Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Álgebra Lineal II
Segundo semestre 2022

Práctico 2

En este repartido todos los espacios son de dimensión finita.

1. Sea $T \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^2\right)$ definida por $T(x,y) = (x+4y,\, 3x+2y)$.
   a) Probar que $\lambda = 5$ es un valor propio de T.
   b) Probar que $v = (4,-3)$ es un vector propio de T.
   c) Probar que T es diagonalizable y hallar su forma diagonal.

2. Sean $T \in \mathcal{L}(V)$ y $v \in V$ un vector propio de T correspondiente a un valor propio λ. Para cada entero positivo m, probar que v es un vector propio de $T^m := T \underbrace{\circ \cdots \circ}_{m} T$ correspondiente al valor propio λ^m.

3. Sea $T \in \mathcal{L}(V)$. Probar.
   a) El operador T es invertible[1] si y solo si 0 no es valor propio de T
   b) Si T es invertible, entonces λ es un valor propio de T si y solo si λ^{-1} es un valor propio de T^{-1}.
   c) Si $T \in \mathcal{L}(V)$ es invertible, probar que T es diagonalizable si y solo si lo es T^{-1}.

4. Un operador T se dice *nilpotente* si existe algún $n \in \mathbb{Z}^+$ tal que $T^n = 0$.
   a) Probar que si un operador T es nilpotente y λ es un valor propio de T, entonces $\lambda = 0$.
   b) Probar que si un operador T es diagonalizable y nilpotente, entonces $T = 0$.

5. Se consideran las siguientes transformaciones lineales.
   a) $T \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^2\right)$, $T(x,y) = (x+2y,\, 3x+2y)$.
   b) $T \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$, $T(x,y,z) = (-2y-3z,\, -x+y-z,\, 2x+2y+5z)$.
   c) $T \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}_2[x]\right)$, $T\big(p(x)\big) = p(0) + p(1)\left(x+x^2\right)$.

   Para cada una de ellas se pide.
   a) Hallar los valores propios y los vectores propios correspondientes.
   b) Probar que T es diagonalizable.
   c) Hallar una base del espacio formada por vectores propios de T y escribir la forma diagonal de T.

6. En los casos siguientes, determinar si $T \in \mathcal{L}(V)$ es diagonalizable y en caso afirmativo hallar una base $\mathcal{B}$ de V tal que la matriz $[T]_B$ es diagonal.
   a) $V = \mathbb{R}_2[x],\ T\left(ax^2+bx+c\right) = cx^2+bx+a$.
   b) $V = \mathbb{R}_3[x],\ T\big(p(x)\big) = p'(x) + p''(x)$.

[1]Decimos que un operador es *invertible* si tiene inverso, lo cual equivale a ser biyectivo. También se le llama *isomorfismo*.

7. Para cada una de las matrices A siguientes, determinar si el operador $T = L_A \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$ es diagonalizable y en caso afirmativo hallar una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que la matriz $[T]_B$ es diagonal.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 0 \\ 8 & -5 & 0 \\ 6 & -6 & 3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

8. Sea $T : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ el operador que asigna a cada matriz su traspuesta: $T(A) = A^t$.

   a) Probar que sus únicos valores propios son 1 y -1.
   Sugerencia: observar que vale $T^2 = \mathrm{Id}$ y recordar el ejercicio 2.

   b) Hallar los subespacios propios correspondientes.

   c) Probar que T es diagonalizable y hallar su forma diagonal.

9. Sea $T \in \mathcal{L}(V)$ un operador. Probar que T es una proyección si y solo si T es diagonalizable y todo valor propio de T es 0 o 1. *Sugrencia:* para el directo, recordar que vale $V = \mathrm{Ker}\,(T) \oplus \mathrm{Im}(T)$.

10. Sean $T \in \mathcal{L}(V)$ un operador diagonalizable y $W \neq \{0\}$ un subespacio T-*invariante* de V, es decir un subespacio que verifica $T(W) \subset W$. Notar que la restricción $T|_W : W \to W$ es un operador en W.

    a) Sean $v_1, \ldots, v_k$ vectores propios de T correspondientes a valores propios distintos. Probar por inducción en k que si $v_1 + \cdots + v_k \in W$, entonces $v_i \in W$ para todo i.

    b) Probar que $T|_W$ es diagonalizable.

11. Sean $T, S \in \mathcal{L}(V)$. Se dice que T y S son *simultáneamente diagonalizables* si existe una base $\mathcal{B}$ de V tal que $[T]_\mathcal{B}$ y $[S]_\mathcal{B}$ son diagonales. Probar.

    a) Si T y S son simultáneamente diagonalizables, entonces T y S conmutan, es decir $T \circ S = S \circ T$.

    b) Si T y S son diagonalizables y conmutan, entonces T y S son simultáneamente diagonalizables.
    Sugerencia: mostrar que para todo valor propio λ de T, el subespacio propio $E_{\lambda,T}$ es S-invariante y aplicar el ejercicio anterior para obtener una base de $E_{\lambda,T}$ formada por vectores propios de S.