Repartido 2

1. a. Usando la notación con índices de Einstein para tensores, demuestre que se verifica:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\, \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\, \vec{c}$$

b. Muestre que la condición para que tres vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ sean coplanares es:

$$\epsilon_{ijk}\, a_i\, b_j\, c_k = 0$$

2. Pruebe las siguientes propiedades:

$$\delta_{ij}\, \delta_{ij} = 2 \qquad \begin{aligned} \epsilon_{ijk}\, \epsilon_{ijk} &= 6 \\ \epsilon_{pqi}\, \epsilon_{pqj} &= 2\, \delta_{ij} \end{aligned}$$

3. Dado un tensor T, sus partes simétrica S y antisimétrica A se definen por:

$$\begin{aligned} S_{ij} &= \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}) \qquad\qquad T_{ij} = S_{ij} + A_{ij} \\ A_{ij} &= \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji}) \end{aligned}$$

a. Ante una rotación de ejes, muestre que las partes simétrica y antisimétrica de T en el sistema original y en el rotado transforman entre sí. ¿Cuántas componentes independientes tiene cada una?

b. Muestre que la traza de T es invariante ante una rotación de ejes.

c. Debido a que la traza es invariante, ésta se separa en una parte proporcional a la identidad $\frac{1}{3}T_{kk}\, \delta_{ij}$ y T se descompone como:

$$\begin{aligned} T_{ij} &= A_{ij} + S_{0ij} + \frac{1}{3}T_{kk}\delta_{ij} \\ &= \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji}) + \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji} - \frac{2}{3}T_{kk}\delta_{ij}) + \frac{1}{3}T_{kk}\delta_{ij} \end{aligned}$$

Verifique que la parte simétrica S_{0ij} tiene traza nula.

4. Muestre que el producto $u_i\, v_j$ de las componentes de dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ forman un tensor (transforman como un tensor bajo rotaciones), y que δ_{ij} es un tensor isotrópico (invariante bajo rotaciones).

5. a. Muestre que para un tensor de segundo orden A, las siguientes tres cantidades son invariantes bajo una rotación de ejes:

$$I_1 = \mathrm{tr}(A) = A_{ii} \qquad I_2 = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_{11} & A_{13} \\ A_{31} & A_{33} \end{vmatrix} \qquad I_3 = \det(A)$$

Sugerencia:

1) Muestre que el polinomio característico $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda\, I)$ es invariante bajo una rotación de ejes dada por una matriz C.

2) Aplique la expresión para el determinante de una matriz M: $\det(M) = \epsilon_{j_1 j_2 j_3}\, M_{1j_1} M_{2j_2} M_{3j_3}$ y observe que los invariantes I_1, I_2, I_3 vienen dados por los coeficientes de $p_A(\lambda)$.

b. Si $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ son los valores propios de A, muestre que:

$$\begin{aligned} I_1 &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ I_2 &= \frac{1}{2}\left[\mathrm{tr}^2(A) - \mathrm{tr}(A^2)\right] = \lambda_1\, \lambda_2 + \lambda_1\, \lambda_3 + \lambda_2\, \lambda_3 \\ I_3 &= \lambda_1\, \lambda_2\, \lambda_3 \end{aligned}$$

Estos invariantes se llaman *invariantes principales* del tensor A.

6. Utilizando teoremas integrales, muestre que se cumplen las siguientes identidades independientemente del sistema de coordenadas:

a. $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{u}) = 0$ para cualquier función vectorial $\vec{u}$.

b. $\nabla \times (\nabla \phi) = \vec{0}$ para cualquier función escalar ϕ.

Suponga que las funciones son C^2 en una región del espacio.

7. Usando la convención de Einstein y las identidades en δ y ϵ muestre las siguientes relaciones:

a. $\nabla \cdot (\phi\, \vec{A}) = \nabla\phi \cdot \vec{A} + \phi \nabla \cdot \vec{A}$

b. $\vec{A} \times (\nabla \times \vec{A}) = \frac{1}{2}\nabla|\vec{A}|^2 - \vec{A} \cdot \nabla\vec{A}$