Repartido 3

1. Determine las líneas de corriente para el flujo dado por:

$$\vec{u} = (a\,x_2,\ -a(x_1 - b\,t),\ c\,t)$$

siendo a, b, c constantes positivas con dimensiones adecuadas.

2. Determine las líneas de corriente y las trayectorias para los siguientes casos:

a. $\vec{u} = (a(t)x_1, a(t)x_2, 0)$, siendo $a(t)$ una función arbitraria de t.

b. $\vec{u} = (b\,t\,x_1, -c\,x_2, 0)$, con b y c constantes positivas.

3. Considere el campo de velocidades:

$$\vec{u} = \left(\frac{b\,x_1}{T+t},\ v_0,\ 0\right)$$

con b, T, v_0 constantes. Para este campo:

a. Determine las líneas de corriente en forma paramétrica y mediante una ecuación que relacione las coordenadas.

b. Determine las trayectorias de igual forma.

c. Obtenga la velocidad de una partícula a lo largo de su trayectoria.

d. ¿Qué ocurre con las partículas $x_1(t=0)=0$, $x_3(t=0)=0$?

e. Determine las trazas.

4. Dado el flujo:

$$\vec{u} = (a(x_1 + x_2),\ a(x_1 - x_2),\ v)$$

con a y v constantes. Determine:

a. la divergencia del campo,

b. la vorticidad,

c. las trayectorias parametrizadas en t,

d. las proyecciones de las trayectorias en el plano (x_1, x_2), en función de las coordenadas,

e. las líneas de corriente.

5. Considere el campo de velocidades:

$$\vec{u} = ((a + b\,\mathrm{sen}(\omega t))\, x_1,\ -(a + b\,\mathrm{sen}(\omega t))\, x_2,\ 0)$$

donde a, b y ω son constantes positivas.

a. Determine las líneas de corriente y las trayectorias.

b. Obtenga la expresión de la traza que pasa por el origen de coordenadas.

6. Determine las líneas de corriente y las trayectorias para el siguiente campo bidimensional:

$$\vec{u} = (\ -U\,\mathrm{sen}(\omega t)\,\mathrm{sen}(kx_1)\cosh(k(x_2+h)),\ U\,\mathrm{sen}(\omega t)\cos(kx_1),\ U\,\mathrm{senh}(k(x_2+h))\ )$$

donde ω, k, U y h son constantes positivas.

7. Considere un flujo determinado por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_1 &= \xi_1 \\ x_2 &= k\,\xi_1^2\, t^2 + \xi_2 \\ x_3 &= \xi_3 \end{aligned}$$

donde k es una constante. Las cantidades ξ_i representan las componentes de la posición en $t = 0$, es decir $\xi_i = x_i(t = 0)$, y pueden interpretarse como coordenadas, dado que determinan la trayectoria. Muestre que el jacobiano de la transformación de coordenadas, $J = \det\left(\dfrac{\partial x_i}{\partial \xi_j}\right)$ no se anula y obtenga entonces la relación inversa $\vec{\xi} = \vec{\xi}(\vec{x}, t)$.

8. Considere el movimiento de un fluido, definido por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_1 &= \xi_1 \\ x_2 &= \frac{1}{2}(\xi_2 + \xi_3)e^{at} + \frac{1}{2}(\xi_2 - \xi_3)e^{-at} \\ x_3 &= \frac{1}{2}(\xi_2 + \xi_3)e^{at} - \frac{1}{2}(\xi_2 - \xi_3)e^{-at} \end{aligned}$$

con $a > 0$ una constante.

a. Muestre que el jacobiano de la transformación de coordenadas entre las x y las ξ no se anula.

b. Determine las componentes de la velocidad y la aceleración en función de las coordenadas (x_i, t) y en función de las coordenadas (ξ_i, t).

9. Las componentes de un flujo bidimensional con densidad constante vienen dadas, en coordenadas cilíndricas, por:

$$u_r = \frac{A}{r}, \qquad u_\phi = u_z = 0 \qquad\qquad (A = cte > 0)$$

Considere una porción de fluido en el tiempo $t = 0$, localizado entre las superficies de dos cilindros concéntricos con radios $r = a$ y $r = b$ $(b > a)$ y $0 \leq z \leq L$. Calcule:

a. La trayectoria de las partículas localizadas sobre las superficies cilíndricas interior y exterior en $t = 0$. ¿Qué aspecto tiene el volumen ocupado por la porción de fluido luego de un tiempo t?

b. La energía cinética K y el momento lineal $\vec{P}$ del fluido y las derivadas $\dfrac{DK}{Dt}$, $\dfrac{D\vec{P}}{Dt}$.

c. $\dfrac{DK}{Dt}$ usando el teorema del transporte de Reynolds.

d. Describa el flujo usando coordenadas materiales (ξ_r, ξ_z, ξ_ϕ) (que corresponden a la posición de las partículas en $t = 0$) y exprese K en función de estas coordenadas y del tiempo. Luego, a partir de esta expresión, obtenga nuevamente $\dfrac{DK}{Dt}$.

10. Un flujo unidimensional está dado por la velocidad $u = \dfrac{2}{\gamma+1}\left(\dfrac{x}{t} - v_0\right)$ y el campo de densidades $\dfrac{\rho}{\rho_0} = \left(\dfrac{\gamma-1}{\gamma+1}\dfrac{x}{v_0\, t} + \dfrac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{2}{\gamma-1}}$

a. Calcule la derivada convectiva de la densidad.

b. Verifique la validez de la ecuación de continuidad $\dfrac{D\rho}{Dt} + \rho\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$ para este flujo.

c. ¿Cuál es la tasa de cambio de densidad que detecta un nadador que se mueve con velocidad c dada por $c = u + a$ o $c = u - a$ en un punto arbitrario?

11. Dado el siguiente campo de velocidades:

$$\begin{aligned} u_1 &= -\frac{\omega}{h}\, x_2\, x_3 \\ u_2 &= \frac{\omega}{h}\, x_1\, x_3 \\ u_3 &= 0 \end{aligned}$$

con h y ω constantes. Determine las componentes de:

a. el tensor gradiente de velocidad,

b. el tensor de deformación e_{ij} y el tensor de rotación r_{ij},

c. el vector velocidad angular,

d. la expresión de e_{ij} en el sistema de coordenadas de sus ejes principales en el punto $(2, 2, 2)$ y la trayectoria de la partícula que está en la posición $(2, 2, 2)$ en $t = 0$.

12. En la figura se muestra un canal convergente bidimensional con variación lineal del área. Si el caudal es Q, ¿cuál es la aceleración en función de la distancia x? (Se suponen conocidas las áreas de las secciones A_1 y A_2 y la extensión del canal L).