Conceptos previos: Termodinámica, probabilidad y estadística, espacio de fases

Mecánica Estadística (2022)

Práctico 1

1. *a*) Haciendo uso que la entropía $S(N, V, E)$ de un sistema termodinámico es una propiedad extensiva, muestre que:

$$N\left(\frac{\partial S}{\partial N}\right)_{V,E} + V\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{N,E} + E\left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_{N,V} = S.$$

   b) Haciendo uso que la energía libre de Helmholtz $F(N, V, T)$ de un sistema termodinámico es una propiedad extensiva, muestre que:

$$N\left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)_{V,T} + V\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_{N,T} = F.$$

2. Considere un sistema termodinámico donde la energía interna es $U(S, X)$ siendo S la entropía y X otra variable extensiva.

   a) Usando las relaciones entre derivadas parciales de las funciones de estado U, S, X y la primera ley en forma entrópica, demuestre que $\frac{\partial U}{\partial X}\big|_S = -T\, \frac{\partial S}{\partial X}\big|_U$

   b) Si $P \equiv \frac{\partial U}{\partial X}\big|_S$ obtenga que, en la condición de máxima entropía $\frac{\partial S}{\partial X}\big|_U = 0$, se cumple

$$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial X^2}\right|_S = \left.\frac{\partial P}{\partial X}\right|_U = -T\left.\frac{\partial^2 S}{\partial X^2}\right|_U$$

3. Un sistema formado por n moles de gas ideal monoatómico experimenta un proceso cuasi-estático que lo lleva de un estado inicial a temperatura T_0, volumen V_0 y entropía molar s_0 a un estado final con temperatura T, volumen V y entropía S. Exprese S en términos de T, V, T_0, V_0, s_0 y n.

4. Una batería de potencial V está conectada a una resistencia R; en consecuencia se disipa una potencia $P = V^2/R$ en dicha resistencia. La batería está formada por celdas individuales conectadas en serie de forma que V es la suma de todos los potenciales de todas las celdas. La batería es vieja de forma que no todas las celdas están en perfectas condiciones. Por lo tanto, existe una probabilidad p de que el potencial de cualquier celda individual tenga su valor nominal v; y una probabilidad 1–p de que el potencial de cualquier celda individual sea cero por cortocircuito interno. Las celdas individuales son estadísticamente independientes entre sí. Bajo estas condiciones calcule la potencia media P disipada en la resistencia, expresando el resultado en función de N, V, p y R.

5. La probabilidad $W(n)$ de que un suceso, caracterizado por una probabilidad p ocurra n veces en N experimentos viene dada por la distribución binomial:

$$W(n) = \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n (1-p)^{N-n}.$$

Considere una situación en que la probabilidad p es pequeña ($p \ll 1$) y en la que interesa el caso $n \ll N$. Note que si N es grande, $W(n)$ se hace muy pequeña si $n \to N$, a causa de la pequeñez del factor p^n cuando $p \ll 1$. En consecuencia, $W(n)$ es solo apreciable cuando $n \ll N$. En este caso pueden hacerse algunas aproximaciones para reducir $W(n)$ a una forma más sencilla.

   a) Utilizando la expresión $ln(1-p) \approx -p$ demuestre que $(1-p)^{N-n} \approx e^{-Np}$.

   b) Demuestre que: $\frac{N!}{(N-n)!} \approx N^n$.

   c) Demuestre que: $W(n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$, siendo $\lambda \equiv Np$ el número medio de sucesos. Esta distribución se llama *distribución de Poisson.*

   d) Demuestre que la distribución de Poisson está adecuadamente normalizada, o sea que:

$$\sum_{n=0}^{N} W(n) = 1.$$

   Nota: La suma anterior puede extenderse hasta infinito porque $W(n)$ es despreciable si $n \geq N$.

   e) Use la distribución de Poisson para calcular $\langle n \rangle$.

   f) Use la distribución de Poisson para calcular $\langle (\Delta n)^2 \rangle \equiv \langle (n - \langle n \rangle)^2 \rangle$.

   g) Demuestre que en el caso en que $n \gg 1$ la distribución de Poisson tiende a una distribución gaussiana.
   Sugerencia: Use la aproximación de Stirling: $n! \approx \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$.

6. Tengo dos hijos (pueden ser niños o niñas). Uno es niño y nació un lunes. ¿Cuál es la probabilidad de que tenga dos niños?

7. Se ofrece un concurso cuya mecánica es la siguiente: Al concursante se le ofrece la posibilidad de escoger entre tres puertas. Tras una de ellas se encuentra un coche, y tras las otras dos hay una cabra. El concursante gana el premio que está tras la puerta que escoja. Después de que el concursante escoja una puerta, el presentador abre una de las otras dos puertas, mostrando una cabra. Siempre puede hacerlo ya que incluso si el concursante ha escogido una cabra, queda otra entre las puertas que ha descartado y el presentador conoce lo que hay detrás de cada puerta. Entonces, ofrece al concursante la posibilidad de cambiar su elección inicial y escoger la otra puerta que descartó originalmente, que continúa cerrada. La pregunta oportuna es: ¿debe hacerlo o no?

8. Muestre que el elemento de volumen

$$d\omega = \prod_{i=1}^{3N} (dq_i dp_i)$$

del espacio de fases permanece invariante ante transformaciones canónicas de las coordenadas generalizadas (q, p) hacia otro conjunto de coordenadas generalizadas (Q, P).

9. Empezando con la linea de energía cero y trabajando en el espacio de fases bi-dimensional de un oscilador armónico clásico:

   a) Dibuje las líneas que dividen el espacio de fases en áreas de volumen h.

   b) Calcule las energías de estos estados y compárelas con las del oscilador armónico cuántico: $E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega$.

10. *a*) Determine el volumen en el espacio de fases de un gas ideal monoatómico con una energía total E.

    Dato: el volumen de una esfera de N dimensiones y radio R es

$$V_N = \frac{\pi^{N/2} R^N}{\Gamma(\frac{N}{2} + 1)},$$

    donde Γ es la función Γ de Euler.

    b) Usando que

$$\int \cdots \int_{0 \leq \sum_{i=1}^{N} r_i \leq R} \prod_{i=1}^{N} (4\pi r_i^2 dr_i) = \frac{(8\pi R^3)^N}{3N!},$$

    determine el volumen del espacio de fases de un gas ideal ultra-relativista ($\epsilon = pc$) de N partículas moviéndose en tres dimensiones con energía total E.