Matrices.

$\boxed{\text{Matriz } m\times n}$: Es una tabla de números con m filas y n columnas

$$\begin{pmatrix} 1 & 2{,}2 & \sqrt{5} \\ \pi & 4 & -7 \end{pmatrix}$$

$\leftarrow$ Esta es una matriz 2×3

2 filas

3 columnas

Todo sistema lineal tiene una matriz asociada que consiste en tomar los coeficientes que multiplican a las incógnitas.

$$\begin{cases} 3x + 2y = 363 \\ 2x + 6y = 872 \end{cases} \xrightarrow[\text{asociada}]{\text{matriz}} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Las filas corresponden a las ecuaciones y las columnas a las incógnitas.

sistema de m ecuaciones con n incógnitas $\longrightarrow$ matriz $m\times n$

Más ejemplos :

$$\begin{cases} 7x = 7z \\ 8x + y = 5x + 2w \\ y = 3x \\ 3y = 6x + w \end{cases} \xrightarrow[\text{Matriz asociada}]{\text{incógnitas } (x,y,z,w)} \begin{pmatrix} 7 & 0 & -7 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ -6 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + 3y = 1 \\ 2x + y = -3 \\ 2x + 2y = -2 \end{cases} \xrightarrow[\text{incógnitas } (x,y)]{} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

La matriz ampliada de un sistema consiste en agregar una columna con los coeficientes independientes:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 363 \\ 2x + 6y = 872 \end{cases} \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 363 \\ 2 & 6 & 872 \end{array}\right).$$

Para resolver un sistema podemos realizar las operaciones elementales en las filas de la matriz ampliada hasta llevarla a su forma escalonada.

Matriz $m \times n$:

filas de A

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$$

Columnas de A

$M_{m \times n}$ = conjunto de todas las matrices $m \times n$

Matriz columna: es una matriz $m \times 1$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$$

Matriz fila: es una matriz $1 \times n$

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

Es usual escribir una matriz fila como

$$(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

con una coma separando los números.

$$\mathbb{R}^n = M_{1\times n} = \{ (x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R} \}$$

Hay una correspondencia biunívoca natural entre $M_{1\times n}$ y $M_{n\times 1}$

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Observar que un sistema es escalonado si y sólo si su matriz asociada (a_{ij}) verifica:

$$a_{ij} = 0 \quad \text{siempre que} \quad i > j \, .$$

Operaciones con matrices.

Las matrices se pueden multiplicar por una constante, se pueden sumar y se pueden multiplicar entre ellas. La suma es fácil de definir, pero la multiplicación es un poco extraña. Veamos:

1. Multiplicación por un escalar (un número).

$$c \in \mathbb{R} \qquad A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}$$

$$\Rightarrow \quad cA = (ca_{ij}) \in M_{m \times n}$$

multiplicamos cada coeficiente de A por el número c.

$$c \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \cdots & ca_{1n} \\ ca_{21} & \cdots & & ca_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ ca_{m1} & \cdots & & ca_{mn} \end{pmatrix}$$

2. Suma de matrices.

Dos matrices se pueden sumar sólo cuando son del <u>mismo tamaño</u>.

$$A = (a_{ij}) \,,\quad B = (b_{ij}) \in M_{m \times n}$$

$$\Rightarrow \quad A + B = (\underbrace{a_{ij} + b_{ij}}) \in M_{m \times n}$$

sumamos coeficiente a coeficiente

3. Multiplicación de matrices.

Dos matrices A y B se pueden multiplicar solamente cuando el número de filas de B es igual al número de columnas de A y tal caso se define solamente el producto AB.

La definición es la siguiente:

nº de columnas de A

$$A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}$$

$$B = (b_{ij}) \in M_{n\times k}$$

nº de filas de B

$$\Rightarrow \quad AB = C = (c_{ij}) \in M_{m\times k}$$

siendo

$$c_{ij} = \underbrace{a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}}$$

multiplicados coeficiente a coeficiente la fila i-ésima de A con la columna j-ésima de B y sumamos todos los productos.

Ejemplos.

(1)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}}_{\text{matriz } 3\times 2} \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\text{matriz } 2\times 1} = \begin{pmatrix} 1\times(-1) + 2\times 2 \\ 3\times(-1) + 4\times 2 \\ 5\times(-1) + 6\times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

✓ El resultado es una matriz 3×1

No podemos hacer la multiplicación

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\text{¡no tiene suficientes columnas!}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \times$$

(2)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{2\times 2} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

En este caso sí podemos realizar la multiplicación en el otro orden

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

¡Son diferentes!

En general, el orden de los factores altera el producto

Hay dos matrices especiales respecto a la suma y el producto:

matriz nula $\rightarrow$ todas sus entradas son 0. La denotamos por O

matriz identidad $\rightarrow$ es una matriz cuadrada que denotamos por $I = (\delta_{ij})$

siendo $\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$

En realidad hay una matriz nula de cada tamaño $m \times n$ y una matriz identidad de cada tamaño $n \times n$.

Observemos que si $c \in \mathbb{R}$ entonces

$$cA = (cI)A$$

es decir, multiplicar por un escalar es multiplicar por una matriz particular.

Si A es una matriz cuadrada podemos multiplicarla por sí misma $A^2 = AA$

Si por ejemplo tomamos $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ entonces

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{¡La matriz nula!}$$

Más en general podemos considerar

$$A^n = \underbrace{AA \cdots A}_{\text{multiplicamos } n \text{ veces } A}$$

Propiedades: Se consideran matrices A, B, C arbitrarias, de los tamaños adecuados.

Suma

1. $A+B = B+A$ conmutativa
2. $A+(B+C) = (A+B)+C$ asociativa
3. $A+0 = A$ $\exists$ neutro
4. $A+(-A) = 0$ $\exists$ opuesto

producto

1. $A(BC) = (AB)C$ asociativa
2. $AI = IA = A$ $\exists$ neutro

Compatibilidad

1. $A(B+C) = AB+AC$
2. $(A+B)C = AC+BC$

distributiva

Matrices invertibles.

Todo sistema de ecuaciones lineales puede ser visto como una ecuación matricial:

matriz columna con los coeficientes independientes

$$\text{Sistema } m \times n \longleftrightarrow AX = B$$

matriz del sistema

matriz columna con las incógnitas

$$\overbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & & a_{mn} \end{pmatrix}}^{A} \overbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}^{X} = \overbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}^{B}$$

→ Si queremos resolver el sistema tenemos que "despejar" X, para lo cual deberíamos "dividir" entre A. Esto no siempre es posible.

<u>Definición</u>: Decimos que una matriz <u>cuadrada</u> A es $\boxed{\text{invertible}}$ si existe una matriz B tal que $AB = I$.

Observaciones:

1. Si $AB = I \Rightarrow BA = I$ para matrices cuadradas.

(No es muy fácil de probar pero es cierto).

2. Si A es invertible, la matriz B tal que $AB = I$ es única.

Demostración: Supongamos que $AB = AB' = I$

$\Rightarrow$ Multiplicando por B a la izquierda tenemos

$$\underbrace{BA}_{=I}B = \underbrace{BA}_{=I}B' \Rightarrow \boxed{B = B'}.$$

Notación: Si A es una matriz invertible, la matriz B de la definición se llama inversa de A y se denota por A^{-1}.

A matriz invertible $n\times n \rightarrow A^{-1}$ es una matriz $n\times n$

Se verifica

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I.$$

Observar que A^{-1} también es invertible con inversa A.

3. Si A es una matriz cuadrada invertible, la solución al sistema

$$AX = B$$

es $\boxed{X = A^{-1}B}$ $\leftarrow$ Para resolver el sistema tenemos que hallar A^{-1} y multiplicarla por B.

Esto significa que el sistema $AX = B$ es C.D. para cualquier B.

4. Una matriz cuadrada es invertible si y sólo si es la matriz de un sistema compatible determinado.

Para ver que una matriz $A \in M_{n\times n}$ es invertible alcanza con ver que el sistema homogéneo

$$AX = 0$$

es C.D, es decir que su única solución es $X = 0$.

$$\boxed{A \in M_{n\times n} \text{ es invertible} \iff AX = 0 \text{ es C.D.}}$$

$\Rightarrow$ esta implicancia la vimos en 3.

$\Leftarrow$ esta implicancia la probaremos más adelante.

Cálculo de la inversa

Para hallar la inversa de una matriz $n \times n$ debemos resolver un sistema lineal $n^2 \times n^2$ donde las incógnitas corresponden a los coeficientes de A^{-1}:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = X = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

$$AX = I \quad \longleftarrow \quad \text{Hay que resolver este sistema}$$

En realidad se divide en n sistemas $n \times n$ independientes, uno para cada columna de A^{-1}:

$$A \begin{pmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} x_{12} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \quad A \begin{pmatrix} x_{1n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ es invertible porque el sistema $\begin{cases} x+2y=0 \\ 3x+4y=0 \end{cases}$ es C.D.

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ no es invertible porque el sistema $\begin{cases} x+2y=0 \\ 3x+6y=0 \end{cases}$ es C.I.

Si queremos hallar la inversa de $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ planteamos

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \underbrace{\begin{cases} x_{11} + 2x_{21} = 1 \\ 3x_{11} + 4x_{21} = 0 \end{cases}} \qquad \begin{cases} x_{12} + 2x_{22} = 0 \\ 3x_{21} + 4x_{22} = 1 \end{cases}$$

$$\downarrow \ ② - 3①$$

$$\begin{cases} x_{11} + 2x_{21} = 1 \\ \quad -2x_{21} = -3 \end{cases} \to \boxed{x_{21} = 3/2} \quad \boxed{x_{11} = -2}$$

Análogamente $\boxed{x_{12} = 1}$ $\boxed{x_{22} = -1/2}$

Entonces

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

- I es invertible, $I^{-1} = I$.
- Si A tiene una columna o fila de 0 no es invertible (¿por qué?)
- Una matriz diagonal con entradas no nulas es invertible y

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & d_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & 1/d_n \end{pmatrix}$$

Inversa de matrices 2×2

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ es invertible sii $ad - bc \neq 0$

y en tal caso se tiene

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Demostración: Planteamos el sistema para hallar la inversa

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \underbrace{\begin{cases} a x_{11} + b x_{21} = 1 \\ c x_{11} + d x_{21} = 0 \end{cases}}, \quad \begin{cases} a x_{12} + b x_{22} = 0 \\ c x_{12} + d x_{22} = 1 \end{cases}$$

$$\downarrow \; a(2) - c(1)$$

$$(ad-bc)x_{21} = -c$$

$$ad-bc \neq 0 \Rightarrow \boxed{x_{21} = \frac{-c}{ad-bc}}$$

Sustituyendo en la primer ecuación tenemos

$$a x_{11} - \frac{bc}{ad-bc} = 1 \Rightarrow a x_{11} = \frac{ad}{ad-bc}.$$

Si sustituimos en la segunda ecuación queda

$$c x_{11} = \frac{cd}{ad-bc}$$

Como a y c no pueden ser 0 simultáneamente (porque $ad-bc \neq 0$) se obtiene

$$\boxed{x_{11} = \frac{d}{ad-bc}}$$

Análogamente, usando el otro sistema obtenemos x_{12} y x_{22}.

$\underline{ad - bc = 0}$ $\to$ $c = 0,\ d = 0$ $\to$ El primer sistema es C.I.

$\to$ $c = 0,\ d \neq 0$ $\to$ El primer sistema es I.

$\to$ $c \neq 0$ $\to$ El primer sistema es I.

Por lo tanto, en este caso la matriz no es invertible.

Esto concluye la demostración.