Universidad de la República **Álgebra Lineal II**
Facultad de Ciencias **Segundo semestre 2022**
Centro de Matemática

Práctico 3

1. Probar que los valores propios de una matriz triangular (superior o inferior), son las entradas de su diagonal principal.

2. Sea $A \in M_n(\mathbb{K})$. Probar que A es diagonalizable si y solo si lo es su traspuesta A^t.

3. Sea $A \in M_n(\mathbb{K})$ con polinomio característico $\chi_A(t) = (-1)^n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0$.

   a) Probar $a_0 = \det(A)$. Deducir que A es invertible si y solo si $a_0 \neq 0$.

   b) Vale $a_{n-1} = (-1)^{n-1} \operatorname{tr}(A)$, donde $\operatorname{tr}(A)$ es la traza de A. Probarlo para $n = 2$ y $n = 3$. *Nota:* la prueba general se puede hacer por inducción en n, desarrollando $\chi_A(t)$ a partir de la primera fila.

4. Sean $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ matrices semejantes. Probar que A y B tienen el mismo polinomio característico. Deducir que A y B tienen los mismos valores propios. Si es $A = PBP^{-1}$, ¿qué relación hay entre los vectores propios de A y los de B?

5. *a*) Sea $A \in M_n(\mathbb{K})$. Probar que A y A^t tienen el mismo polinomio característico. Concluir que A y A^t tienen los mismos valores propios, ¿tienen también los mismos vectores propios?

   b) Hallar los valores y vectores propios de $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$.

   c) ¿Vale en general que $A \in M_n(\mathbb{K})$ y A^t tienen los mismos vectores propios?

6. Una matriz *escalar* es una matriz diagonal en la cual todas sus entradas diagonales son iguales.

   a) Probar que si una matriz A es semejante a una matriz escalar E, entonces $A = E$.

   b) Probar que si una matriz diagonalizable tiene un solo valor propio, entonces es una matriz escalar.

   c) Deducir que la matriz $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ no es diagonalizable.

7. En los casos siguientes determinar si la matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ es diagonalizable. En caso afirmativo hallar una matriz invertible Q y una matriz diagonal D tales que $A = QDQ^{-1}$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ -9 & 7 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 0 \\ 8 & -5 & 0 \\ 6 & -6 & 3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Sugerencia: tener en cuenta que las matrices 3×3 son las mismas que en el ejercicio 7 del práctico 2.

8. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$, calcular A^n para cualquier n entero positivo.
   Sugerencia: escribir $A = QDQ^{-1}$, donde D es diagonal.

9. La sucesión de *Fibonacci* se define por recurrencia mediante

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 1, \quad a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \ \forall n = 2, 3, \ldots.$$

   a) Encontrar una matriz A tal que $\binom{a_{n+1}}{a_n} = A \cdot \binom{a_n}{a_{n-1}}$, para todo n.

   b) Deducir que vale $\binom{a_{n+1}}{a_n} = A^n \cdot \binom{a_1}{a_0}$, para todo n.

   c) Obtener una fórmula explícita para a_n. *Sugerencia:* probar que A es diagonalizable.