sea $D_n(\Bbbk) = \{A \in \mathrm{M}_n(\Bbbk) : a_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j\}$. Probar que $D_n(\Bbbk) \cong \Bbbk^n$.
(b) Probar que $\Bbbk[X]_n \cong \Bbbk^{n+1}$.
(c) Probar que $\Bbbk^{\{x\}} \cong \Bbbk$.

31. Sean V y W espacios vectoriales, $T : V \to W$ una transformación lineal y $B \subset Im(T)$ un subespacio.

(a) Probar que $A = T^{-1}(B)$ es el único subespacio de V tal que $N(T) \subseteq A$ y $T(A) = B$.
(b) Sea $C \subseteq V$ un subespacio. Probar que $A = N(T) \oplus C$ si y sólo si $T(C) = B$ y $T|_C$ es inyectiva.

32. Si existe, dar un ejemplo de una transformación lineal T tal que su núcleo sea $N(T) = \langle(4, -7, 5)\rangle$ y su imagen sea $Im(T) = \langle(2, -1, 1), (-1, 3, 2)\rangle$.

33. (a) Hallar $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ lineal, tal que

$$N(T) = \langle (1,-1,2,1),(0,-1,2,2)\rangle$$
$$Im(T) = \langle (1,2,-1)(2,1,-2)\rangle.$$

(b) Hallar $T : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$ lineal, tal que

$$N(T) = \langle 1+x^2\rangle, \quad Im(T) = \langle \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) : a = b, c = d\rangle$$

34. Sea $T : \mathbb{R}_2[t] \longrightarrow \mathbb{R}$ transformación lineal dada por

$$T(at^2+bt+c) = \int_0^1 (at^2+bt+c)dt$$

1. Hallar $N(T)$.
2. Hallar $Im(T)$.

35. Sean V y W espacios vectoriales, $T : V \to W$ una transformación lineal y $B \subset Im(T)$ un subespacio.

(a) Probar que $A = T^{-1}(B)$ es el único subespacio de V tal que $N(T) \subseteq A$ y $T(A) = B$.
(b) Sea $C \subseteq V$ un subespacio. Probar que $A = N(T) \oplus C$ si y sólo si $T(C) = B$ y $T|_C$ es inyectiva.

36. Sean X un conjunto y V un $\mathbb{k}$–espacio vectorial.

(a) Sea $Y \subseteq X$. Probar que $Y^0 = \{f \in V^X : f|_Y = 0\}$ es un subespacio de V^X. (Nota: si $Y = \emptyset$ se define $Y^0 = V^X$).
(b) Probar que $Y^0 = V^X$ si y sólo si $Y = \emptyset$ y que $Y^0 = \{0\}$ si y sólo si $Y = X$.
(c) Sean $Y, Z \subseteq X$. Probar que $(Y \cup Z)^0 = Y^0 \cap Z^0$ y que $(Y \cap Z)^0 = Y^0 + Z^0$.
(d) Deducir que $V^X = Y^0 \oplus Z^0$ si y sólo si $X = Y \cup Z$ y $Y \cap Z = \emptyset$.

37. Definimos $+ : \mathbb{R}^\star \times \mathbb{R}^\star \to \mathbb{R}^\star$ como $a + b = ab$ (el producto usual de los reales) y $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^\star \to \mathbb{R}^\star$ como $\lambda \cdot a = a^\lambda$. Probar que $(\mathbb{R}^\star, +, \cdot)$ es un $\mathbb{R}-$espacio vectorial isomorfo a $\mathbb{R}$.

38. Sean V, W dos espacios vectoriales. Consideremos las funciones $T : V \to V \times W$, $T(v) = (v, 0_W)$, y $S : W \to V \times W$, $S(w) = (0_V, w)$.

(a) Probar que T y S son transformaciones lineales inyectivas. Hallar sus imágenes.
(b) Probar que $V \times W = \mathrm{Im}(T) \oplus \mathrm{Im}(S)$.
(c) Sea U un espacio vectorial y $f : V \to U$, $g : W \to U$ dos transformaciones lineales. Probar que existe una única transformación lineal $R : V \times W \to U$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "T"] \arrow[dr, "f"'] & V \times W \arrow[d, dotted, "R"] & W \arrow[l, "S"'] \arrow[dl, "g"] \\
& U &
\end{tikzcd}$$

es conmutativo.
(c) Sea U un espacio vectorial y $f' : U \to V$, $g' : U \to W$ dos transformaciones lineales. Probar que existe una única transformación lineal $Q : U \to V \times W$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} V & V \times W \arrow[l, "p"'] \arrow[r, "q"] & W \\ & U \arrow[ul, "f'"] \arrow[u, dotted, "Q"'] \arrow[ur, "g'"'] & \end{tikzcd}$$

es conmutativo, donde p, q son las proyecciones de $V \times W$ en V y W respectivamente — observar que p y q son transformaciones lineales.

39. Sea V un espacio vectorial y $W, U \subset V$ subespacios tales que $W \subset U$. Probar que si $K \subset V$ es un subespacio tal que $W \oplus K = V$, entonces $W \oplus (U \cap K) = U$.

Ejercicios complementarios

40. Iminando la prueba de la Observacion 2.3(5), probar que si $(G, m, 1)$ es un grupo y e es un elemento *idempotente*, es decir que $e^2 = 2$, entonces $e = 1$.

41. Probar que si $\Bbbk$ es un cuerpo, y $a, b \in \Bbbk^\times$ son elementos no nulos, entonces $ab \neq 0$. SUGERENCIA: recordar que los elementos no nulos tienen inverso.

42 (Los enteros módulo p). Consideramos en $\mathbb{Z}$ la relación de equivalencia $\mathcal{R}$ dada por $x \mathcal{R} y$ si $x - y$ es un múltiplo de n (ver Ejercicio 11). Si $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/\mathcal{R}$, definimos como en el Ejemplo 1.39(6) dos operaciones $m = \cdot : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n$, $[a] \cdot [b] = [ab]$ y $s = + : \mathbb{Z}_n \times Z_n \to \mathbb{Z}_n$, $[a] + [b] = [a + b]$. Probar que $\mathbb{Z}_n$ es un cuerpo con estas operaciones si y sólo si n es un número primo.